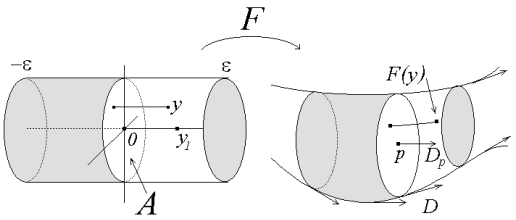
Apuntes de Ecuaciones diferenciales

Badajoz, 13 de mayo de 2013



$$D = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

Dpto. de Matemáticas. Univ. de Extremadura

Índice general

I Ecuaciones diferenciales ordinarias xvii

1. La estructura diferenciable de un espacio vectorial 1

1.1. Conceptos básicos 1
1.2. El haz de funciones diferenciables 6
1.3. Espacio Tangente. Fibrado Tangente 12
1.4. Campos tangentes 17
1.4.1. Campos tangentes 17
1.4.2. Campo tangente a soporte. 22
1.4.3. Campo a soporte universal. 24
1.5. Espacio cotangente. La diferencial 25
1.5.1. Interpretación geométrica de la diferencial. 26
1.5.2. Fibrado cotangente. 27
1.6. Uno formas 28
1.6.1. Campos gradiente. 31
1.7. Sistemas de coordenadas 32
1.8. Ecuaciones diferenciales 36
1.8.1. Cambio de coordenadas. 37
1.8.2. Ecuaciones diferenciales no autónomas. 38
1.8.3. Ecuaciones diferenciales de segundo orden. 39
1.9. Ejemplos de ecuaciones diferenciales 40
1.9.1. Problemas Geométricos 40
1.9.2. Problemas Químicos. Desintegración. 41
1.9.3. Problemas Biológicos. 44
1.9.4. Problemas Físicos. 45
1.9.5. Problemas Arquitectónicos. La catenaria. 54
1.10. Ejercicios resueltos 60
1.11. Bibliografía y comentarios 69

2. Teoremas fundamentales de Ecuaciones diferenciales **71**
2.1. Grupo uniparamétrico 71
2.2. Existencia de solución 75
2.3. Aplicaciones Lipchicianas 78
2.4. Unicidad de solución 82
2.5. Grupo Uniparamétrico de un campo 84
2.6. Grupo Unip. de campos subidos 89
2.7. Diferenciabilidad del grupo unip. 92
2.7.1. Clasificación local de campos no singulares. 96
2.8. Campos completos 98
2.9. Corchete de Lie de campos tangentes 103
2.10. Derivada de Lie de campos tangentes 104
2.11. Método de Lie para resolver ED 109
2.12. Apéndice. La tractriz 116
2.13. Ejercicios resueltos 125
2.14. Bibliografía y comentarios 138

3. Campos tensoriales en un espacio vectorial **143**
3.1. Tensores en un módulo libre 143
3.2. Campos tensoriales en $\mathbb{R}^n$ 147
3.3. Derivada de Lie de un campo tensorial 148
3.4. Campos tensoriales Covariantes 152
3.5. La diferencial exterior 159
3.6. El Lema de Poincaré 163
3.7. Aplicación. Factores de integración 166
3.8. Ejemplos de tensores 170
3.8.1. Tensor métrico del espacio euclídeo. 170
3.8.2. Divergencia, rotacional y gradiente. 172
3.8.3. Interpretación geométrica del rotacional. 174
3.8.4. Tensores de torsión y de curvatura. 177
3.8.5. Tensores de una variedad Riemanniana. 178
3.8.6. El tensor de inercia. 181
3.8.7. Movimiento de un sólido rígido. 183
3.8.8. La fuerza de coriolis. 188
3.8.9. El tensor de esfuerzos. 189
3.8.10. El tensor de deformación. 191
3.9. Ejercicios resueltos 195
3.10. Bibliografía y comentarios 203

4. Campos tangentes lineales **205**
4.1. Ecuaciones diferenciales lineales . . . 205
4.2. Existencia y unicidad de solución . . . 209
4.3. Estructura de las soluciones . . . 213
4.3.1. El sistema homogéneo. . . . 214
4.3.2. El sistema no homogéneo. . . . 219
4.4. Reducción de una EDL . . . 220
4.5. Exponencial de matrices . . . 222
4.6. EDL con coeficientes constantes . . . 225
4.7. Clasificación de campos lineales . . . 229
4.8. EDL con coeficientes periódicos . . . 231
4.9. EDL de orden n con coeficientes constantes . . . 233
4.9.1. Caso homogéneo. . . . 234
4.9.2. Caso no homogéneo. . . . 236
4.10. EDL de orden n. Wronskiano . . . 237
4.10.1. Ecuación de Euler. . . . 239
4.11. EDL de orden 2 . . . 240
4.11.1. Ecuación de Riccati. . . . 242
4.12. Otros métodos para resolver EDL . . . 245
4.12.1. Método de las potencias. . . . 245
4.12.2. Método de Frobenius de las potencias. . . . 246
4.12.3. Método de la transformada de Laplace. . . . 247
4.13. La Ecuación de Bessel . . . 248
4.14. Algunas EDL de la Física . . . 252
4.14.1. Problemas de mezclas. . . . 253
4.14.2. Problemas de muelles. . . . 253
4.14.3. Problemas de circuitos eléctricos. . . . 262
4.14.4. Las leyes de Kepler. . . . 265
4.15. Ejercicios resueltos . . . 270
4.16. Bibliografía y comentarios . . . 274

5. Estabilidad **277**
5.1. Introducción . . . 277
5.2. Linealización en un punto singular . . . 278
5.3. Estabilidad de puntos singulares . . . 280
5.4. Funciones de Liapunov . . . 288
5.5. Aplicaciones . . . 291
5.5.1. Sistemas tipo “depredador–presa”. . . . 291
5.5.2. Especies en competencia. . . . 294
5.5.3. Aplicación en Mecánica clásica. . . . 294

5.6. Clasificación topol. de las ED lineales . . . 297
5.7. Teorema de resonancia de Poincaré . . . 303
5.8. Cuenca de un sumidero . . . 308
5.9. La aplicación de Poincaré . . . 311
5.10. Estabilidad de órbitas cíclicas . . . 316
5.11. El Teorema de Poincaré–Bendixson . . . 320
5.12. Estabilidad de órbitas en el plano . . . 324
5.13. Ejercicios resueltos . . . 327
5.14. Bibliografía y comentarios . . . 332

II Ecuaciones en derivadas parciales 335

6. Sistemas de Pfaff 337
6.1. Introducción . . . 337
6.2. Sistemas de Pfaff y Distribuciones . . . 341
6.2.1. Sistemas de Pfaff. . . . 341
6.2.2. Distribuciones. . . . 342
6.3. El sistema característico . . . 345
6.4. El Teorema de la Proyección . . . 349
6.4.1. Campos tangentes verticales . . . 349
6.4.2. Proyecciones regulares . . . 349
6.5. El Teorema de Frobenius . . . 357
6.5.1. Método de Natani. . . . 366
6.5.2. 1–formas homogéneas. . . . 367
6.6. Aplicación: Tensor de curvatura . . . 369
6.6.1. Funciones especiales del fibrado tangente. . . . 369
6.6.2. Variedad con conexión. Distribución asociada. . . . 370
6.7. Aplicación: Termodinámica . . . 374
6.8. Aplicación: Clasificación de formas . . . 382
6.8.1. Clasificación de 1–formas . . . 382
6.8.2. Clasificación de 2–formas. . . . 389
6.9. Variedades simpléticas . . . 391
6.9.1. Campos Hamiltonianos. . . . 391
6.9.2. El Fibrado Cotangente. . . . 396
6.9.3. Fibrado de Jets de funciones de orden 1 . . . 397
6.9.4. Fibrado tangente de una var.Riemanniana. . . . 398
6.9.5. Mecánica Hamiltoniana. . . . 399
6.10. Apéndice: Variedades diferenciables . . . 422
6.10.1. Particiones de la unidad . . . 424

6.10.2. Inmersiones locales, subvariedades 427
6.10.3. Variedades integrales máximas 428
6.10.4. Otra demostración del Teorema de Frobenius . . . 432
6.11. Ejercicios resueltos 435
6.12. Bibliografía y comentarios 443

7. Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden 447
7.1. Definición clásica 447
7.2. El cono de Monge 449
7.3. EDP cuasilineales 453
7.3.1. Ejemplo: Tráfico en una autopista. 454
7.3.2. Ejemplo: Central telefónica. 455
7.3.3. Ejemplo: El Proceso de Poisson. 457
7.3.4. Ejemplo: Procesos de nacimiento y muerte. 458
7.4. Sistema de Pfaff asociado a una EDP 461
7.4.1. Campo característico. 461
7.5. Teoremas de existencia y unicidad 464
7.5.1. Dimensión de una subvariedad solución. 465
7.5.2. Existencia de solución. 467
7.5.3. El problema de Cauchy. 469
7.6. Métodos para resolver una EDP 472
7.6.1. Método de las características de Cauchy 472
7.6.2. Método de la Proyección. Integral completa 474
7.6.3. Método de Lagrange–Charpit. 477
7.7. Método de la envolvente 478
7.7.1. Envolvente de una familia de superficies. 478
7.7.2. Envolvente de una familia de hipersuperficies. . . . 482
7.7.3. Método de la envolvente. 485
7.7.4. Solución singular. 486
7.8. Definición intrínseca 489
7.9. Teoría de Hamilton–Jacobi 491
7.9.1. Método de Jacobi. 492
7.9.2. Ecuación de Hamilton–Jacobi. 495
7.9.3. Geodésicas de una variedad Riemanniana. 498
7.10. Introducción al cálculo de variaciones 508
7.10.1. Ecuaciones de Euler–Lagrange. 509
7.10.2. Ecuaciones de Euler–Lagrange y Hamilton. 520
7.10.3. Apéndice. La ecuación de Schrödinger 524
7.11. Lagrangianas. Teorema de Noëther 525
7.11.1. Transformada de Legendre. 525

7.11.2. Ejemplo. Lagrangiana de la longitud 531
7.11.3. Principio de Maupertuis 534
7.11.4. Curvas de mínima acción y geodésicas 535
7.11.5. El Teorema de Noëther. 537
7.12. Cálculo de variaciones en Jets 544
7.12.1. Jets de aplicaciones diferenciables 544
7.12.2. Distribución canónica 545
7.13. Apéndice. El Campo geodésico 553
7.13.1. Subidas canónicas de un campo tangente. 553
7.13.2. Variedad con conexión. Campo geodésico. 556
7.13.3. Campo geodésico en una variedad Riemanniana. . 558
7.13.4. Ejemplo 560
7.14. Apéndice. Teoría de Hamilton–Jacobi 563
7.15. Apéndice. Óptica geométrica 565
7.15.1. Ley de Snell 565
7.15.2. Principio de Fermat 565
7.15.3. Óvalo de Descartes 566
7.15.4. Propiedad de refracción de las elipses 568
7.15.5. Propiedades de reflexión de las elipses 570
7.15.6. Trayectoria en un medio de índice variable 570
7.16. Apéndice. Envolventes y cáusticas 572
7.17. Ejercicios resueltos 577
7.18. Bibliografía y comentarios 605

8. EDP de orden superior. Clasificación 609
8.1. Definición clásica 609
8.2. Operadores diferenciales lineales 613
8.2.1. Corchete de Lie de operadores lineales. 613
8.2.2. Restricción de un ODL. 615
8.2.3. Expresión en coordenadas de un ODL. 616
8.2.4. Caracterización del Operador de LaPlace 621
8.2.5. Derivada de Lie de un ODL 623
8.3. El símbolo de un ODL 624
8.4. ODL de orden 2 en $\mathbb{R}^2$. Clasificación 627
8.4.1. Operadores diferenciales lineales hiperbólicos. . . . 628
8.4.2. Operadores diferenciales lineales parabólicos. . . . 629
8.4.3. Campos y 1–formas complejas. 631
8.4.4. Operadores diferenciales lineales elípticos. 634
8.5. ODL de orden 2 en $\mathbb{R}^n$. Clasificación 639
8.6. EDP de orden 2 en $\mathbb{R}^2$. Clasificación 642

8.6.1. ODL asociado a una solución de una EDP. 642
8.6.2. Reducción a forma canónica. Caso hiperbólico de una EDP cuasi–lineal. 645
8.6.3. Reducción a forma canónica. Caso hiperbólico de una EDP de tipo general. 650
8.6.4. Reducción a forma canónica. Caso elíptico. 656
8.7. Clasificación de sistemas de EDP 660
8.7.1. Reducción a forma diagonal de sistemas lineales hiperbólicos. 663
8.7.2. Reducción a forma diagonal de sistemas cuasi–lineales hiperbólicos. 663
8.8. Apéndice 665
8.8.1. Transformada de Legendre. 665
8.9. Ejercicios resueltos 669
8.10. Bibliografía y comentarios 677

9. El problema de Cauchy **679**
9.1. Sistemas de EDP de primer orden 679
9.2. Curvas características 684
9.2.1. Propagación de singularidades. 685
9.3. Funciones analíticas reales 688
9.3.1. Series de potencias. 688
9.3.2. Series múltiples. 689
9.3.3. Series múltiples de funciones. 690
9.4. Funciones analíticas complejas 698
9.4.1. Las ecuaciones de Cauchy–Riemann. 698
9.4.2. Fórmula integral de Cauchy. 701
9.4.3. Funciones analíticas n–dimensionales. 704
9.5. El Teorema de Cauchy–Kowalewski 704
9.6. EDP de tipo hiperbólico 709
9.7. Método de las aprox. sucesivas 713
9.7.1. Existencia de solución. 714
9.7.2. Unicidad de solución. 718
9.7.3. Dependencia de las condiciones iniciales. 720
9.7.4. El problema de Goursat. 723
9.7.5. El problema de valor inicial característico. 724
9.8. Sistemas hiperbólicos 725
9.9. La función de Riemann–Green 732
9.9.1. Operador diferencial lineal adjunto. 732
9.9.2. ODL adjuntos en el plano. 735

9.9.3. El método de Riemann. 736
9.10. Ejercicios resueltos 744
9.11. Bibliografía y comentarios 751

10.La Ecuación de Laplace **753**
10.1. Funciones armónicas 753
10.2. Funciones armónicas en el plano 755
10.2.1. Funciones armónicas en variables separadas. 755
10.2.2. Funciones armónicas y funciones analíticas. 757
10.2.3. Transformaciones conformes. 759
10.3. Transformaciones en $\mathbb{R}^n$. 763
10.3.1. Traslaciones, giros y homotecias. 763
10.3.2. Transformaciones lineales. 764
10.3.3. Inversiones respecto de esferas. 765
10.3.4. Transformaciones en general. 769
10.4. Potenciales gravitatorio y eléctrico. 772
10.4.1. Potencial Newtoniano. 773
10.4.2. Potencial electrostático. 774
10.4.3. Ecuación de Poisson. 783
10.4.4. Otros posibles potenciales. 792
10.5. Los 3 Problemas. 794
10.5.1. Principio del máximo. Unicidad. 794
10.6. Problema de Dirichlet en el plano 797
10.6.1. Problema Dirichlet en un rectángulo 797
10.6.2. Problema de Dirichlet en un disco 800
10.6.3. Fórmula integral de Poisson. 802
10.6.4. Polinomios de Tchebycheff. 805
10.6.5. Problema de Dirichlet en la esfera 808
10.6.6. La Ecuación de Legendre. 809
10.7. Teoremas fundamentales 813
10.7.1. Identidades de Green. 814
10.7.2. Unicidad de solución en PVF 815
10.7.3. Teorema de Gauss 816
10.7.4. Teoremas del valor medio 818
10.7.5. Recíproco del Teorema del valor medio 820
10.7.6. Regularidad de las funciones armónicas 823
10.7.7. Teorema de Picard 825
10.8. Armónicos esféricos 827
10.9. Principio de Dirichlet 829
10.10Introducción a las distribuciones 831

10.10.1 Método de la función de Green 833
10.11 El método de Perron 846
10.11.1 Funciones subarmónicas 846
10.11.2 Sucesiones de funciones armónicas 851
10.11.3 Problema Dirichlet. Existencia de solución 853
10.11.4 Funciones barrera 854
10.12 Teorema de la aplicación de Riemann 858
10.13 Ejercicios resueltos 864
10.14 Bibliografía y comentarios 870

11. La Ecuación de ondas **873**
11.1. La Ecuación de ondas unidimensional 873
11.1.1. Series de Fourier. 875
11.1.2. Solución de D'Alembert. 878
11.1.3. Energía de la cuerda. 882
11.1.4. Unicidad de solución de la ecuación de ondas. . . . 884
11.1.5. Aplicaciones a la música. 884
11.2. La Ecuación de ondas bidimensional. 886
11.2.1. Solución de la ecuación de ondas. 889
11.3. La Ecuación de ondas n–dimensional. 892
11.3.1. La desigualdad del dominio de dependencia. 892
11.3.2. Unicidad de solución. 896
11.3.3. Ecuación de ondas en regiones con frontera. 898
11.3.4. El método de separación de variables. 899
11.4. El método del descenso. 902
11.4.1. La Fórmula de Kirchhoff. 902
11.4.2. El método del descenso. 907
11.4.3. El principio de Huygens. 910
11.5. Ecuación de Poisson Dalambertiana 911
11.6. La Ecuación de Schrödinger. 914

12. Ecuación de ondas. Electromagnetismo **919**
12.1. Espacio Euclideo 919
12.2. Espacio de Minkowski. Relatividad especial 921
12.3. D'Alembertiano 923
12.3.1. Gradiente y divergencia 923
12.3.2. D'Alembertiano y codiferencial 924
12.4. Campo electromagnético 927
12.4.1. Vector impulso 929
12.4.2. Forma de carga 931

12.4.3. Ecuaciones de Maxwell 932
12.5. Ecuación de ondas 936
12.5.1. Energía de una onda 936
12.6. Ejercicios resueltos 938
12.7. Bibliografía y comentarios 940

13. La Ecuación del calor **943**
13.1. La Ecuación del calor unidimensional 943
13.1.1. El principio del máximo. 946
13.1.2. Solución general. 948
13.1.3. Soluciones con condiciones inicial y frontera dadas. 949
13.1.4. El problema de valor inicial. 962
13.2. La Ecuación del calor n–dimensional. 968
13.2.1. Caso bidimensional. Planteamiento. 968
13.2.2. El método de separación de variables. 969
13.2.3. Caso bidimensional. Algunas soluciones. 970
13.2.4. Caso n-dimensional 972
13.3. Ejercicios resueltos 973
13.4. Bibliografía y comentarios 975

14. Integración en variedades **977**
14.1. Orientación sobre una variedad 977
14.2. Integración en una variedad orientada 980
14.3. Variedades con borde 984
14.4. El Teorema de Stokes 988
14.5. Integración en var. Riemannianas 992
14.6. Aplicaciones a la Física 995
14.6.1. Interpretación física de la integral compleja 998
14.7. La definición de Gauss de la curvatura 999
14.8. El operador de Laplace–Beltrami 1001
14.8.1. El operador $*$ de Hodge. 1001
14.8.2. El operador de Laplace–Beltrami 1004

15. Variedades complejas **1015**
15.1. Estructuras casi–complejas 1015
15.1.1. Campos y 1–formas complejas 1019
15.1.2. Integrabilidad de una estructura casi–compleja . . 1022

Índice de figuras

1.1. Gráfica de e . . . 7
1.2. . . . 16
1.3. Campo de vectores . . . 17
1.4. F lleva el campo D al campo E . . . 21
1.5. Gráficas de f y $d_x f$ en $\mathbb{R}$ . . . 26
1.6. Gráficas de f y $d_x f$ en $\mathbb{R}^2$ . . . 26
1.7. Plano tangente a una superficie . . . 27
1.8. Gradiente de $x^2 + y^2$ . . . 31
1.9. Parciales de las coordenadas cartesianas y polares. . . . 34
1.10. Curva integral de D . . . 36
1.11. . . . 40
1.12. Desintegración del C^{14}. . . . 42
1.13. . . . 47
1.14. Péndulo . . . 49
1.15. Curvas integrales . . . 50
1.16. Catenaria. . . . 54
1.17. Fuerzas horizontal y vertical en la catenaria. . . . 54
1.18. Arco de catenaria dado la vuelta. . . . 57
1.19. Fuerzas que actúan en el arco AB . . . 57
1.20. Tractriz . . . 65
1.21. . . . 67
1.22. Columpio . . . 68

2.1. Teorema del flujo . . . 97
2.2. Órbitas de D y de fD . . . 98
2.3. Tractriz . . . 116
2.4. La tractriz y la exponencial . . . 118
2.5. Cicloide . . . 119
2.6. Campo para $\lambda = 1$ y $\lambda \approx \infty$ . . . 120

2.7. Campos D_λ y curva sen x. 120
2.8. Gráfica de f y plano $z = 0$. 121
2.9. El campo apunta hacia el interior de la región. 122
2.10. 123
2.11. Curvas σ_λ para $\lambda = 0'1$, 1, 2 y 10000 123
2.12. Cisterna 132
2.13. Caso $n = 5$ 134
2.14. Caso $cte = \lambda = 1$, por tanto $\alpha = \pi/4$. 136
2.15. 137

3.1. ds en el plano (ver la Fig.1.9, pág.34). 171
3.2. Incrementos de x, y, ρ, θ y s en una curva. 172
3.3. Traslación 176
3.4. Giro $\mathbf{G}$ y dilatación de ejes u_i, $\mathbf{L}u_i = \mu_i u_i$. 176
3.5. 186
3.6. Recta de velocidad mínima 186
3.7. 187
3.8. 190
3.9. $a_{12} = a_{21}$, $a_{31} = a_{13}$ y $a_{23} = a_{32}$ 191
3.10. Curvas para las que $OA = OB$ 196
3.11. Parábola y elipse. 198

4.1. Muelle 253
4.2. Pulsación 258
4.3. Resonancia 259
4.4. Circuito eléctrico 263
4.5. Partícula en movimiento 265
4.6. Segunda Ley de Kepler 266
4.7. 1ª Ley de Kepler 267

5.1. Casos $a > 0$ y $b < 0$ 284
5.2. 295
5.3. 300
5.4. 312
5.5. Sección local 312
5.6. La órbita de p se aproxima a γ en x 316
5.7. Aplicación de Poincaré 318
5.8. 321
5.9. 323

6.1. Sistema de Pfaff . . . 338
6.2. Distribución $< D_{1p}, D_{2p} >= \{\omega_p = 0\}$ . . . 338
6.3. Superficie $\{z = f(x, y)\}$ tangente a los planos. . . . 339
6.4. Interpretación geométrica de $D^L\Delta \subset \Delta$ . . . 348
6.5. Interpretación geométrica de $D \in \Delta$ y $D^L\Delta \subset \Delta$ . . . 348
6.6. Sistema de Pfaff proyectable . . . 351
6.7. $< D >= \mathcal{D}^\pi \subset \mathcal{D}[\mathcal{P}]$ . . . 351
6.8. . . . 352
6.9. Distribuciones asociadas a $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$ . . . 353
6.10. . . . 366
6.11. . . . 366
6.12. Transformación simplética. . . . 392
6.13. Segunda Ley de Kepler . . . 402
6.14. Plano del movimiento . . . 404
6.15. Vector de Laplace . . . 405
6.16. Haz de cónicas con foco el origen: Izqda. $\rho = ex+p$. Dcha. $\rho = -ex + p$ . . . 407
6.17. . . . 408
6.18. Velocidades en trayectorias elíptica, parabólica e hiperbólica. . . . 410
6.19. Hodógrafas correspondientes a elipse, parábola e hipérbola. 410
6.20. Propiedad de la elipse . . . 411
6.21. Posiciones de las masas M y m. . . . 412
6.22. Puntos de Lagrange . . . 414
6.23. Curvas de nivel de v . . . 418
6.24. . . . 422
6.25. Helicoide, $z = \theta$. . . . 437

7.1. Cono de Monge . . . 450
7.2. Conos de Monge . . . 451
7.3. . . . 452
7.4. Construcción de $\mathcal{S}_k$ . . . 467
7.5. Curva de datos iniciales . . . 471
7.6. Envolvente de las esferas . . . 479
7.7. trayectorias bala cañón . . . 479
7.8. ruido de un avión . . . 480
7.9. Envolvente de las esferas . . . 481
7.10. Envolvente pasando por $\mathcal{S}_k$ . . . 484
7.11. Coordenadas esféricas . . . 501
7.12. Curva de mínimo tiempo de A a B. . . . 513

7.13. La braquistócrona (dcha.) es la cicloide invertida. 516
7.14. 517
7.15. La evolvente de la cicloide es la cicloide 518
7.16. Péndulo de Huygens 519
7.17. Refracción y reflexión 565
7.18. 566
7.19. 566
7.20. Óvalo de Descartes. Refracción 567
7.21. 568
7.22. 569
7.23. Refracción Elipsoide de revolución 570
7.24. 570
7.25. Cáustica 572
7.26. La caustica es la epicicloide. 572
7.27. 573
7.28. Cicloide 574
7.29. 574
7.30. 578
7.31. Envolvente de los segmentos. 591
7.32. Catenoide 599
7.33. Catenarias que pasan por $(1, 0)$ 600
7.34. La catenoide de la derecha es la de mínima area 601
7.35. La catenoide tiene curvatura media nula en todo punto . . 601

8.1. Transformada de Legendre 665

9.1. Dominio de dependencia 710
9.2. 715
9.3. 727
9.4. 728
9.5. 740

10.1. $\log \rho$, ρ^2, ρ^{-2}, $\cos(\log \rho)$. 756
10.2. θ, $\operatorname{sen} \theta$, e^{θ}, $\mathrm{e}^{-\theta}$. 756
10.3. Fuerza gravitacional producida por una masa M 773
10.4. Fuerza electrostática producida por una carga q 775
10.5. Flujo a través de una esfera. 777
10.6. Flujo a través de una superficie. 777
10.7. 779
10.8. Ángulos $\widehat{ab} = \widehat{cd}$ 865

10.9. La proy. ester. conserva ángulos. 865
10.10La proy. ester. lleva circunferencias pasando por P en rectas. 865
10.11La proy. ester. lleva circunferencias en circunferencias. . . . 866
10.12.. 866
10.13.. 866

11.1. cuerda vibrante 874
11.2. Posición inicial 879
11.3. Ondas viajeras 880
11.4. Fuerzas sobre una membrana 886
11.5. Membrana vibrante 887
11.6. cono característico 893
11.7. 910
11.8. Frentes delantero y trasero 911

13.1. Flujo de calor 944
13.2. Calor que entra en I 945
13.3. Dominio del problema (hacia el pasado) 954
13.4. Difusión del calor en una placa 968

14.1. flujo de D a través de S. 995
14.2. Planímetro 1010

Parte I

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Tema 1

La estructura diferenciable de un espacio vectorial

1.1. Conceptos básicos

Por $\mathcal{E}$ entenderemos un $\mathbb{R}$–espacio vectorial de dimensión finita n, dotado de la estructura topológica usual. A veces también consideraremos en $\mathcal{E}$ una norma, siendo indiferente en la mayoría de los resultados cual es la que elegimos, pues todas las normas son equivalentes en $\mathcal{E}$. Por $\mathbb{R}^n$ entenderemos el espacio vectorial real $\mathbb{R} \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{R}$.

Dados dos espacios vectoriales $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ denotaremos con $L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de $\mathcal{E}_1$ en $\mathcal{E}_2$. Con $\mathcal{E}^*$ denotaremos el espacio vectorial dual de $\mathcal{E}$, es decir $L(\mathcal{E}, \mathbb{R})$.

Con $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ denotaremos la $\mathbb{R}$–álgebra de las funciones continuas en $\mathcal{E}$ y con $\mathcal{C}(U)$ las continuas en el abierto U de $\mathcal{E}$. Con $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ denotaremos la $\mathbb{R}$–álgebra de los polinomios en $\mathcal{E}$, es decir la sub–$\mathbb{R}$–álgebra de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ generada por $\mathcal{E}^*$.

Elegir una base e_i en $\mathcal{E}$ equivale a elegir una base $x_i \in \mathcal{E}^*$. En cuyo caso tenemos la identificación

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^n \ , \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \longrightarrow (a_1, \ldots, a_n),$$

y las x_i forman un sistema de coordenadas lineales asociado a las e_i de la forma

$$x_i \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \qquad x_i\big(\sum a_j e_j\big) = a_i.$$

A menudo consideraremos sistemas de coordenadas lineales x_i y sobrentenderemos su base dual e_i correspondiente.

Diremos que el espacio vectorial $\mathcal{E}$ es *euclideo* si tiene definido un producto interior $<\ ,\ >$, en cuyo caso consideraremos la norma

$$\| \ x \ \|_2 = \sqrt{< x, x >},$$

y eligiendo una base e_i ortonormal, es decir tal que $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$, y su sistema x_i de coordenadas lineales asociado, tendremos que dados $a, b \in \mathcal{E}$ tales que $x_i(a) = a_i$ y $x_i(b) = b_i$

$$< a, b >= a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Definición. Sean $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ espacios vectoriales reales, U un abierto de $\mathcal{E}_1$ y V uno de $\mathcal{E}_2$. Diremos que $F \colon U \longrightarrow V$ es *diferenciable* en $x \in U$ si existe una aplicación lineal $F'_x \in L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, tal que

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\| \ F(x+h) - F(x) - F'_x(h) \ \|}{\| \ h \ \|} = 0.$$

Diremos que F es *diferenciable* si lo es en todo punto; que F es de *clase 1* si es diferenciable y la aplicación

$$F' \colon U \longrightarrow L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \ , \qquad x \rightsquigarrow F'_x,$$

es continua ; y por inducción que es de *clase* k si F' es de clase $k-1$. Diremos que es de *clase infinita* si es de clase k para toda k.

A partir de ahora siempre que hablemos de clase k, entenderemos que k es indistintamente, a menos que se especifique lo contrario, un número natural $0, 1, \ldots$ ó bien ∞, donde para $k = 0$ entenderemos que las aplicaciones son continuas.

Definición. Dada $f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en x, llamamos *derivada de f* en x al número real

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}.$$

Observemos que este número está relacionado con la aplicación lineal $f'_x \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ por la igualdad

$$f'_x(h) = f'(x) \cdot h.$$

Regla de la cadena 1.1 *a) Sean*

$$F \colon U \subset \mathcal{E}_1 \longrightarrow V \subset \mathcal{E}_2 \ , \quad G \colon V \longrightarrow W \subset \mathcal{E}_3,$$

diferenciables en $x \in U$ y $F(x) = y$, respectivamente. Entonces $H = G \circ F$ es diferenciable en x y se tiene que

$$H'_x = G'_y \circ F'_x.$$

b) La composición de aplicaciones de clase k es de clase k.

Definición. Para cada abierto U del espacio vectorial $\mathcal{E}$, denotaremos

$$\mathcal{C}^k(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R}, \text{de clase } k\},$$

los cuales tienen una estructura natural de $\mathbb{R}$–álgebra y como veremos en (1.11), también de espacio topológico.

Proposición 1.2 *Sea $F \colon U \subset \mathcal{E}_1 \longrightarrow V \subset \mathcal{E}_2$ una aplicación. Entonces son equivalentes:*

a) *F es de clase k.*

b) *Para un sistema de coordenadas lineales y_i en $\mathcal{E}_2$, $f_i = y_i \circ F \in \mathcal{C}^k(U)$.*

c) *Para cada $f \in \mathcal{C}^k(V)$, $f \circ F \in \mathcal{C}^k(U)$, es decir tenemos el morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.*

$$F^* \colon \mathcal{C}^k(V) \longrightarrow \mathcal{C}^k(U), \qquad F^*(f) = f \circ F.$$

Definición. Dada una función $f \in \mathcal{C}^1(U)$, un $v \in \mathcal{E}$ y $p \in U$, llamaremos *derivada direccional* de f relativa a v en p al valor

$$v_p(f) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}.$$

En particular si en $\mathcal{E}$ hemos elegido un sistema de coordenadas lineales x_i con base dual e_i, llamaremos *derivada parcial i–ésima* de f, a la derivada direccional de f relativa a e_i y escribiremos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+te_i) - f(p)}{t}.$$

Si $\mathcal{E}$ es de *dimensión 1*, y x es la coordenada lineal correspondiente al vector no nulo $e \in \mathcal{E}$ escribiremos

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Proposición 1.3 *$f \in \mathcal{C}^k(U)$ si y sólo si para algún sistema de coordenadas lineales x_i —y por tanto para cualquiera—, existen y son continuas en todo U las funciones $D^a f$, para $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, y*

$$D^a = \frac{\partial^{|a|}}{\partial^{a_1} x_1 \cdots \partial^{a_n} x_n}, \qquad |a| = a_1 + \cdots + a_n \leq k.$$

Nota 1.4 Si $\mathcal{E}_1$ es de dimensión n y $\mathcal{E}_2$ de m y U y V son sendos abiertos de $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$, entonces si $F\colon U \longrightarrow V$ es diferenciable, biyectiva y F^{-1} es diferenciable, tendremos que $n = m$.

Esto se sigue fácilmente de la regla de la cadena, pues si $\mathbf{A}$ es la matriz jacobiana de F, en un punto x, y $\mathbf{B}$ la de F^{-1}, en el punto $y = F(x)$, entonces $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ es la identidad en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ la identidad en $\mathbb{R}^n$, de donde se sigue que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son cuadradas —e inversas—, por tanto $n = m$.

Definición. Diremos que $F\colon U \subset \mathcal{E}_1 \longrightarrow V \subset \mathcal{E}_2$ es un *difeomorfismo de clase k* , si F es biyectiva, de clase k y su inversa es de clase k. Diremos que n funciones $u_i\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ son un *sistema de coordenadas de clase k* en U si para

$$F = (u_i)\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

se tiene que $F(U) = V$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $F\colon U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo de clase k. Por *difeomorfismo* a secas entenderemos de clase ∞. Diremos que $F\colon U \subset \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$ es un *difeomorfismo local de clase k*

en $x \in U$ si existe un entorno abierto U_x de x en U tal que $F(U_x) = V$ es abierto y $F\colon U_x \longrightarrow V$ es un difeomorfismo de clase k. Diremos que n funciones $u_i\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ son un *sistema de coordenadas locales de clase* k en $x \in U$ si $F = (u_i)\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo local de clase k en x.

Nota 1.5 Observemos que si $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{C}^k(U)$ son un sistema de coordenadas, entonces para $F = (u_i)\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $F(U) = V$ abierto de $\mathbb{R}^n$ tenemos que, para cada $g \in \mathcal{C}^k(V)$,

$$g \circ F = g(u_1, \ldots, u_n) = f \in \mathcal{C}^k(U),$$

y recíprocamente toda función $f \in \mathcal{C}^k(U)$ es de esta forma.

Si $\mathcal{E}$ es de *dimensión 1*, x es la coordenada lineal correspondiente al vector $e \in \mathcal{E}$ y escribimos f en términos de la coordenada lineal x, $f = g(x)$, entonces

$$\frac{df}{dx}(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+te) - f(p)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g[x(p)+t] - g[x(p)]}{t} = g'[x(p)],$$

es decir que si $f = g(x)$ entonces $df/dx = g'(x)$.

El siguiente resultado fundamental caracteriza los difeomorfismos locales en términos del Jacobiano.

Teorema de la función inversa 1.6 *Sea $F\colon U \subset \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$ de clase k en U. Entonces F es un difeomorfismo local de clase k en $x \in U$ si y sólo si existen sistemas de coordenadas lineales x_i en $\mathcal{E}_1$ e y_i en $\mathcal{E}_2$, tales que para $F_i = y_i \circ F$*

$$\det\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)\right] \neq 0.$$

Y este otro, también fundamental, nos da una condición para la que en un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= a_1 \\ &\cdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= a_n \end{aligned}$$

podamos despejar las x_i en función de las y_j, la cual viene a decir en el caso mas sencillo en el que las f_i son lineales, $f_i(x, y) = \sum a_{ij}x_j + \sum b_{ik}y_k$ y por tanto $F = (f_i) = A \cdot x + B \cdot y$, que si $\det A \neq 0$, podemos despejar x como función de y, siendo $x = A^{-1}[a - B \cdot y]$, para $a = (a_i)$.

Teorema de la función implícita 1.7 *Sean $F\colon U \subset \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$ de clase k, $(x_0, y_0) \in U$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$ y para un sistema de coordenadas lineales x_i en $\mathcal{E}_1$, el determinante de orden n*

$$\det\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0, y_0)\right] \neq 0,$$

entonces existe un entorno V de y_0 en $\mathcal{E}_2$ y una única aplicación $x\colon V \longrightarrow \mathcal{E}_1$ de clase k, tal que $x(y_0) = x_0$ y para todo $y \in V$

$$F[x(y), y] = 0.$$

1.2. El haz de funciones diferenciables

Hemos dicho que los $\mathcal{C}^k(U)$ tiene una estructura natural de $\mathbb{R}$-álgebra, es decir tienen suma, producto, y contienen a $\mathbb{R}$ en la forma de las funciones constantes. Pero además, si consideramos la familia de todos los $\mathcal{C}^k(U)$ cuando U recorre todos los abiertos de $\mathcal{E}$, se tiene que la aplicación

$$U \quad (\textbf{abierto}) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{C}^k(U) \quad (\mathbb{R} - \textbf{álgebra}),$$

es un *haz de* $\mathbb{R}$–**álgebras**, es decir satisface las propiedades:

a) Si $U \subset V$ son abiertos de $\mathcal{E}$, entonces

$$f \in \mathcal{C}^k(V) \quad \Rightarrow \quad f(= f_{|U}) \in \mathcal{C}^k(U).$$

b) Dado un abierto U de $\mathcal{E}$ y un recubrimiento suyo por abiertos U_i, se tiene que si $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f \in \mathcal{C}^k(U_i)$ para cada i, entonces $f \in \mathcal{C}^k(U)$.

Otra importante propiedad, que veremos en esta lección, nos dice que cada función de $\mathcal{C}^k(U)$ coincide, en un entorno de cada uno de los puntos de U, con una función de clase k en todo $\mathcal{E}$, que además se anula fuera de U si queremos. De esto se sigue que para conocer las funciones de clase k en un abierto de $\mathcal{E}$, nos basta con conocer las funciones de clase k en $\mathcal{E}$. Esto podría parecer obvio en una ingenua primera observación,

pues cabría pensar que las funciones de clase k en un abierto U son simplemente las restricciones a ese abierto de las de clase k en $\mathcal{E}$. Pero esto no es cierto —considérese la función $1/x$ en el abierto $(0,\infty) \subset \mathbb{R}$—. Por tanto hay mas funciones de clase k en ese abierto U que las obtenidas por restricción, y hay un medio muy simple de obtenerlas todas. Veremos que son los cocientes de funciones de clase k de $\mathcal{E}$, cuyos denominadores no se anulen en U. Observemos que el ejemplo anterior es de esta forma. Veamos antes la existencia de funciones "*badén*" en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.8 *Sean C un cerrado y K un compacto de $\mathcal{E}$ disjuntos. Entonces existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$ tal que $\Im(\varphi) = [0,1]$, $\varphi(K) = 1$, $\varphi(C) = 0$ y $\operatorname{sop}\varphi = \overline{\{\varphi \neq 0\}} \subset U = C^c$.*

Demostración. Eligiendo un sistema de coordenadas x_i en $\mathcal{E}$, basta hacer la demostración en $\mathbb{R}^n$, donde consideraremos la norma inducida por el producto escalar $< a, b >= \sum a_i b_i$, para $a = (a_i)$ y $b = (b_i)$.

Consideremos la función de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$$e(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

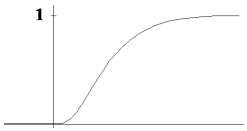


Figura 1.1. Gráfica de e

En primer lugar que dado $r > 0$ y $a \in \mathbb{R}^n$ existe una $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$g(x) = \frac{e(r^2 - \parallel x - a \parallel^2)}{e(r^2 - \parallel x - a \parallel^2) + e(\parallel x - a \parallel^2 - (r/2)^2)},$$

que es positiva en $B(a,r) = \{x : \parallel x - a \parallel < r\}$, vale 1 en $B[a, r/2] = \{x : \parallel x - a \parallel \leq r/2\}$, y 0 fuera de $B(a,r)$.

Ahora para

$$r = \frac{d(C,K)}{2} = (1/2)\,\text{ínf}\{\parallel x - y \parallel :\ x \in C,\ y \in K\},$$

existen, por la compacidad de K, $a_1, \ldots, a_k \in K$ tales que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(a_i, r/2)\ , \qquad B(a_i, r) \subset B[a_i, r] \subset B(a_i, 2r) \subset U = \mathbb{R}^n - C.$$

Ahora para cada a_i, construimos las funciones g_i del principio, y definimos

$$\varphi(x) = 1 - \prod_{i=1}^{k} [1 - g_i(x)],$$

tal función es la buscada. ∎

Corolario 1.9 *Sea $f \in \mathcal{C}^k(U)$, con U abierto de $\mathcal{E}$. Entonces para todo $x \in U$ existe una función $F \in \mathcal{C}^k(\mathcal{E})$, tal que $F = f$ en un entorno abierto $V \subset U$ de x y*

$$\operatorname{sop}(F) = \overline{\{F \neq 0\}} \subset U.$$

Demostración. Elijamos V y W abiertos tales que

$$x \in V \subset K = \operatorname{Adh}(V) \subset W \subset \operatorname{Adh}(W) \subset U,$$

con K compacto. Apliquemos ahora (1.8) a K y $C = \mathcal{E} - W$ y definamos $F = fh$. ∎

Es fácil ver que todo abierto U de $\mathcal{E}$ es unión expansiva numerable de compactos con interiores no vacíos ($K_n \uparrow U$), pues eligiendo una norma cualquiera podemos considerar la sucesión expansiva de compactos (pues son cerrados y acotados)

$$C_n = \{x \in \mathcal{E} : \|x\| \leq n,\ d(x, U^c) \geq 1/n\},$$

y a partir de un n sus interiores son no vacíos, ya que dado $x \in U$, por ser abierto existe una bola abierta $B(x, 2r) \subset U$, por lo que $d(B(x,r), U^c) \geq r$ y $B(x,r) \subset C_n$, para $n \geq \|x\| + r$, $n \geq 1/r$.

En estos términos damos las siguientes definiciones.

Definición. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos la *seminorma* p_m en $\mathcal{C}^\infty(U)$ de la forma,

$$p_m(f) = \sup\{|\ D^a f(x)\ |:\ x \in K_m,\ |\ a\ | \leq m\},$$

y en $\mathcal{C}^r(U)$, para $r \geq 0$,

$$p_m(f) = \sup\{|\ D^a f(x)\ |:\ x \in K_m,\ |\ a\ | \leq r\}.$$

Decimos que una *sucesión* $f_n \in \mathcal{C}^k(U)$, donde $k = 0, 1, \ldots, \infty$, es de *Cauchy* respecto de p_m si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_m(f_{N+n} - f_N) < \epsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Decimos que una sucesión $f_n \in \mathcal{C}^k(U)$ tiene *límite* si existe $f \in \mathcal{C}^k(U)$ tal que para toda $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} p_m(f_n - f) = 0.$$

Obviamente si el límite existe es único, pues para $m = 0$ vemos que tiene que ser el límite puntual de las f_n.

Observemos que las p_m están ordenadas,

$$p_m \leq p_{m+1},$$

y que podemos definir el sistema fundamental de entornos convexos del $0 \in \mathcal{C}^k(U)$

$$B_m = \{f \in \mathcal{C}^k(U) : \ p_m(f) \leq 1/m\}$$

y que estos definen una topología en $\mathcal{C}^k(U)$ *independiente de los* K_n *elegidos!.*

Teorema 1.10 *Si la sucesión* $f_n \in \mathcal{C}^k(U)$ *es de Cauchy para toda* p_m*, entonces tiene límite,* $f = \lim f_n \in \mathcal{C}^k(U)$*, que para cualquier base* $\{e_i\}$ *de* $\mathcal{E}$ *y cada* $a \in \mathbb{N}^n$*, con* $\mid a \mid \leq k$*, verifica*

$$D^a(\lim f_n) = \lim(D^a f_n).$$

Además dada $f \in \mathcal{C}^k(U)$ *existe una sucesión de polinomios* g_n *de* $\mathcal{E}$ *tales que restringidos a* U*,* $\lim g_n = f$*.*

Demostración. Veremos el caso $k = \infty$ para $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$, los demás se siguen haciendo las oportunas modificaciones.

En primer lugar veamos que para todo $a \in \mathbb{N}^n$, existe el límite puntual

$$g_a(x) = \lim(D^a f_k(x)),$$

y que g_a es una función continua en $\mathbb{R}^n$.

Sea $m \geq |a|$, entonces en el compacto K_m se tiene

$$\mid D^a f_{N+k} - D^a f_N \mid \leq p_m[f_{N+k} - f_N] \tag{1.1}$$

de donde se sigue que $D^a f_k$ converge uniformemente en cada compacto K_m, para $m \geq |a|$, a una función continua g_a. En particular para $a = (0, \ldots, 0)$, tendremos que

$$f(x) = \lim f_k(x),$$

es una función continua.

Veamos por inducción en $|a|$, que $D^a f = g_a$.

Para $|a| = 0$ es obvio. Supongamos entonces que $|a| \geq 1$ y que $a_1 \geq 1$, donde $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Entonces, por la hipótesis de inducción, tendremos que $D^b f = g_b$ para $b = (a_1 - 1, a_2, \ldots, a_n)$. Y como

$$D^a = \frac{\partial}{\partial x_1} \circ D^b,$$

bastará demostrar que

$$\frac{\partial g_b}{\partial x_1} = g_a.$$

Sean $(t_1, \ldots, t_n) \in U$, $t \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$, tal que para $\lambda \in [0, 1]$ se tenga

$$(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t, t_2, \ldots, t_n) \in K_m,$$

entonces

$$\int_{t_1}^{t} D^a f_k(x, t_2, \ldots, t_n)dx \to \int_{t_1}^{t} g_a(x, t_2, \ldots, t_n)dx.$$

Ahora bien

$$\int_{t_1}^{t} D^a f_k(x, t_2, \ldots, t_n)dx = D^b f_k(t, t_2, \ldots, t_n) - D^b f_k(t_1, \ldots, t_n),$$

por tanto haciendo $k \to \infty$, tendremos que

$$\int_{t_1}^{t} g_a(x, t_2, \ldots, t_n)dx = g_b(t, t_2, \ldots, t_n) - g_b(t_1, \ldots, t_n),$$

lo cual implica que $\partial g_b / \partial x_1 = g_a$.

Tenemos entonces que para cada $a \in \mathbb{N}^n$,

$$D^a f_k \to D^a f,$$

uniformemente en cada compacto K_m, para $m \geq | \, a \, |$. De aquí se sigue que

$$p_m(f_k - f) \to 0,$$

y $f = \lim f_k$. Pero además $p_m(D^a f_k - D^a f) \to 0$ por tanto

$$D^a f = \lim(D^a f_k).$$

Veamos ahora que los polinomios son densos.

Dada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $N \in \mathbb{N}$ tendremos, por el Teorema de Weierstrass, que para $a = (N, \dots, N) \in \mathbb{N}^n$ existe una sucesión de polinomios que convergen uniformemente a $D^a f$ en K_N. Integrando —y aplicando de nuevo Weierstrass para elegir convenientemente la primitiva— tendremos que existe una sucesión de polinomios $r_{N,n}$ tales que para toda $b = (b_i) \in \mathbb{N}^n$, con $b_i \leq N$, las sucesiones $D^b r_{N,n}$ convergen uniformemente en K_N a $D^b f$. Ahora elegimos g_N como cualquier polinomio $r_{N,n}$, tal que para toda b, con $b_i \leq N$

$$| D^b r_{N,n} - D^b f | \leq \frac{1}{N},$$

en K_N. Esta sucesión de polinomios g_N satisface $\lim g_N = f$, pues para $j \leq N$, $K_j \subset K_N$ y como $b_i \leq \Sigma b_i = | b |$, se tiene

$$\begin{aligned} (1.2) \quad p_j(g_N - f) &\leq \sup\{| D^b g_N - D^b f | : \ x \in K_j, \ | b | \leq j\} \\ &\leq \sup\{| D^b g_N - D^b f | : \ x \in K_N, \ b_i \leq N\} \leq \frac{1}{N}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1 Demostrar que con esta topología la suma y el producto de $\mathcal{C}^k(U)$ son operaciones continuas.

El teorema anterior se expresa diciendo:

Teorema 1.11 *Las p_m definen en $\mathcal{C}^k(U)$ una topología localmente convexa, respecto de la que dicho espacio es completo y los polinomios son densos.*

Teorema 1.12 *Para cada abierto U de $\mathcal{E}$ y para $k = 0, 1, \dots, \infty$, se tiene que*

$$\mathcal{C}^k(U) = \{\left(\frac{g}{h}\right)_{|U} : \ g, h \in \mathcal{C}^k(\mathcal{E}), \ h \neq 0 \text{ en } U\}.$$

Demostración. Sea $\{B_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ un recubrimiento de U formado por bolas abiertas cuyas adherencias estén en U. Y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $g_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$ —como la definida en **(1.8)**—, positiva en B_n y nula en su complementario.

Sea $f \in \mathcal{C}^k(U)$, entonces $f g_n \in \mathcal{C}^k(\mathcal{E})$ y

$$g = \sum 2^{-n} \frac{f g_n}{1 + r_n + s_n} \in \mathcal{C}^k(\mathcal{E}), \quad h = \sum 2^{-n} \frac{g_n}{1 + r_n + s_n} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}),$$

donde $r_n = p_n(f g_n)$ y $s_n = p_n(g_n)$. Para verlo basta observar, por el teorema anterior, que ambas series son de Cauchy para toda p_m. Por

último es obvio que $h \neq 0$ en U y que para cada $x \in U$, $g(x) = h(x)f(x)$, es decir que $g = hf$. ∎

Nota 1.13 Observemos que en el resultado anterior $h \neq 0$ en U y $h = 0$ en U^c, por lo que todo cerrado de $\mathcal{E}$ es de la forma

$$\{x \in \mathcal{E} : \ h(x) = 0\},$$

para una $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$.

Definición. Podemos decir en base a estos resultados que la *estructura $\mathcal{C}^k$–diferenciable* de $\mathcal{E}$, que está definida por todas las $\mathbb{R}$–álgebras $\mathcal{C}^k(U)$, cuando U recorre los abiertos de $\mathcal{E}$, queda determinada exclusivamente por $\mathcal{C}^k(\mathcal{E})$ y los abiertos de $\mathcal{E}$. Y podemos entender la *variedad $\mathcal{C}^k$–diferenciable* $\mathcal{E}$, como el par formado por el espacio topológico $\mathcal{E}$ y por $\mathcal{C}^k(\mathcal{E})$.

1.3. Espacio Tangente. Fibrado Tangente

A lo largo de la lección $\mathcal{E}$ ó $\mathcal{E}_1$ serán espacios vectoriales reales de dimensión n y $\mathcal{E}_2$ de dimensión m.

En la lección **1** hemos visto que cada vector $v \in \mathcal{E}$ define en cada punto $p \in \mathcal{E}$ una derivada direccional v_p de la forma siguiente

$$v_p \colon \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad v_p(f) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t},$$

Es fácil demostrar que v_p es lineal, se anula en las constantes y satisface la regla de *Leibnitz* del producto. Esto nos induce a dar la siguiente definición.

Definición. Llamaremos *vector tangente* en un punto $p \in \mathcal{E}$, a toda *derivación*

$$D_p \colon \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

es decir a toda función que verifique las siguientes propiedades:

a) Linealidad.- $D_p(tf+sg) = tD_pf + sD_pg$.
b) Anulación constantes.- $D_pt = 0$.
c) Regla de Leibnitz en p.- $D_p(fg) = f(p)D_pg + g(p)D_pf$,
para cualesquiera $t, s \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$.

Este concepto nos permite definir, en cada punto $p \in \mathcal{E}$, un espacio vectorial real, utilizando para ello exclusivamente la estructura diferenciable de $\mathcal{E}$.

Definición. Llamaremos *espacio tangente* a $\mathcal{E}$ en p, al espacio vectorial real $T_p(\mathcal{E})$ de las derivaciones en p, con las operaciones

$$\begin{aligned}(D_p + E_p)f &= D_pf + E_pf\\ (tD_p)f &= t(D_pf),\end{aligned}$$

para $D_p, E_p \in T_p(\mathcal{E})$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$ y $t \in \mathbb{R}$.

Definición. Dado un sistema de coordenadas lineales x_i, correspondiente a una base $\{e_i\}$ en $\mathcal{E}$, consideramos para cada $p \in \mathcal{E}$ e $i = 1, \ldots, n$, los elementos de $T_p(\mathcal{E})$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+te_i) - f(p)}{t}.$$

Si no hay confusión usaremos la notación $\partial_{ip} = (\partial/\partial x_i)_p$.

Fórmula de Taylor 1.14 *Sea $U \subset \mathcal{E}$ un abierto convexo, $a \in U$ y $x_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ un sistema de coordenadas lineales. Entonces:*
a) $\mathbf{m}_a = \{f \in \mathcal{C}^\infty(U) : \ f(a) = 0\}$ *es un ideal maximal real generado por* $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$, *donde* $a_i = x_i(a)$.
b) Dada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, *existen* $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{C}^\infty(U)$ *tales que*

$$f = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i - a_i).$$

Demostración. (a) Consideremos el morfismo de $\mathbb{R}$–álgebras

$$H : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R}\ , \qquad H(f) = f(a),$$

para el que $\ker H = \mathbf{m}_a$ e $\operatorname{Im} H = \mathbb{R}$, por tanto $\mathcal{C}^\infty(U)/\mathbf{m}_a \simeq \mathbb{R}$.

Dadas $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(U)$ es obvio que $\sum f_i(x_i - a_i) \in \mathbf{m}_a$ y tenemos una inclusión, veamos la otra, que $\mathbf{m}_a \subset (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. Para ello sea $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{m}_a$, $x \in U$ y definamos la función diferenciable

$$g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\ , \qquad g(t) = f[tx + (1-t)a].$$

Ahora por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} f(x) = g(1) - g(0) &= \int_0^1 g'(t)dt \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}[tx + (1-t)a]\right)(x_i - a_i)\right] dt \\ &= \sum_{i=1}^n h_i(x)(x_i - a_i), \end{aligned}$$

donde

$$h_i(x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}[tx + (1-t)a]\right) dt \in \mathcal{C}^\infty(U). \quad \blacksquare$$

Proposición 1.15 *Las derivaciones $(\partial/\partial x_i)_a$ definidas anteriormente son base de $T_a(\mathcal{E})$.*

Demostración. Que son independientes es una simple consecuencia de que $\partial x_i/\partial x_j = \delta_{ij}$. Veamos que son generadores, para ello sea $D_a \in T_a(\mathcal{E})$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$, entonces $f - f(a) \in \mathbf{m}_a$ y por **(1.14)**

$$f = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i(x_i - a_i),$$

donde $a = (a_i)$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a f &= \sum_{i=1}^n h_i(a)\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(a) = h_j(a), \\ D_a f &= \sum_{i=1}^n h_i(a) D_a x_i = \sum_{i=1}^n [D_a x_i]\partial_{ia} f, \end{aligned}$$

es decir $D_a = \sum [D_a x_i]\partial_{ia}$. $\blacksquare$

Nota 1.16 Observemos que al ser $\mathcal{E}$ un espacio vectorial tenemos una identificación canónica entre todos los espacios tangentes, pues todos son isomorfos a $\mathcal{E}$ de la siguiente forma, para cada $a \in \mathcal{E}$

$$\mathcal{E} \longrightarrow T_a(\mathcal{E}) \ , \qquad v \rightsquigarrow v_a,$$

siendo $v_a f$ la derivada direccional de f relativa a v en a.

Además si elegimos un sistema de coordenadas lineales x_i en $\mathcal{E}$, correspondientes a la base e_i, tendremos que en términos de las bases e_i y ∂_{ia} la aplicación anterior se representa por la matriz identidad, pues para cada i,

$$\mathcal{E} \longrightarrow T_a(\mathcal{E}) \ , \qquad e_i \rightsquigarrow \partial_{ia}.$$

Nota 1.17 El espacio vectorial $T_a(\mathcal{E})$ podíamos haberlo definido como el espacio vectorial de las derivaciones

$$D_a \colon \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

con la regla de Leibnitz en a, siendo U un abierto entorno de a. Pues dada una derivación del tipo (1.3), tendremos por restricción a U una derivación de $T_a(\mathcal{E})$. Y recíprocamente dada una derivación de $T_a(\mathcal{E})$, como es de la forma $\sum t_i \partial_{ia}$ —fijado un sistema de coordenadas lineales x_i—, define una única derivación del tipo (1.3).

Es fácil probar que ambas transformaciones son lineales e inversas, es decir que es un isomorfismo. Para verlo basta usar **(1.9)** y que $D_a f$ no cambia si cambiamos F fuera de un entorno de a.

Por otra parte, para $r \geq 1$, toda derivación con la regla de Leibnitz en a

$$D_a \colon \mathcal{C}^r(U) \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

define una derivación de $T_a(\mathcal{E})$, pues $\mathcal{C}^\infty(U) \subset \mathcal{C}^r(U)$. Y recíprocamente, toda derivación (1.3) puede extenderse a una (1.4), y esto puede hacerse pues según vimos antes, toda derivación (1.3) es de la forma $\sum t_i \partial_{ia}$ que está definido en las funciones de clase 1.

Sin embargo estas dos transformaciones no son inversas, pues en el segundo caso no extendemos de modo único. Es decir que las derivaciones de $\mathcal{C}^r(U)$ en el punto a forman un espacio vectorial con demasiados elementos. Pero si sólo consideramos las continuas respecto de la topología definida en **(1.10)**, tendremos un espacio isomorfo a $T_a(\mathcal{E})$.

Para $r = \infty$ tenemos la suerte de que toda derivación es automáticamente continua respecto de la topología de (1.10), pues es de la forma

$\sum t_i \partial_{ia}$ y estas se extienden a una derivación D_a en $\mathcal{C}^r(\mathcal{E})$ de forma continua de un único modo, a saber $\sum t_i \partial_{ia}$, pues los polinomios son densos y sobre ellos $D_a = \sum t_i \partial_{ia}$.

Finalicemos analizando si existirán derivaciones en $a \in \mathcal{E}$ sobre las funciones continuas

$$D_a \colon \mathcal{C}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

La contestación es que no, pues si $f \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ y $f(a) = 0$ —en caso contrario pondríamos $f - f(a)$—, tendremos que existen funciones continuas

$$g = \sqrt{\text{máx}(f, 0)}, \quad h = \sqrt{\text{máx}(-f, 0)} \in \mathcal{C}(\mathcal{E}),$$

tales que $f = g^2 - h^2$ y $g(a) = h(a) = 0$. Por tanto

$$D_a f = 2[g(a) D_a g - h(a) D_a h] = 0.$$

Definición. Sean $U \subset \mathcal{E}_1$, $V \subset \mathcal{E}_2$ abiertos y $F \colon U \longrightarrow V$ de clase 1. Llamaremos *aplicación lineal tangente* de F en $x \in U$ a la aplicación

$$F_* \colon T_x(\mathcal{E}_1) \longrightarrow T_{F(x)}(\mathcal{E}_2),$$

tal que para cada $D_x \in T_x(\mathcal{E}_1)$, $F_*(D_x) = D_x \circ F^*$, es decir que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ se satisface

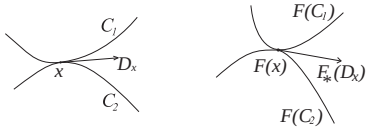


Figura 1.2.

$$[F_* D_x] f = D_x(f \circ F).$$

Ejercicio 1.3.1 Demostrar las siguientes propiedades de la aplicación lineal tangente:

a) Si $V = U$ y $F = id$, entonces para cada $x \in \mathcal{E}$, $F_* = id$.

b) **Regla de la cadena.-** Si $F \colon U \longrightarrow V$ y $G : V \longrightarrow W$ son diferenciables, siendo$U \subset \mathcal{E}_1$, $V \subset \mathcal{E}_2$ y $W \subset \mathcal{E}_3$ abiertos, entonces

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*.$$

c) Elegir sistemas de coordenadas lineales en cada espacio vectorial $\mathcal{E}_i$ y escribir la igualdad anterior en la forma matricial asociada.

Teorema de la función inversa 1.18 *Una aplicación $F \colon U \subset \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$, de clase k es un difeomorfismo local de clase k en un punto $x \in U$ si y sólo si $F_* : T_x(\mathcal{E}_1) \longrightarrow T_{F(x)}(\mathcal{E}_2)$ es un isomorfismo en x.*

Demostración. Es consecuencia de **(1.6)** y de la expresión matricial de F_*. ∎

Definición. Llamaremos *fibrado tangente* del abierto U de $\mathcal{E}$, a la unión $T(U)$ de todos los espacios $T_a(\mathcal{E})$, para $a \in U$, con la estructura topológica y diferenciable definida por la siguiente biyección canónica

$$T(U) \longrightarrow U \times \mathcal{E}, \quad v_a \rightsquigarrow (a, v),$$

donde $v_a \in T_a(\mathcal{E})$ es la derivada direccional en a relativa al vector $v \in \mathcal{E}$.

Llamaremos *aplicación proyección canónica* en U a la aplicación

$$\pi\colon T(U) \longrightarrow U\ , \quad \pi(v_p) = p,$$

si $v_p \in T_p(\mathcal{E})$.

1.4. Campos tangentes

1.4.1. Campos tangentes

Definición. Por un *campo de vectores* en un abierto U de un espacio vectorial $\mathcal{E}$ entenderemos una aplicación

$$F\colon U \longrightarrow \mathcal{E}.$$

Diremos que el campo es de clase k si F es de clase k.

La interpretación de una aplicación F como un campo de vectores queda patente en la figura (1.3), donde hemos representado en cada punto (x, y) del plano real el vector $F(x, y) = (\cos xy, \operatorname{sen}(x - y))$. Aunque esta definición es muy visual y sugerente, tiene el problema de no ser muy manejable y la desventaja de necesitar la estructura vectorial de $\mathcal{E}$

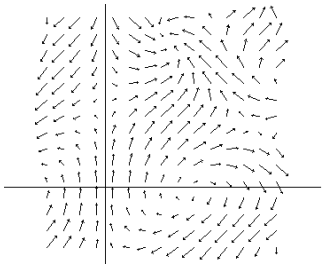


Figura 1.3. Campo de vectores

para que tenga sentido. Por ello recordando que un vector $v = F(p) \in \mathcal{E}$ en un punto $p \in U$ define una derivación $v_p \in T_p(\mathcal{E})$, damos la siguiente definición equivalente, aunque sólo como justificación para una posterior definición mejor.

Definición. Llamaremos *campo de vectores tangentes*, de clase k, en U, a un conjunto de vectores

$$\{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : \ p \in U\},$$

que satisfacen la siguiente condición:

Para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, la función

$$p \in U \longrightarrow D_p f \in \mathbb{R},$$

está en $\mathcal{C}^k(U)$.

Observemos que dar un campo de vectores tangentes $\{D_p\}_{p\in U}$ es equivalente a dar una sección de $\pi\colon T(U) \longrightarrow U$

$$\sigma\colon U \longrightarrow T(U), \quad \sigma(p) = D_p.$$

Ejercicio 1.4.1 (a) Demostrar que existe una biyección entre campos de vectores $F : U \longrightarrow \mathcal{E}$ de clase k y campos de vectores tangentes $\{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : p \in U\}$ de clase k, que verifica:

(i) Si a F le corresponde $\{D_p\}$ y a G $\{E_p\}$, entonces a $F+G$ le corresponde $\{D_p + E_p\}$.

(ii) Si a F le corresponde $\{D_p\}$ y $f \in \mathcal{C}^k(U)$, entonces a fF le corresponde $\{f(p)D_p\}$.

(b) Demostrar que $\{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : \ p \in U\}$ es un campo de vectores tangentes de clase k si y sólo si la aplicación $\sigma : U \longrightarrow T(U)$, $\sigma(p) = D_p$ es una sección de π, de clase k.

Definición. Llamaremos *campo tangente* de clase k en el abierto U de $\mathcal{E}$ a toda *derivación*

$$D\colon \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^k(U),$$

es decir toda aplicación que verifique las siguientes condiciones:

1.- $D(tf + rg) = tDf + rDg$,

2.- $Dt = 0$,

3.- Regla de Leibnitz: $D(fg) = f(Dg) + g(Df)$,

para $f, g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $t, r \in \mathbb{R}$.

Definición. Dado un campo tangente D de clase k, llamaremos *integral primera* de D a toda función $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$ tal que

$$Df = 0.$$

Nota 1.19 Denotaremos con $\mathcal{D}_k(U)$ el conjunto de los campos tangentes a U de clase k, y por comodidad para $k = \infty$ escribiremos $\mathcal{D}(U) = \mathcal{D}_\infty(U)$. Observemos que tenemos las inclusiones

$$\mathcal{D}(U) \subset \mathcal{D}_k(U) \subset \mathcal{D}_0(U),$$

por lo que a menudo hablaremos de los campos continuos, por ser los mas generales. No obstante en el siguiente tema introduciremos los campos localmente lipchicianos, que denotaremos con $\mathcal{D}_L(U)$ y que están entre los de clase 1 y los continuos y que serán los que consideremos para estudiar el problema de unicidad de solución de una ecuación diferencial.

En $\mathcal{D}_k(U)$ definimos la suma de dos campos $D, E \in \mathcal{D}_k(U)$ y el producto de una función $g \in \mathcal{C}^k(U)$ por un campo D, de la forma,

$$\begin{aligned} (D+E)f &= Df + Ef, \\ (gD)f &= g(Df), \end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Tales operaciones dotan a $\mathcal{D}_k(U)$ de una estructura de *módulo* sobre la $\mathbb{R}$–álgebra $\mathcal{C}^k(U)$, pues se tienen las siguientes propiedades,

$$\begin{aligned} f(D+E) &= fD + fE, \\ (f+g)D &= fD + gD, \\ (fg)D &= f(gD), \\ 1D &= D. \end{aligned}$$

y para cada k, $\mathcal{D}_k(U)$ forman un haz de módulos.

A continuación veremos que dar un campo tangente de clase k en U consiste en elegir de forma diferenciable (de clase k), un vector tangente en cada punto de U.

Proposición 1.20 *Existe una biyección entre campos tangentes de clase k y campos de vectores tangentes de clase k, para la que se tiene:*

a) Si $D, E \in \mathcal{D}_k(U)$ y $p \in U$, entonces $(D+E)_p = D_p + E_p$.

b) Si $f \in \mathcal{C}^k(U)$, entonces $(fD)_p = f(p)D_p$.

Demostración. Dada la D definimos los D_p de la forma.

$$D_p f = Df(p).$$

Recíprocamente dado un vector $D_p \in T_p(\mathcal{E})$, en cada $p \in U$, definimos el campo tangente $D \in \mathcal{D}_k(U)$ de la forma

$$Df(p) = D_p f. \quad \blacksquare$$

Dado un sistema de coordenadas lineales x_i en $\mathcal{E}$, es fácil demostrar que los operadores diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U),$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+te_i) - f(p)}{t},$$

para cada $p \in U$ y cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, son derivaciones $\partial/\partial x_i \in \mathcal{D}(U)$.

Si no hay confusión usaremos la notación $\partial_i = \partial/\partial x_i$.

A continuación veremos que $\mathcal{D}_k(U)$ es un módulo libre sobre $\mathcal{C}^k(U)$ con base las ∂_i.

Teorema 1.21 *Dado un sistema de coordenadas lineales x_i en $\mathcal{E}$ y $D \in \mathcal{D}_k(U)$, existen únicas funciones $f_i \in \mathcal{C}^k(U)$ tales que*

$$D = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

Demostración.- Que la expresión es única es inmediato aplicándosela a las x_i. Para ver que existe basta demostrar que $D = \sum (Dx_i)\partial_i$, pues $Dx_i \in \mathcal{C}^k(U)$. Lo cual es una consecuencia inmediata de (1.15) y **(1.20)**. $\blacksquare$

Definición. Dados $U \subset W$ abiertos de $\mathcal{E}$ y $D \in \mathcal{D}_k(W)$, definimos la *restricción del campo*D a U, como el campo de $\mathcal{D}(U)$, correspondiente por **(1.20)** a

$$\{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : \ p \in U\},$$

o equivalentemente por el ejercicio (1.2.1), a la restricción a U de la aplicación de clase k, $F : W \to \mathcal{E}$, correspondiente a D.

Es fácil demostrar que si x_i es un sistema de coordenadas lineales en $\mathcal{E}$, entonces la restricción del campo

$$D = \sum_{i=1}^{n} Dx_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

a U es la derivación

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

para $f_i = Dx_{i|U}$, la restricción a U de Dx_i.

Nota 1.22 Obsérvese que toda derivación de $\mathcal{D}_k(U)$ es automáticamente continua, por **(1.21)**, respecto de la topología definida en **(1.10)**.

Obsérvese también que toda derivación

$$D\colon \mathcal{C}^{k+1}(U) \longrightarrow \mathcal{C}^k(U), \tag{1.5}$$

define una derivación de $\mathcal{D}_k(U)$, pues $\mathcal{C}^\infty(U) \subset \mathcal{C}^{k+1}(U)$, es decir del tipo $\sum f_i\partial_i$ —dado un sistema de coordenadas lineales x_i—, con las f_i de clase k. Recíprocamente toda derivación $\sum f_i\partial_i \in \mathcal{D}_k(U)$, con las $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$, se extiende —no de un único modo—, a una derivación del tipo (1.5). Ahora bien si exigimos que la extensión sea continua —respecto de la topología definida en **(1.10)**—, tendremos que sí es única y es $\sum f_i\partial_i$. Demuéstrese eso como ejercicio.

Definición. Dada $F\colon V \subset \mathcal{E}_2 \to U \subset \mathcal{E}_1$ de clase $k+1$, y dos campos tangentes $D \in \mathcal{D}_k(V)$ y $E \in \mathcal{D}_k(U)$ diremos que F lleva D a E, si para cada $x \in V$

$$F_* D_x = E_{F(x)}.$$

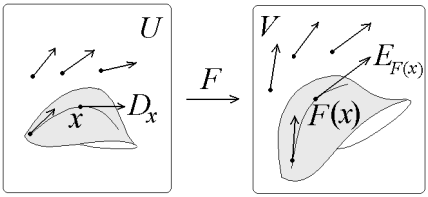


Figura 1.4. F lleva el campo D al campo E

Si $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, $U \cup V \subset W$ abierto y $D \in \mathcal{D}_k(W)$ diremos que F deja invariante a D si F lleva D en D, es decir si para cada $x \in V$

$$F_* D_x = D_{F(x)}.$$

Proposición 1.23 *Sea $F\colon U \subset \mathcal{E}_1 \to V \subset \mathcal{E}_2$, de clase $k+1$, $D \in \mathcal{D}_k(U)$ y $E \in \mathcal{D}_k(V)$. Entonces son equivalentes:*

i) F lleva D en E.
ii) $F_* D = F^* E$.
iii) $D \circ F^* = F^* \circ E$.

Demostración. Hágase como ejercicio. ∎

1.4.2. Campo tangente a soporte.

Consideremos una aplicación diferenciable (de clase ∞)

$$F : V \subset \mathcal{E}_2 \longrightarrow U \subset \mathcal{E}_1.$$

Definición. Llamaremos *campo tangente a U con soporte en V relativo* a F, de clase k, a las derivaciones

$$D^F\colon \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^k(V),$$

con la regla de *Leibnitz*

$$D^F(fg) = D^F f \cdot F^* g + F^* f \cdot D^F g.$$

Denotaremos con $\mathcal{D}_k^F(U)$ el $\mathcal{C}^k(V)$–módulo de estos campos con las operaciones

$$(D^F + E^F)f = D^F f + E^F f, \qquad (g \cdot D^F)f = g \cdot D^F f.$$

Nota 1.24 Si F es de clase r, podemos definir los campos a soporte de clase $k \leq r$ como las derivaciones

$$D^F\colon \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^k(V).$$

Definición. Dada la aplicación F de clase ∞, definimos los morfismos de módulos

$$\begin{aligned} F_*\colon \mathcal{D}(V) &\longrightarrow \mathcal{D}^F(U)\ , \quad (F_* D)f = D(F^* f), \\ F^*\colon \mathcal{D}(U) &\longrightarrow \mathcal{D}^F(U)\ , \quad (F^* D)f = F^*(Df), \end{aligned}$$

Nota 1.25 Lo mismo si F es de clase $k+1$ considerando todos los campos de clase $r \leq k$.

Ejercicio 1.4.2 Demostrar que entre los conjuntos de vectores

$$\{D_p^F \in T_{F(p)}(\mathcal{E}_1) : \ p \in V\},$$

con la propiedad de que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, la función

$$p \in V \longrightarrow D_p^F f \in \mathbb{R},$$

está en $\mathcal{C}^\infty(V)$ y el espacio $\mathcal{D}^F(U)$, existe una biyección verificando las siguientes condiciones:

i) Si D^F, $E^F \in \mathcal{D}^F(U)$, entonces para cada $p \in V$

$$(D^F + E^F)_p = D_p^F + E_p^F.$$

ii) Si $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, entonces para cada $p \in V$

$$(f \cdot D^F)_p = f(p) \cdot D_p^F.$$

Ejercicio 1.4.3 Sea $F\colon V \subset \mathcal{E}_2 \to U \subset \mathcal{E}_1$, diferenciable. Demostrar que

(i) Para cada $D \in \mathcal{D}(V)$ y $p \in V$

$$(F_* D)_p = F_* D_p.$$

(ii) Para cada campo $D \in \mathcal{D}(U)$ y $p \in V$

$$[F^* D]_p = D_{F(p)},$$

y que $\mathcal{D}^F(U)$ es un módulo libre con base

$$F^* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

para cada sistema de coordenadas lineales x_i en U.

(iii) Que $\{D_p^F \in T_{F(p)}(\mathcal{E}_1) : \ p \in V\}$, satisface las condiciones de (a) —y por tanto define un campo a soporte $D^F \in \mathcal{D}^F(U)$— si y sólo si

$$\sigma\colon V \longrightarrow T(U)\ , \qquad \sigma(p) = D_p^F\,,$$

es una aplicación de clase ∞, tal que $\pi \circ \sigma = F$.

1.4.3. Campo a soporte universal.

Consideremos en $\mathcal{E}$ un sistema de coordenadas lineales x_i y en $U \times \mathcal{E}$ las coordenadas (x_i, z_i) naturales, es decir

$$x_i(p, v) = x_i(p) \ , \quad z_i(p, v) = x_i(v),$$

ahora pasémoslas a $T(U)$ por la biyección

$$\begin{aligned} T(U) \to U \times \mathcal{E}, \qquad & x_i(v_p) = x_i(p), \\ v_p \to (p, v), \qquad & z_i(v_p) = x_i(v) = v_p x_i, \end{aligned}$$

Es decir que $v_p \in T(U)$ tiene coordenadas $(p_1, \ldots, p_n, v_1, \ldots, v_n)$ si y sólo si $p = \pi(v_p)$ tiene coordenadas $(p_1, \ldots, p_n)$ y

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

Definición. Llamaremos *campo a soporte universal en* U al campo tangente a U con soporte en $T(U)$, $E \in \mathcal{D}^{\pi}(U)$, que por el ejercicio (1.4.3) queda determinado por la aplicación identidad

$$\sigma \colon T(U) \longrightarrow T(U) \ , \qquad \sigma(D_p) = D_p,$$

es decir que para cada $v \in T(U)$ verifica

$$E_v = v.$$

Además en las coordenadas (x_i, z_i) de $T(U)$, vemos por el ejercicio (1.4.3), que

$$E = \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot \pi^* \frac{\partial}{\partial x_i},$$

pues para cada $D_p \in T(U)$

$$E x_i(D_p) = D_p(x_i) = z_i(D_p).$$

1.5. Espacio cotangente. La diferencial

Definición. Para cada $x \in \mathcal{E}$ denotaremos con $T_x^*(\mathcal{E})$ el espacio vectorial dual de $T_x(\mathcal{E})$, es decir el espacio vectorial real de las formas $\mathbb{R}$–lineales (ó 1–formas)

$$\omega_x \colon T_x(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

al que llamaremos *espacio cotangente* de $\mathcal{E}$ en x y *vectores cotangentes* a sus elementos.

Definición. Dada $F \colon U \subset \mathcal{E}_1 \to V \subset \mathcal{E}_2$ de clase 1 y dados $x \in U$ e $y = F(x)$, llamaremos *aplicación lineal cotangente* de F en x a

$$F^* \colon T_y(\mathcal{E}_2) \longrightarrow T_x(\mathcal{E}_1),$$

la aplicación dual de $F_* \colon T_x(\mathcal{E}_1) \to T_y(\mathcal{E}_2)$. Es decir tal que

$$F^*(\omega_y) = \omega_y \circ F_*.$$

Definición. Dado un punto $x \in \mathcal{E}$, llamaremos *diferencial* en x, a la aplicación

$$d_x \colon \mathcal{C}^1(\mathcal{E}) \longrightarrow T_x^*(\mathcal{E}),$$

tal que para cada $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{E})$ y para cada $D_x \in T_x(\mathcal{E})$

$$d_x f \colon T_x(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad d_x f(D_x) = D_x f.$$

A la 1–forma $d_x f$ la llamamos *diferencial* de f en x.

Ejercicio 1.5.1 Dada $F \colon U \subset \mathcal{E}_1 \to V \subset \mathcal{E}_2$, de clase 1, demostrar las siguientes propiedades de F^*:

(a) Si $U = V$ y $F = id$, entonces $F^* = id$.

(b) Si $F \colon U \to V$ y $G \colon V \to W$, son de clase 1, con $U \subset \mathcal{E}_1$, $V \subset \mathcal{E}_2$ y $W \subset \mathcal{E}_3$ abiertos, entonces

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*.$$

(c) Si F es un difeomorfismo, entonces F^* es un isomorfismo.

(d) Para $x \in U$ e $y = F(x)$, $F^* \circ d_y = d_x \circ F^*$.

Ejercicio 1.5.2 Demostrar que d_x es una derivación en x.

Hemos visto en **(1.15)**, que para cada sistema de coordenadas lineales x_i de $\mathcal{E}$, las derivaciones (∂_{ix}) son base de $T_x(\mathcal{E})$. Se sigue por tanto de la definición de diferencial, que las $d_x x_1, \ldots, d_x x_n$ son la base dual en $T_x^*(\mathcal{E})$, puesto que

$$d_x x_i \Big(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big)_x = \delta_{ij},$$

además el isomorfismo canónico $\mathcal{E} \longrightarrow T_x(\mathcal{E})$, induce otro que es la restricción de d_x a $\mathcal{E}^*$

$$\mathcal{E}^* \longrightarrow T_x^*(\mathcal{E}) \ , \qquad x_i \rightsquigarrow d_x x_i.$$

1.5.1. Interpretación geométrica de la diferencial.

Veamos ahora el significado geométrico de $d_x f$, para cada $x \in \mathcal{E}$ y cada $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{E})$. Se tiene que por el isomorfismo anterior

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right] x_i \longrightarrow d_x f = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right] d_x x_i. \tag{1.6}$$

cuya gráfica es el hiperplano tangente a la gráfica de f en el punto x. En particular en $\mathbb{R}$ tenemos que para $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d_x f\colon T_x(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^2$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d_x f\colon T_x(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$,

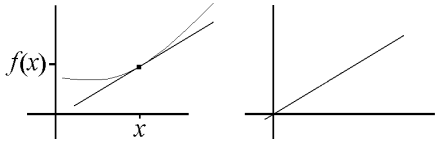


Figura 1.5. Gráficas de f y $d_x f$ en $\mathbb{R}$

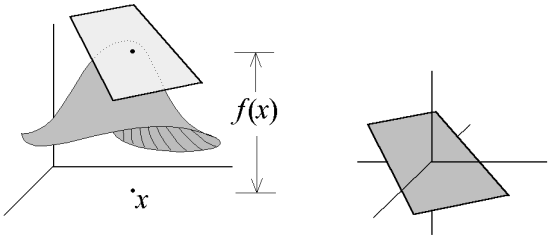


Figura 1.6. Gráficas de f y $d_x f$ en $\mathbb{R}^2$

Ejercicio 1.5.3 Demostrar que para $p \in U$ y $d_p f \neq 0$, el hiperplano (ver Fig.1.7)

$$H = \{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : \ d_p f(D_p) = 0\},$$

es tangente a la hipersuperficie $S = \{x : f(x) = f(p)\}$, en el sentido de que coincide con el conjunto de vectores $D_p \in T_p(\mathcal{E})$, para los que existe una curva $X : I \to U$ tal que

$$X(0) = p, \quad X(t) \in S, \quad X_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0 = D_p.$$

Ejercicio 1.5.4 Dar la ecuación del plano tangente al elipsoide

$$4x^2 + y^2 + 5z^2 = 10,$$

en el punto $(1, 1, 1)$.

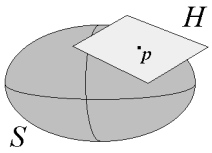


Figura 1.7. Plano tangente a una superficie

1.5.2. Fibrado cotangente.

Igual que todos los espacios tangentes eran canónicamente isomorfos al espacio vectorial inicial $\mathcal{E}$, también todos los espacios cotangentes son canónicamente isomorfos al dual $\mathcal{E}^*$ de $\mathcal{E}$. Esto nos permite definir una biyección canónica

$$T^*(U) \longrightarrow U \times \mathcal{E}^*, \qquad \omega_p \rightsquigarrow (p, w),$$

donde $T^*(U)$ es la unión disjunta de los espacios cotangentes de puntos de U.

Definición. Sea U un abierto de $\mathcal{E}$. Llamaremos *fibrado cotangente* de U, al conjunto $T^*(U)$ unión de todos los espacios cotangentes $T^*_x(\mathcal{E})$, para $x \in U$, dotado de la estructura diferenciable natural, correspondiente por la biyección anterior, a la de $U \times \mathcal{E}^*$, que es un abierto del espacio vectorial de dimensión $2n$, $\mathcal{E} \times \mathcal{E}^*$.

Para cada $\omega \in T^*(U)$ existirá un único $x \in U$ tal que $\omega \in T^*_x(\mathcal{E})$, podemos así definir la aplicación *proyección*

$$\pi\colon T^*(U) \longrightarrow U,$$

tal que $\pi(\omega) = x$. De tal modo que las fibras de cada $x \in U$ son

$$\pi^{-1}(x) = T^*_x(\mathcal{E}).$$

1.6. Uno formas

Definición. Para cada abierto $U \subset \mathcal{E}$, denotaremos con $\Omega(U)$ el dual de $\mathcal{D}(U)$ respecto de $\mathcal{C}^\infty(U)$, y en general con $\Omega_k(U)$ el dual del módulo de los campos tangentes $\mathcal{D}_k(U)$ respecto de $\mathcal{C}^k(U)$, es decir de las aplicaciones $\mathcal{C}^k(U)$–lineales

$$\omega\colon \mathcal{D}_k(U) \longrightarrow \mathcal{C}^k(U),$$

que llamaremos *1–formas* en U, dotadas de las operaciones de $\mathcal{C}^k(U)$–módulo,

$$(\omega_1 + \omega_2)D = \omega_1 D + \omega_2 D, \qquad (f\omega)D = f(\omega D),$$

y para cada k, $\Omega_k(U)$ forman un haz de módulos.

Definición. Llamaremos *diferencial* a la aplicación

$$d\colon \mathcal{C}^{k+1}(U) \longrightarrow \Omega_k(U)\ , \qquad df(D) = Df,$$

para cada $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$ y $D \in \mathcal{D}_k(U)$ (ver (1.22).)

Definición. Diremos que una 1–forma $\omega \in \Omega_k(U)$ es *exacta* si existe $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$ tal que

$$\omega = df.$$

Nota 1.26 Observemos que si $\omega \in \Omega(U)$ es incidente con un campo $D \in \mathcal{D}(U)$, i.e. $\omega D = 0$ y es exacta $\omega = df$, entonces f es una integral primera de D, pues

$$Df = df(D) = \omega D = 0.$$

Ejercicio 1.6.1 Demostrar que la diferencial es una derivación.

Ejercicio 1.6.2 Demostrar que $\Omega_k(U)$ es un $\mathcal{C}^k(U)$–módulo libre con base dx_i, para cada sistema de coordenadas lineales x_i, y que para toda $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Nota 1.27 Observemos que para una variable, la fórmula anterior dice

$$df = \frac{df}{dx} dx.$$

Esto permite entender el sentido que puede tener la cancelación de diferenciales.

Nota 1.28 Debemos observar que en $\mathbb{R}^n$ aunque la noción de dx_1 tiene sentido, pues x_1 es una función diferenciable, la de $\partial/\partial x_1$ no lo tiene, pues para estar definida necesitamos dar a la vez todas las funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_n$.

Para verlo consideremos en $\mathbb{R}^2$ las coordenadas (x, y) y otras coordenadas $(x, x+y)$. En cada caso la $\partial/\partial x$ tiene un significado distinto, pues mientras en el primero $\partial(x+y)/\partial x = 1$, en el segundo $\partial(x+y)/\partial x = 0$.

Definición. Llamaremos *campo de vectores cotangentes* de clase k en U a toda colección

$$\{\omega_x \in T_x^*(\mathcal{E}) : \ x \in U\},$$

para la que, dado $D \in \mathcal{D}_k(U)$ y sus vectores correspondientes D_x, la aplicación

$$x \in U \longrightarrow \omega_x D_x \in \mathbb{R},$$

es de clase k.

Ejercicio 1.6.3 1.- Demostrar que en un espacio vectorial $\mathcal{E}$, el concepto campo de vectores cotangentes de clase k en el abierto U es equivalente al de aplicación de clase k, $F\colon U \to \mathcal{E}^*$.

2.- Demostrar que existe una biyección entre las 1–formas $\omega \in \Omega_k(U)$ y los campos de vectores cotangentes en U de clase k, para la que se tiene:

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2)_x &= \omega_{1x} + \omega_{2x}, \\ (f\omega)_x &= f(x)\omega_x, \\ (df)_x &= d_x f \end{aligned}$$

para $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega_k(U)$, $x \in U$ y $f \in \mathcal{C}^k(U)$.

Ejercicio 1.6.4 Demostrar que $\omega \in \Omega(U)$ si y sólo si $\sigma\colon p \in U \to \omega_p \in T^*(U)$ es una sección de π.

Teorema 1.29 *El fibrado cotangente tiene una 1–forma canónica λ llamada uno–forma de* Liouville.

Demostración. Para cada $p \in U$ y $\omega \in T_p^*(\mathcal{E})$ definimos $\lambda_w = \pi^*\omega$, es decir que para cada $D_w \in T_w[T^*(U)]$,

$$\lambda_w D_w = \omega[\pi_* D_w].$$

Dado un sistema de coordenadas lineales x_i en $\mathcal{E}$ y sus duales z_i en $\mathcal{E}^*$, consideremos el sistema de coordenadas (x_i, z_i) en $T^*(U) \simeq U \times \mathcal{E}^*$, para las que, si ω_p se corresponde con (p, ω), entonces

$$x_i(\omega_p) = x_i(p), \quad z_i(\omega_p) = z_i(\omega) = \omega_p(\partial_{ip}),$$

y en este sistema de coordenadas se tiene que

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} z_i dx_i,$$

lo que prueba su diferenciabilidad. ∎

Ahora veremos una propiedad característica de las funciones y de las *1–formas*, pero de la que los campos tangentes carecen.

Teorema 1.30 *Sea $F\colon U \subset \mathcal{E}_1 \to V \subset \mathcal{E}_2$, de clase $k+1$. Entonces para cada $\gamma \in \Omega_k(V)$ existe $\omega = F^*(\gamma) \in \Omega_k(U)$, definida en cada $x \in U$ de la forma*

$$\omega_x = F^* \gamma_{F(x)}.$$

Además $F^*\colon \Omega_k(V) \to \Omega_k(U)$ es un morfismo de módulos, que conserva la diferencial. Es decir tiene las siguientes propiedades, para $g \in \mathcal{C}^k(V)$ y $\gamma_i \in \Omega_k(V)$:

$$\begin{aligned} F^*(\gamma_1 + \gamma_2) &= F^*\gamma_1 + F^*\gamma_2, \\ F^*[g\gamma] &= [F^*g][F^*\gamma], \\ F^*(dg) &= d(F^*g). \end{aligned}$$

Demostración. Dado un sistema de coordenadas lineales y_i en $\mathcal{E}_2$, existen $g_i \in \mathcal{C}^k(V)$ tales que

$$\gamma = \sum g_j dy_j,$$

entonces si llamamos $F_j = y_j \circ F$, tendremos que para cada $x \in U$

$$\begin{aligned}\omega_x = F^*[\gamma_{F(x)}] &= \sum g_j[F(x)]F^*(d_{F(x)}y_j)\\ &= \sum g_j[F(x)]d_xF_j,\end{aligned}$$

y si consideramos un campo de vectores tangentes D_x, correspondientes a un campo $D \in \mathcal{D}(U)$, la función que a cada $x \in U$ le hace corresponder

$$\omega_x D_x = \sum g_j[F(x)]DF_j(x),$$

es diferenciable. El resto lo dejamos como ejercicio para el lector. ∎

1.6.1. Campos gradiente.

Por último si en un espacio vectorial $\mathcal{E}$ tenemos un producto interior $< \cdot, \cdot >$, entonces $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}^*$ se identifican canónicamente por el isomorfismo

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^* , \qquad v \rightsquigarrow < v, \cdot > .$$

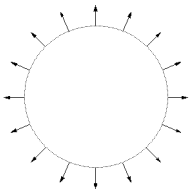


Figura 1.8. Gradiente de $x^2 + y^2$

y en todos los espacios tangentes $T_p(\mathcal{E})$ tenemos definido un producto interior, pues todos son canónicamente isomorfos a $\mathcal{E}$. Esto nos permite identificar $T_p(\mathcal{E})$ y $T_p^*(\mathcal{E})$, para cada $p \in \mathcal{E}$, mediante el isomorfismo

$$T_p(\mathcal{E}) \longrightarrow T_p^*(\mathcal{E}), \qquad D_p \rightsquigarrow < D_p, \cdot >, \tag{1.7}$$

y también nos permite definir para cada dos campos $D, E \in \mathcal{D}_k(U)$, la función $< D, E >= D \cdot E$, que en cada x vale $< D_x, E_x >= D_x \cdot E_x$, la cual es de clase k, pues si en $\mathcal{E}$ elegimos una base ortonormal e_i, entonces la base dual x_i también es ortonormal y por tanto también lo son las bases

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x \in T_x(\mathcal{E}), \qquad d_x x_i \in T_x^*(\mathcal{E})),$$

y se tiene que para $D = \sum f_i \partial x_i$, $E = \sum g_i \partial x_i$,

$$< D, E >= D \cdot E = \sum_{i=1}^{n} f_i g_i.$$

Por tanto podemos definir el isomorfismo de módulos

$$\begin{array}{c} \gamma \colon \mathcal{D}_k(U) \to \Omega_k(U), \\ D \rightsquigarrow \gamma_D, \end{array} \qquad \gamma_D(E) = D \cdot E.$$

Definición. Dado en $\mathcal{E}$ un producto interior, llamaremos *gradiente de una función* $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$, al campo $\operatorname{grad} f = D \in \mathcal{D}_k(U)$ tal que

$$\gamma_D = df,$$

es decir el campo D que en cada punto $p \in U$ define el vector D_p correspondiente por (1.7) a $d_p f$.

Ejercicio 1.6.5 Consideremos un producto interior $<\cdot,\cdot>$ en $\mathcal{E}$, una base ortonormal e_i y el sistema de coordenadas lineales x_i correspondientes a esta base. Demostrar que:

1.- Para toda $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$

$$\operatorname{grad} f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{D}_k(U).$$

2.- Demostrar que el campo $D = \operatorname{grad} f$, es un campo perpendicular a las superficies de nivel de f. (Ver Fig.1.8)

3.- Demostrar que si $U \subset \mathbb{R}^2$, entonces el campo $\operatorname{grad} f$ define en cada punto x el vector D_x el cual indica la dirección y sentido de máxima pendiente de la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

1.7. Sistemas de coordenadas

Proposición 1.31 *Las funciones $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{C}^k(U)$ son un sistema de coordenadas locales de clase k en $x \in U$ si y sólo si las $d_x v_i$ son base de $T_x^*(\mathcal{E})$.*

Demostración. Por el teorema de la función inversa sabemos que (v_i) es un sistema de coordenadas locales en $x \in U$ si y sólo si, dado un sistema de coordenadas lineales x_i, se tiene que

$$\det\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big) \neq 0,$$

y esto equivale a que los vectores cotangentes

$$d_x v_i = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big)(x) d_x x_j,$$

sean base. ∎

Nota 1.32 Observemos que de este resultado se sigue que si las diferenciales de un número finito de funciones diferenciables, son independientes en un punto, también lo son en un entorno del punto, pues pueden extenderse a una base.

Consideremos un difeomorfismo de clase $k+1$

$$F = (v_1, \ldots, v_n) \colon U \subset \mathcal{E} \to F(U) = V \subset \mathbb{R}^n,$$

entonces las 1–formas

$$dv_1, \ldots, dv_n,$$

son base de $\Omega_k(U)$, pues dado un sistema de coordenadas lineales x_i en $\mathcal{E}$, tendremos que

$$dv_i = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big) dx_j.$$

Definición. En los términos anteriores denotaremos con

$$\frac{\partial}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_n} \in \mathcal{D}_k(U),$$

la base dual de las dv_i.

Si $\mathcal{E}$ es de *dimensión* 1 y v es una coordenada de $U \subset \mathcal{E}$, escribiremos

$$\frac{df}{dv} = \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Ejemplo 1.7.1 Coordenadas Polares. Consideremos el difeomorfismo

$$(\rho,\theta)\in(0,\infty)\times(0,2\pi)\to(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0):\ x\geq 0\},$$

para las funciones

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\begin{cases}\arccos x/\sqrt{x^2+y^2}\in(0,\pi) & \text{si } y>0,\\ \arccos x/\sqrt{x^2+y^2}\in(\pi,2\pi) & \text{si } y<0,\\ \arcsin y/\sqrt{x^2+y^2}\in(\pi/2,3\pi/2) & \text{si } x<0.\end{cases}$$

A las correspondientes funciones (ρ,θ) definidas en el abierto $\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0):\ x\geq 0\}$ las llamamos *coordenadas polares*, para las que se tiene

$$\partial_\rho=(\partial_\rho x)\partial_x+(\partial_\rho y)\partial_y=\cos\theta\partial_x+\mathrm{sen}\,\theta\partial_y=\frac{x}{\rho}\partial_x+\frac{y}{\rho}\partial_y,$$
$$\partial_\theta=(\partial_\theta x)\partial_x+(\partial_\theta y)\partial_y=-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\partial_x+\rho\cos\theta\partial_y=-y\partial_x+x\partial_y.$$

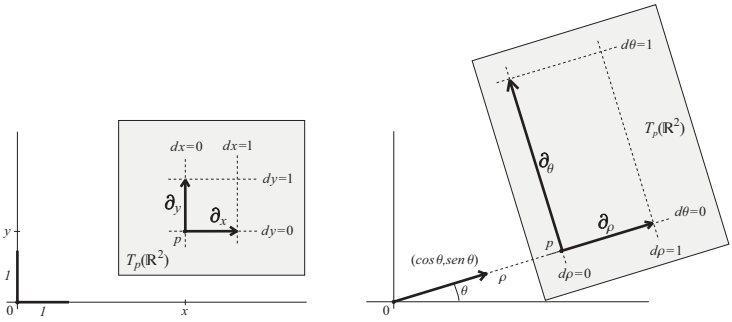


Figura 1.9. Parciales de las coordenadas cartesianas y polares.

Ejercicio 1.7.1 Demostrar que: 1) Para $y_1,\ldots,y_n$ las proyecciones de $\mathbb{R}^n$, y para cada $p\in U$, se tiene que

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_p=\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{F(p)}.$$

2) Si $f=g(v_1,\ldots,v_n)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial v_i}=\frac{\partial g}{\partial y_i}(v_1,\ldots,v_n).$$

3) Para cada $f \in \mathcal{C}^1(U)$,

$$df = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial v_i} \right) dv_i.$$

4) Para cada $\omega \in \Omega_k(U)$,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega \left(\frac{\partial}{\partial v_i} \right) dv_i.$$

5) Para cada campo $D \in \mathcal{D}_k(U)$

$$D = \sum_{i=1}^{n} Dv_i \frac{\partial}{\partial v_i}.$$

Ejercicio 1.7.2 Demostrar que si $(u_1, \ldots, u_n)$ y $(v_1, \ldots, v_m)$ son sistemas de coordenadas de clase k en abiertos $U \subset \mathcal{E}_1$ y $V \subset \mathcal{E}_2$ respectivamente, entonces $(w_1, \ldots, w_{n+m})$ tales que para $(p, q) \in U \times V$

$$\begin{aligned} w_i(p,q) &= u_i(p) \ , \quad \text{para } i = 1, \ldots, n, \\ w_{n+j}(p,q) &= v_j(q) \ , \quad \text{para } j = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

son un sistema de coordenadas de clase k en $U \times V$.

Ejercicio 1.7.3 Demostrar que las funciones ρ y θ definidas en el ejemplo (1.7.1), forman un sistema de coordenadas de clase ∞.

Ejercicio 1.7.4 i) En los términos del ejercicio anterior calcular:

$$\frac{\partial x^2}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial [\log(\theta) \cdot y]}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial xy}{\partial \theta}.$$

ii) Escribir en las coordenadas polares los campos

$$x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y},$$

y dar una integral primera de cada uno.

iii) Escribir en coordenadas (x, y) los campos:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad \rho\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \theta\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

iv) Escribir en coordenadas polares las 1–formas

$$dx, \quad dy, \quad xdx + ydy, \quad \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy.$$

v) Escribir en coordenadas (x, y) las 1–formas

$$d\theta, \quad d\rho, \quad \rho d\rho + \theta d\theta.$$

Ejercicio 1.7.5 Dados $a, c \in \mathbb{R}$, encontrar la solución de $yz_x = xz_y$ que satisface $cz = (x-y)^2$ cuando $x + y = a$.

Ejercicio 1.7.6 a) Encontrar dos integrales primeras del campo de $\mathbb{R}^3$

$$D = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1+z^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

b) Encontrar una integral primera común a los campos de $\mathbb{R}^3$

$$D = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad E = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + (x^2+y^2-1-z^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

1.8. Ecuaciones diferenciales

Definición. Llamaremos *curva parametrizada* en el abierto U de $\mathcal{E}$ a toda aplicación de clase 1, definida en un intervalo real

$$X : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow U.$$

Definición. Dado $D \in \mathcal{D}_k(U)$ y $p \in U$, diremos que una curva parametrizada $X : I \longrightarrow U$ es una *solución de la ecuación diferencial ordinaria* (EDO) *autónoma* definida por D, o una *curva integral* de D, si para cada $t \in I$

$$X_*\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)_t = D_{X(t)}.$$

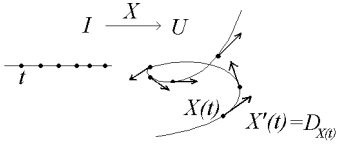


Figura 1.10. Curva integral de D

Sea x_i un sistema de coordenadas en $\mathcal{E}$ y $D = \sum f_i(x_1, \ldots, x_n)\partial_i$. Si denotamos con

$$X_i(t) = x_i[X(t)],$$

para X una curva integral de D, tendremos que

$$X_i'(t) = f_i[X_1(t), \ldots, X_n(t)].$$

Ejercicio 1.8.1 Demostrar que toda integral primera f de un campo D es constante en cada curva integral X de D, es decir que $f \circ X = cte$.

Ejercicio 1.8.2 Encontrar la curva integral —en forma implícita—, del campo de $\mathbb{R}^3$

$$D = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1 + z^2)\frac{\partial}{\partial z},$$

que pasa por $(1, 0, 0)$.

1.8.1. Cambio de coordenadas.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales en un sistema de coordenadas x_i

$$X_i'(t) = f_i[X_1(t), \ldots, X_n(t)],$$

y dado otro sistema de coordenadas $v_1, \ldots, v_n$, podemos escribir el sistema de ecuaciones en este sistema de coordenadas observando que si

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}(Dv_i)\frac{\partial}{\partial v_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} f_j(x_1, \ldots, x_n)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\right]\frac{\partial}{\partial v_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(v_1, \ldots, v_n)\right]\frac{\partial}{\partial v_i}, \end{aligned}$$

entonces las componentes de X en el sistema de coordenadas v_i, $Y_i = v_i \circ X$, satisfacen el sistema de ecuaciones

$$Y_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}[Y_1(t), \ldots, Y_n(t)].$$

Ejercicio 1.8.3 Obtener la expresión anterior aplicando la regla de la cadena a $Y_i' = (v_i \circ X)'$.

Ejercicio 1.8.4 Escribir los sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x}{y^2} \\ y' = \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

en el sistema de coordenadas polares.

1.8.2. Ecuaciones diferenciales no autónomas.

Si I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y U es un abierto de $\mathcal{E}$, en $I \times U$ tenemos una derivada parcial especial, aunque no hayamos elegido un sistema de coordenadas en $\mathcal{E}$.

Definición. Llamaremos $\partial/\partial t$ al campo tangente de $\mathcal{D}(I \times U)$ tal que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(I \times U)$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,p) = \lim_{r \to 0} \frac{f(t+r,p) - f(t,p)}{r},$$

el cual verifica $\partial t/\partial t = 1$ para la función de $I \times U$, $t(r,p) = r$.

Definición. Llamaremos *solución de una ecuación diferencial ordinaria no autónoma* definida en $I \times U$ por un campo $D \in \mathcal{D}(I \times U)$, tal que $Dt = 1$, a la proyección en U de las curvas integrales X de D, tales que $t \circ X = id$.

Si en U consideramos un sistema de coordenadas x_i y en $I \times U$ consideramos el sistema de coordenadas $(t, x_1, \ldots, x_n)$, entonces los campos $D \in \mathcal{D}(I \times U)$ tales que $Dt = 1$, son de la forma

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + f_1(t, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n(t, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n},$$

y si X es una curva integral suya y llamamos $X_0 = t \circ X$, $X_i = x_i \circ X$, tendremos que

$$X_0'(r) = 1,$$

es decir que existe una constante k, tal que para todo r,

$$t[X(r)] = X_0(r) = r + k,$$

y nuestras soluciones ($t \circ X = id$) son las que corresponden a $k = 0$. Por tanto en coordenadas la solución $X_1, \ldots, X_n$ de una ecuación diferencial ordinaria no autónoma satisface el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} X_1'(t) &= f_1[t, X_1(t), \ldots, X_n(t)] \\ &\vdots \\ X_n'(t) &= f_n[t, X_1(t), \ldots, X_n(t)]. \end{aligned}$$

1.8.3. Ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Consideremos ahora la aplicación proyección canónica

$$\pi \colon T(U) \longrightarrow U, \quad \pi(D_p) = p,$$

la cual es de clase ∞.

Definición. Llamaremos *ecuación diferencial de segundo orden* en un abierto U de $\mathcal{E}$ a todo campo tangente en el fibrado tangente de U, $D \in \mathcal{D}[T(U)]$, tal que su proyección por π sea el campo a soporte universal, es decir

$$\pi_* D = E,$$

o lo que es lo mismo tal que para todo $T_p \in T(U)$

$$\pi_* D_{T_p} = T_p.$$

Veamos cómo es un campo de estos en las coordenadas (x_i, z_i) —ver lección **4**—. Por el ejercicio (1.4.3) tenemos que

$$\pi_* D = E \quad \Rightarrow \quad (\pi_* D) x_i = E x_i = z_i,$$

por tanto son los campos de la forma

$$D = \sum z_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum D z_i \frac{\partial}{\partial z_i},$$

y si X es una curva integral suya, tendremos que llamando

$$\begin{aligned} D z_i &= f_i(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n), \\ X_i(t) &= x_i[X(t)], \quad Z_i(t) = z_i[X(t)], \end{aligned}$$

entonces

$$X_i'(t) = Z_i(t)$$
$$Z_i'(t) = f_i[X_1(t), \ldots, X_n(t), Z_1(t), \ldots, Z_n(t)],$$

o lo que es lo mismo

$$X_i''(t) = f_i[X_1(t), \ldots, X_n(t), X_1'(t), \ldots, X_n'(t)].$$

1.9. Ejemplos de ecuaciones diferenciales

1.9.1. Problemas Geométricos

Vamos a estudiar las curvas del plano que en cada punto su tangente determina un segmento con los ejes coordenados, cuyo punto medio es el dado.

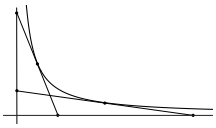


Figura 1.11.

Solución. Sea $y = y(x)$ una de esas curvas, entonces para cada x_0, su tangente $y = xy'(x_0) + b$, en el punto $(x_0, y(x_0))$ verifica

$$y(x_0) = x_0 y'(x_0) + b, \qquad 2y(x_0) = b, \qquad 0 = 2x_0 y'(x_0) + b,$$

por tanto para cada x_0, $y(x_0) = x_0 y'(x_0) + 2y(x_0)$ y nuestra ecuación es $xy' + y = 0$, es decir

$$\frac{y'}{y} + \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\log y + \log x)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xy = cte.$$

y las soluciones son las hipérbolas con asíntotas los ejes.

Veámoslo de otro modo: Sea $h = 0$ una tal curva, entonces la recta tangente en cada punto suyo $p = (x_0, y_0)$, $h(p) = 0$ es de la forma $h_x(p)(x - x_0) + h_y(p)(y - y_0) = 0$, y pasa por $(0, 2y_0)$, por tanto $h_x(p)(-x_0) + h_y(p)(y_0) = 0$, en definitiva h es solución de

$$-xh_x + yh_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Dh = 0, \quad D = -x\partial_x + y\partial_y,$$

y el campo D tiene 1–forma incidente $xdy + ydx = d(xy)$, por tanto las soluciones son $xy = cte$. ∎

Ejercicio 1.9.1 Encontrar la curva[1] cuya tangente en cada punto P corta al eje y en un punto Q tal que $PQ = L$ y pasa por $(L, 0)$.

Ejercicio 1.9.2 Encontrar la ecuación de las curvas que en cada punto la normal determina un segmento con los ejes coordenados, cuyo punto medio es el dado.

Ejercicio 1.9.3 Encontrar la ecuación de las curvas que en cada punto P la normal corta al eje x en un punto A tal que $OP = PA$.

Ejercicio 1.9.4 Encontrar las curvas del semiplano $x > 0$, que para cada punto suyo P, el área del triángulo que forman la tangente, el eje y y la paralela al eje x por P, es proporcional al área de la región limitada por la curva, la tangente y el eje y (contando area positiva si la curva está por debajo de la tangente y negativa en caso contrario).

Ejercicio 1.9.5 Encontrar las curvas en el semiplano $y > 0$, tales que para cada punto P su proyección A en el eje x se proyecta en el punto B de la normal en P a la curva, de modo que PB sea de longitud constante.

1.9.2. Problemas Químicos. Desintegración.

Los químicos suelen afirmar como verdad experimental que una sustancia radioactiva se desintegra con una velocidad proporcional a la cantidad de materia que se desintegra, la razón que subyace es que si en cada instante la materia que hay es $x(t)$, después de un tiempo Δt, habrá menos, $x(t + \Delta t)$ y la diferencia será pequeña si había poca materia ó el tiempo transcurrido Δt era pequeño y grande en caso de ser grande la materia ó el tiempo, en definitiva la diferencia parece proporcional al

[1] Tal curva se denomina *tractriz*.

producto de esas dos cantidades, la cantidad de materia y el tiempo transcurrido,

$$x(t) - x(t + \Delta t) = k\Delta t \cdot x(t).$$

En tal caso la cantidad de materia en cada instante viene dada por la ecuación diferencial

$$x'(t) = -kx(t),$$

donde $k > 0$, por tanto

$$(1.8)\quad \frac{x'(t)}{x(t)} = -k \quad \Leftrightarrow \quad \log x(t) = -kt + \text{cte} \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = x(0)\,\mathrm{e}^{-kt}\,.$$

Observemos que el campo tangente asociado está en $\mathbb{R}$ y en la coordenada x se escribe

$$D = -kx\frac{\partial}{\partial x}.$$

Ejercicio 1.9.6 Si el 20 % de una sustancia radioactiva se desintegra en 10 días, en cuánto tiempo desaparecerá el 50 %?.

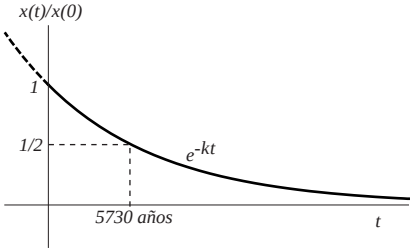


Figura 1.12. Desintegración del C^{14}.

Nota 1.33 Sobre el Carbono 14**.** Existen en la naturaleza tres isótopos del carbono cuyos núcleos contienen diferente número de neutrones (6, 7 y 8) pero el mismo de protones (6): el C^{12} (el 98 % del CO_2 del aire es de este), el C^{13} (el 1 % del CO_2 es de este) y el C^{14} (en menor proporción que

el anterior en el CO_2, pero también existente). Este último es inestable y radioactivo, por tanto el que queda después de un tiempo t es por (1.8)

$$x(t) = x(0)\,\mathrm{e}^{-kt}, \qquad k = \frac{\log 2}{5730 \text{ años}}$$

(ver la figura (1.12)), donde la constante k es la que corresponde a este material radioactivo (y equivale a decir que la masa de C^{14} se reduce a la mitad después de 5730 años).

Es admitido comúnmente que C^{12} y C^{14}, están presentes en toda la materia orgánica viviente en proporción constante. La razón que para ello se da es que aunque el isótopo C^{14} es inestable y lentamente, por la fórmula anterior, se transforma en nitrógeno[2] y otras partículas, esta pérdida queda compensada por la constante actividad de neutrones cósmicos, que atravesando nuestro Sistema Solar, llegan a la atmósfera terrestre, donde chocan, a unos 15 km de la superficie terrestre, con el N, creándose C^{14} e hidrógeno.

Parte de los átomos de C^{14} y de C^{12} en la atmósfera se oxidan, es decir forman con el óxigeno moléculas de CO_2. Todos estos procesos son mas o menos constantes y como consecuencia lo es la proporción en el aire del CO_2 con C^{12} y con C^{14}. Las plantas vivas adquieren el carbono del CO_2 del ambiente produciendo glucosa ($C_6H_{12}O_6$) durante la fotosíntesis. De este modo plantas y animales vivos (que se alimentan de plantas) tienen una proporción constante de ambos carbonos en sus tejidos, que no es otro que el del ambiente.

Sin embargo cuando un ser vivo muere el C^{12} no se altera y podemos analizar cuanto tiene ahora (un tiempo t después de su muerte) que, al ser constante, es el que tenía cuando murió. Por lo que podemos saber la cantidad $x(0)$ de C^{14} que tenía entonces (admitiendo que la proporción de ambos en el ambiente de entonces y de ahora es la misma). Ahora bien como este es radioactivo se desintegra (tras la muerte no hay aporte nuevo de este isótopo) y como conocemos la constante k en la fórmula de su desintegración, podemos aplicarla para saber la fecha de su muerte, para lo cual basta analizar la cantidad, $x(t)$, de C^{14} que hay en la actualidad y despejar t en la fórmula.

Este método de datación por el carbono es usado habitualmente por paleontólogos, egiptólogos, arqueólogos, biólogos, geólogos, químicos ó físicos, quienes están interesados en determinar la edad de huesos, pinturas ó cualquier tipo de resto orgánico. Y como lo habitual es considerarlo un buen método, es preciso recordar sus limitaciones, es decir

[2] El N tiene 7 protones y 7 neutrones

todas las hipótesis que hay detrás de la conclusión. Entre ellas, una aproximación matemática continua y sencilla de una realidad discreta y compleja; constancia de bombardeo cósmico; constancia de átomos y moléculas en la atmósfera y en la superficie de la tierra, durante miles de años, etc. El método no tiene en cuenta catástrofes a nivel mundial: explosiones de supernovas que hayan afectado a la Tierra, emisiones solares extrañas, meteoritos, volcanes o grandes tormentas. Siendo casi cotidianos algunos de estos fenómenos.

Debemos recordar pues, que todas estas hipótesis, son tan sólo hipótesis, es decir algo simple de lo que partir, pero no demostrado en el ámbito científico.

No obstante sí es verdad que pueden hacerse dataciones por otros métodos y cotejarlas permitiendo una verosimilitud mayor en la datación.

Ejercicio 1.9.7 Si es cierto[3] que en una economía la velocidad de disminución del número de personas $y(x)$, con un salario de por lo menos x euros, es directamente proporcional al número de personas e inversamente proporcional a su salario mínimo, obténgase la expresión de y en términos de x llamada **ley de Pareto**.

Ejercicio 1.9.8 La ley experimental de Lambert[4] establece que las láminas delgadas de un material transparente absorben la luz que incide en ellas de forma proporcional a la intensidad de la luz incidente y al ancho de la lámina que atraviesa. Exprésese esta ley dando la fórmula que da la intensidad de luz que sale de un medio de ancho L.

1.9.3. Problemas Biológicos.

1.- Consumo de bacterias. Admitiendo que las bacterias que se suministran como alimento a una población de protozoos (a razón constante), son consumidas a una velocidad proporcional al cuadrado de su cantidad, se pide encontrar:

(a) El número de bacterias $b(t)$ en el instante t, en términos de $b(0)$.

b) ¿Cuántas bacterias hay cuando la población está en equilibrio?.

[3] Como pensaba Vilfredo Pareto, (*1848–1923*), economista, sociólogo y filósofo francés.

[4] Lambert, Johann Heinrich (*1728–1777*), fue un matemático, físico, astrónomo y filósofo alemán de origen francés.

Solución.- Sea $y(t)$ el número de bacterias que hay en el instante t y $x(t)$ el número de bacterias consumidas en el período $(0,t)$, entonces

$$y(t) = y(0) + kt - x(t), \qquad x'(t) = ay^2(t), \qquad x(0) = 0,$$

por tanto $y'(t) = k - ay^2$, que corresponde al campo

$$\frac{\partial}{\partial t} + (k - ay^2)\frac{\partial}{\partial y},$$

que tiene uno forma incidente, para $\lambda = \sqrt{k/a}$

$$-adt + \frac{dy}{\lambda^2 - y^2} = d\left[\frac{1}{2\lambda}\log\frac{\lambda + y}{\lambda - y} - at\right],$$

y la solución es

$$\frac{\lambda + y}{\lambda - y} = c\,\mathrm{e}^{\lambda a t}, \quad c = \frac{\lambda + y(0)}{\lambda - y(0)}. \quad \blacksquare$$

2.- Reproducción de bacterias. Se sabe que la velocidad de reproducción de las bacterias es, cuando no hay demasiadas, casi proporcional al número de bacterias, y cuando hay demasiadas estas influyen negativamente y la velocidad de reproducción se hace negativa. Se plantea así la siguiente ecuación

$$x'(t) = k_1 x(t) - k_2 x^2(t),$$

con $k_1, k_2 > 0$, y k_2 pequeño. El campo tangente asociado está en $\mathbb{R}$ y en la coordenada x se escribe

$$D = (k_1 x - k_2 x^2)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Ejercicio 1.9.9 Demuéstrese que la velocidad de reproducción es máxima cuando la población de bacterias tiene la mitad de su tamaño de equilibrio.

1.9.4. Problemas Físicos.

Ley de Galileo. Consideremos un cuerpo de masa 1. La *ley de Galileo* nos asegura que en caída libre su aceleración $x''(t)$ es constante e igual a g.

Es una ecuación diferencial de segundo orden en la recta, la cual define una ecuación diferencial en el fibrado tangente de la recta, que en coordenadas (x, z) se plantea de la forma

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = z(t) \\ z'(t) = g \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} z(t) = gt + z(0) \\ x(t) = \dfrac{1}{2}gt^2 + x'(0)t + x(0) \end{array}\right\}$$

y cuyo campo asociado es

$$D = z\frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial z}.$$

Leyes de Newton. La Ley de la atracción Universal de Newton asegura que dados dos cuerpos con masas M y m a distancia R, se produce una fuerza de atracción F de m hacia M —y otra $(-F)$ de M hacia m—, de módulo

$$|F| = m\frac{GM}{R^2},$$

Si consideramos un sistema de coordenadas centrado en[5] M y denotamos $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ la posición en el instante t de m, tendremos que su velocidad es $\dot{\sigma}$ y su aceleración $\ddot{\sigma}$ y por *la Segunda Ley de Newton*, la aceleración de m vale, para el vector unitario $u = \sigma/|\sigma| = \sigma/R$

$$m\ddot{\sigma} = F = -\frac{GMm}{R^2}u,$$

donde $G = 6,6742 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{seg}^2} (= 6'6742 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N}\,\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2})$ es una *"constante Universal"*.

Ahora bien esto nos dice por una parte, que si $M = 5,9736 \times 10^{24}$ kg es la masa de la *Tierra*, en las proximidades de su superficie, la masa m sufre una aceleración constante

$$|\ddot{\sigma}| = g = \frac{GM}{R^2} = 9'8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{seg}^2}$$

independiente del valor de su masa, donde R es el radio de la tierra. Con lo cual obtenemos la *Ley de Galileo*. Además $\ddot{\sigma} = -gu$ y u (que apunta

[5] Suponemos que la masa M es mucho más grande que la de m y que está quieto, aunque no lo está, ambos giran en torno al centro de masa de los dos, que sí podemos considerar quieto (ver la pág404). En el caso de la tierra y el sol tal centro de masas está en el interior del sol.

al centro de la tierra) localmente es casi constante $(0, 0, 1)$, por lo tanto $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ y $\ddot{z} = -g$, de donde

$$x(t) = ut + a, \qquad y(t) = vt + b, \qquad z(t) = -\frac{gt^2}{2} + wt + c,$$

para $\sigma(0) = (a, b, c)$ y $\dot{\sigma}(0) = (u, v, w)$, y la trayectoria es una parábola.

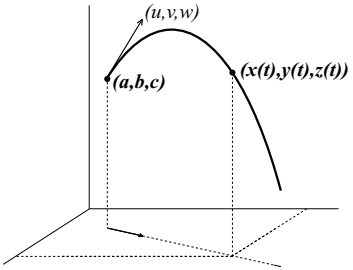


Figura 1.13.

Por ejemplo, para $\sigma(0) = 0$ y $\dot{\sigma}(0) = (1, 0, 0)$, la solución es

$$x(t) = t, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = -\frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{gx^2}{2}.$$

Nota 1.34 Por otra parte también tenemos una explicación de esa constante G. Acabamos de decir que un cuerpo con masa M acelera a todos los cuerpos que estén a distancia d con la misma aceleración a y que esta aceleración determina la masa M, pues

$$ma = G\frac{M\,m}{d^2} \qquad (\Leftrightarrow GM = ad^2).$$

Esto nos permite definir a partir de unidades de *longitud y tiempo* (como *metro* y *segundo*) una unidad de *masa* canónica.

Llamemos *kg Natural* a la masa de un cuerpo que a *1 metro* acelera a cualquier cuerpo 1 m/seg^2.

Naturalmente como el *kg* es una unidad cuyo origen histórico es independiente del *metro* y del *segundo,* (es la masa de 1 cubo de agua de 1 decímetro de lado —es decir de 1 litro—), pues no coincide con el *kg Natural* y la proporción entre ambos es esta *constante Universal G.* Es decir que la naturaleza mágica de ese misterioso número universal está en la elección arbitraria del kg que, también es cierto, puede ser mas operativo

que el del *kg Natural*. Debemos observar también que los valores de G y de M se estiman peor que lo que puede estimarse su producto GM, pues $GM = ad^2$ podemos estimarlo con cualquier objeto del que conozcamos su distancia d al centro de M y su aceleración a, por ejemplo en el caso de la Tierra se estima

$$GM = 398\,600,4418\ \frac{\text{km}^3}{\text{seg}^2}, \tag{1.9}$$

mientras que el producto de G y M, estimados por separado, es

$$\begin{array}{l} G = 6,6742 \cdot 10^{-20}\ \dfrac{\text{km}^3}{\text{kg} \cdot \text{seg}^2} \\ M = 5,9736{\times}10^{24}\ \text{kg} \end{array} \quad \Rightarrow \quad GM = 398\,690,0112\ \frac{\text{km}^3}{\text{seg}^2}.$$

Por otra parte en *La Teoría de la Relatividad* la constancia de la velocidad de la luz nos permite relacionar las unidades de *tiempo* y de *longitud* y hablar de *años-luz* como unidad de *longitud*.

Es decir que las unidades de *longitud* y *tiempo* se determinan mutuamente y con ellas se determina una unidad de *masa*. Pero ¿habrá alguna unidad de longitud canónica?. Es posible que sea así puesto que en el *Universo* hay protones. Y es posible que alguna de las constantes universales de la física (de *Planck*, etc.), sea la confirmación de esto (en cuyo caso el número que define esa constante en unas unidades sería consecuencia, una vez mas, de la elección arbitraria de dichas unidades. Pero esto es hablar por no callar...

El péndulo. Consideremos un péndulo de masa m suspendido, en el origen de coordenadas de $\mathbb{R}^2$, por una barra rígida de masa despreciable y de longitud L.

Su posición, en cada instante t (ver figura (1.14), viene determinada por el ángulo $\theta(t)$ que forma la barra en el instante t con el semieje negativo de las ordenadas, medido en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj. Tal posición es

$$\sigma(t) = L(\operatorname{sen}\theta(t), -\cos\theta(t)) = Le_1(t),$$

y como

$$\begin{aligned} e_1' &= \theta'(t)(\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t)) = \theta'(t)e_2(t), \\ e_2' &= \theta'(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = -\theta' e_1, \end{aligned}$$

tendremos que la velocidad del péndulo en cada instante t vendrá dada por

$$v(t) = \sigma'(t) = L\theta'(t)e_2(t),$$

y la aceleración por

$$a(t) = \sigma''(t) = L\theta''(t)e_2(t) - L\theta'(t)^2 e_1(t)$$

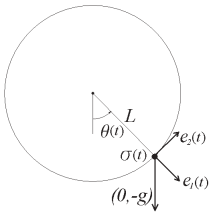


Figura 1.14. Péndulo

Por otra parte sobre la masa actúan dos fuerzas por unidad de masa, la de la gravedad que es $(0, -g)$ y otra con la dirección de la barra $Fe_1(t)$, que impide que la masa deje la circunferencia y que unas veces apuntará en la dirección del centro de la circunferencia ($F < 0$) y otras en dirección contraria ($F > 0$). La de la gravedad se descompone en términos de la base e_1, e_2 de la forma

$$(0, -g) = ((0, -g) \cdot e_1)e_1 + ((0, -g) \cdot e_2)e_2 = mg\cos\theta e_1 - mg\,\mathrm{sen}\,\theta e_2,$$

y por la segunda Ley de Newton $ma(t) = (0, -mg) + mFe_1$, es decir

$$L\theta''(t)e_2 - L\theta'(t)^2 e_1 = g\cos\theta e_1 - g\,\mathrm{sen}\,\theta e_2 + Fe_1,$$

lo cual equivale al par de ecuaciones

$$L\theta''(t) = -g\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad -L\theta'(t)^2 = g\cos\theta + F,$$

y el movimiento del péndulo queda descrito por la ecuación

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta(t). \tag{1.10}$$

Puesta en coordenadas es una ecuación diferencial de segundo orden en la recta real. Aunque realmente es una ecuación diferencial de segundo

orden en la circunferencia y corresponde a un campo tangente en el fibrado tangente a la circunferencia, que es el cilindro.

Para resolver esta ecuación introducimos una nueva variable z (la velocidad de la masa, que es $\| v \|$), y consideramos el sistema

$$\begin{aligned} \theta'(t) &= \frac{z(t)}{L}, \\ z'(t) &= -g \operatorname{sen} \theta(t), \end{aligned}$$

que corresponde al campo tangente

$$D = \frac{z}{L}\frac{\partial}{\partial \theta} - g \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial z}.$$

Observemos que $\omega D = 0$ para la 1–forma exacta

$$\omega = Lg \operatorname{sen} \theta d\theta + z dz = d[\frac{z^2}{2} - gL \cos \theta],$$

por lo que la función

$$h = \frac{z^2}{2} - gL \cos \theta,$$

que verifica $h \geq -gL$, es una integral primera de D y por tanto es constante en las curvas integrales de D (ver dibujo (1.15). Esto demuestra la *Ley de conservación de la energía* en el péndulo, pues la suma de la energía cinética y la energía potencial de m es

$$E_c + E_p = m\frac{z^2(t)}{2} - mgL \cos \theta(t) = mh.$$

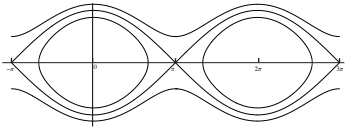


Figura 1.15. Curvas integrales

Nota 1.35 Observemos (ver figura (1.15)), que hay cuatro tipos de curvas integrales y que están sobre las curvas $\{h = \text{cte}\}$: Las constantes, que corresponden a los puntos en los que $D = 0$, que son $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$ —en la franja $[0, 2\pi) \times \mathbb{R}$—. El primero está sobre la curva $\{h = h(0, 0) = -gL\}$,

que sólo contiene al punto $(0,0)$, pues $z^2 = 2gL(\cos\theta - 1) \leq 0$, mientras que el segundo está sobre la curva especial $\{h = h(\pi,0) = gL\} = C \cup \{(\pi,0)\}$, que está formada por dos curvas integrales: la constante $(\pi,0)$ y el resto C que representa el movimiento del péndulo que se aproxima, cuando $t \to \infty$, al punto más alto de la circunferencia, con velocidad tendiendo a cero, sin alcanzarlo nunca salvo en el límite. Esta curva integral es la única no periódica. La curva integral de D, $\tau_p(t) = (\theta(t), z(t))$, con las condiciones iniciales $p = (\pi, z_0)$, con $z_0 \neq 0$, esta sobre la curva

$$h(\theta, z) = h(\pi, z_0) > gL,$$

y se demuestra que esta curva es la trayectoria de τ_p y que esta es periódica de período 2π. Por último la curva integral de D, $\tau_p(t) = (\theta(t), z(t))$, con las condiciones iniciales $p = (\theta_0, 0)$, con $\pi \neq \theta_0 \neq 0$, satisface la ecuación

$$h(\theta, z) = h(\theta_0, 0) < gL$$

que son los óvalos en la figura 1.15. Se sigue de (2.28), pág.100, que τ_p es completa es decir definida en todo $\mathbb{R}$ y como el campo no se anula en esta curva, se sigue de (5.37), pág.322, que la trayectoria de τ_p es el óvalo y que τ_p es una curva periódica, es decir existe el mínimo valor $T > 0$ —al que llamamos *período* de la curva—, tal que $\tau_p(0) = \tau_p(T) = p$. Y para $\theta_0 > 0$ tenemos que

$$z(t) = \begin{cases} -\sqrt{2gL(\cos\theta(t) - \cos\theta_0)}, & \text{si } t \in [0, T/2]; \\ \sqrt{2gL(\cos\theta(t) - \cos\theta_0)}, & \text{si } t \in [T/2, T]. \end{cases}$$

Si se quiere encontrar $\theta(t)$ es necesario resolver una integral elíptica de primera especie, pues integrando entre 0 y t

$$dt = L\frac{\theta'(t)}{z(t)}dt,$$

$$t = \int_0^t L\frac{\theta'(t)}{z(t)}dt = -\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}},$$

y por tanto

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{L}{2g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}},$$

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_{0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}},$$

y utilizando la igualdad

$$\cos\theta = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2},$$

se tiene que

$$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\,\frac{\theta_0}{2} - \mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2}}},$$

y con el cambio de variable

$$\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} = \mathrm{sen}\,\frac{\theta_0}{2}\,\mathrm{sen}\,\varphi = a\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

tendremos

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}},$$

y como para $|x| < 1$ se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$$

se demuestra (para $x = a^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi$) que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 a^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 a^6 + \cdots\right],$$

y se tiene que si $\theta_0 \to 0$ entonces $a \to 0$ y el período converge a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{1.11}$$

Ejercicio 1.9.10 Una masa se desplaza infinitesimalmente del punto mas alto de una esfera lisa de radio L y empieza a resbalar sin rozamiento ni rotación. ¿En que punto y con que velocidad se separa de la esfera?.

A menudo (1.10) se transforma por

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\theta(t),$$

que es una buena aproximación para pequeñas oscilaciones del péndulo, pues para θ pequeño $\theta \approx \mathrm{sen}\,\theta$, y tiene la ventaja de ser mas sencilla de resolver.

Sin embargo la razón de esta aproximación la veremos en la lección 5.2, pág.278, donde probaremos que una ecuación diferencial en un punto singular tiene asociada, canónicamente, otra ecuación diferencial en su espacio tangente, a la que llamamos su *linealización*.

En el tema de los sistemas lineales veremos que

$$x'' = -k^2 x,$$

—con $k > 0$—, tiene solución periódica

$$x(t) = A \cdot \cos(kt) + B \cdot \operatorname{sen}(kt) = C \cdot \cos(kt + \alpha),$$

para $\alpha \in [0, 2\pi)$ y

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}\,, \quad \cos\alpha = \frac{A}{C}\,, \quad \operatorname{sen}\alpha = -\frac{B}{C},$$

y que para $k = \sqrt{g/L)}$ el período es

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = R2\pi\sqrt{\frac{L}{MG}}, \tag{1.12}$$

que es el valor límite (1.11), donde recordemos que R es la distancia de la masa al centro de la Tierra.

Con esto tenemos una justificación de por qué un reloj de péndulo atrasa si lo llevamos del polo al ecuador, en el que la distancia al centro de la tierra es mayor.

Ejercicio 1.9.11 Justifíquese por qué un reloj de péndulo atrasa si lo llevamos del polo al ecuador y estímese la proporción de abultamiento de la Tierra en esos puntos, si el mismo tiempo (medido en ambos puntos con otro reloj) en uno de los puntos el reloj de péndulo lo mide de $1h$, $10'$ y $52''$ y en el otro de $1h$, $10'$ y $38''$.

Ejercicio 1.9.12 Nos movemos en un columpio de longitud L, con el asiento a distancia r del suelo (que está horizontal). Salimos con velocidad nula y ángulo α con la vertical, pasamos el punto más bajo un ángulo β y nos tiramos en marcha dejándonos caer por la gravedad hasta llegar al suelo. Calcular el tiempo que pasamos en el aire y la distancia en el suelo desde el pie del columpio al lugar de llegada; demostrar que esta distancia es independiente de la gravedad y que la velocidad con que llegamos al suelo es independiente de β. Dar su valor.

1.9.5. Problemas Arquitectónicos. La catenaria.

Planteamos el problema de encontrar la curva que hace una cadena[6] fina cuando la sujetamos en dos puntos.

Figura 1.16. Catenaria.

En cada punto B (ver la Fig.1.17) la cadena está en equilibrio por las dos fuerzas de tensión (contrarias) que actúan sobre ella.

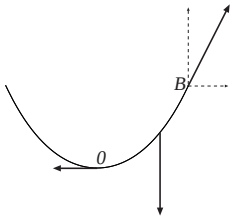


Figura 1.17. Fuerzas horizontal y vertical en la catenaria.

Una la realiza la parte de la cadena que está a la derecha de B (suponiendo que este está a su vez a la derecha del punto más bajo de la cadena), tirando de la cadena hacia arriba, y otra la que realiza la parte izquierda de la cadena tirando hacia abajo. Descompongamos estas fuerzas en sus componentes horizontal y vertical. Son iguales y de sentido contrario pues el punto está en equilibrio, pero además las componentes horizontales no dependen del punto B que hayamos considerado, es constante. Para justificarlo mantengamos la cadena inmóvil y sujetémosla por el punto B y por el punto más bajo 0. La fuerza en B no ha cambiado y la fuerza en 0 es horizontal, igual y de sentido contrario que la componente horizontal de la fuerza en B, pues en caso contrario cambiando la cadena por otro objeto idéntico en forma y masa, pero rígido, se desplazaría horizontalmente en el sentido de la de mayor fuerza. Como esto no ocurre, pues la cadena está quieta, concluimos. Por otra parte la fuerza vertical que actúa sobre el punto B es el peso de la cuerda desde el punto más bajo O, hasta el punto B.

[6] Jakob Bernoulli (1655–1705) fue el primer matemático de una familia de excelentes científicos suizos. En 1691 estudió esta curva, llamada *catenaria*.

Consideremos la curva que define la cadena $[x(t), y(t)]$ y sea s el parámetro longitud de arco,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)}dt,$$

tomando como $s = 0$ el punto más bajo $0 = (x(0), y(0))$ —en el que la tangente es horizontal—, (donde usamos la notación $\dot{h} = dh/dt$ y $h' = dh/dx$) y sea w la densidad lineal de la cadena, de modo que el peso de la cuerda entre a y b es

$$\int_a^b w(s)ds,$$

en estos términos se tiene que

$$\dot{x}(t) = c = 1/k \ \ (\text{cte}) > 0, \qquad \dot{y}(t) = \int_0^{s(t)} w(s)ds,$$

y al ser $k \neq 0$, tendremos que $dt = kdx$, por lo tanto

$$y'[x(t)] = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = k\int_0^{s(t)} w(s)ds = k\int_0^t w[s(t)]\dot{s}(t)dt,$$

y derivando respecto de t y aplicando la regla de la cadena

$$y''[x(t)]\dot{x}(t) = kw[s(t)]\dot{s}(t) \quad \Rightarrow \quad y'' = kw[s(t)]\sqrt{1 + y'^2}.$$

Ahora consideremos el caso particular en que la densidad es constante $w = 1$, en cuyo caso la masa de un trozo es proporcional a su longitud y la pendiente $y'(x)$ de la curva en todo punto $B = (x, y(x))$ es proporcional a la longitud OB de la curva, para 0 el punto mas bajo. Y se tiene que

$$y'' = k\sqrt{1 + y'^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y' = z, \\ z' = k\sqrt{1 + z^2}, \end{array}$$

que corresponde al campo, en el plano zy,

$$z\frac{\partial}{\partial y} + k\sqrt{1 + z^2}\frac{\partial}{\partial z},$$

del que podemos calcular una integral primera fácilmente, mediante su 1–forma incidente

$$dy - \frac{z}{k\sqrt{1 + z^2}}dz = d[y - c\sqrt{1 + z^2}],$$

cuya solución es para cada constante a, $y = c\sqrt{1+z^2} + a$. Ahora despejando $y' = z$, tenemos la nueva ecuación

$$y' = k\sqrt{(y-a)^2 - c^2}, \tag{1.13}$$

de la que consideramos la 1–forma que define

$$\frac{c}{\sqrt{(y-a)^2-c^2}}dy - dx = d\left(c\log[y-a+\sqrt{(y-a)^2-c^2}] - x\right),$$

por tanto la solución es para cada constante b

$$\begin{aligned}
x &= c\log[y-a+\sqrt{(y-a)^2-c^2}] + b \quad \Rightarrow \\
\mathrm{e}^{k(x-b)} &= y-a+\sqrt{(y-a)^2-c^2} \quad \Rightarrow \\
(y-a)^2 &= \left(\mathrm{e}^{k(x-b)} - y + a\right)^2 + c^2 \quad \Rightarrow \\
2\,\mathrm{e}^{k(x-b)}(y-a) &= \mathrm{e}^{2k(x-b)} + c^2 \\
y &= a + \frac{\mathrm{e}^{k(x-b)}}{2} + \frac{c^2\,\mathrm{e}^{-k(x-b)}}{2} = \\
&= a + \frac{1}{2k}\left(\mathrm{e}^{kx-r} + \mathrm{e}^{r-kx}\right) = \\
&= a + \frac{\cosh(kx-r)}{k}
\end{aligned}$$

para[7] $\mathrm{e}^r = c\,\mathrm{e}^{kb}$. Que es la ecuación de la *catenaria* (observemos que es una traslación y una homotecia de razón $1/k$ de $y = \cosh x$, por lo tanto toda catenaria es $y = \cosh x$, vista mas cerca o mas lejos).

Otra forma de resolverlo es la siguiente: como $y'' = k\sqrt{1+y'^2}$, si consideramos $f = y'$, nuestra ecuación se convierte en $f' = k\sqrt{1+f^2}$ y por tanto elevando al cuadrado y derivando (y como $f' = y'' > 0$)

$$f'^2 = k^2(1+f^2) \quad \Rightarrow \quad f'f'' = k^2 f f' \quad \Rightarrow \quad f'' = k^2 f,$$

[7] El *seno hiperbólico* y el *coseno hiperbólico* se definen como

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

y tienen las propiedades elementales

$$\cosh' = \operatorname{senh}, \quad \operatorname{senh}' = \cosh, \quad \cosh^2 - \operatorname{senh}^2 = 1, \quad \cosh' = \sqrt{\cosh^2 x - 1}.$$

siendo e^{kx} y e^{-kx} soluciones triviales de esas ecuaciones, que estudiaremos en la pág.233, del Tema de las EDO lineales, y base de soluciones pues podemos elegir constantes adecuadas para obtener la que queramos con unas condiciones iniciales dadas, $y(0)$, $y'(0)$.

$$f = c_1\, e^{kx} + c_2\, e^{-kx} \quad \Leftrightarrow \quad y = a + \frac{c_1}{k}\, e^{kx} + \frac{c_2}{-k}\, e^{-kx}\,.$$

La catenaria en arquitectura.- Ante todo observemos que la *catenaria*, tiene la propiedad de que en cada punto B (ver la Fig.1.17), la pendiente de su tangente es, salvo un factor constante, el peso de la cadena desde el punto mas bajo O hasta el punto considerado, ó equivalentemente –pues es de densidad constante–, la longitud de dicho trozo.

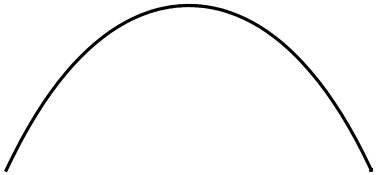


Figura 1.18. Arco de catenaria dado la vuelta.

Esta peculiaridad de la catenaria tiene una aplicación extraordinaria en construcción[8] pues dada la vuelta tiene la peculiaridad de autosoportarse, por lo que un arco con forma de catenaria no necesita de argamasa para sujetarse, por su propia gravedad se mantendrá íntegro.

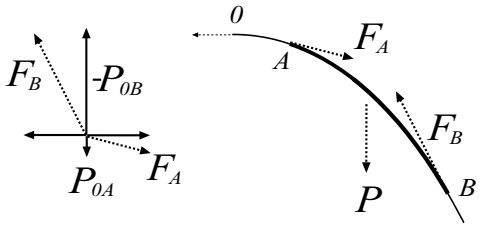


Figura 1.19. Fuerzas que actúan en el arco AB

Para verlo consideremos un trozo de la catenaria invertida (ver Fig.1.19), de extremos A y B y veamos que fuerzas actúan sobre él. Denotemos con O el punto mas alto de la curva en el que la tangente es horizontal. Las

[8] Recomendamos la obra del genial arquitecto español *Antonio Gaudí* (*1852–1926*), que la utilizó profusamente.

fuerzas que actúan sobre AB son tres: El peso P, que es vertical hacia abajo y su intensidad es (salvo un factor constante) la longitud de la curva AB, la fuerza F_A en A que produce OA y es tangente a la curva, siendo su componente horizontal constante y su componente vertical la longitud OA y va de arriba a abajo y la fuerza F_B en B que es tangente a la curva y la produce por reacción el trozo que está bajo B y que va de abajo a arriba, su componente horizontal es constante y la vertical es la longitud OB. Estas tres fuerzas son exactamente las que actuaban sobre el trozo de catenaria, pero giradas, se sigue de forma inmediata que $F_A + F_B + P = 0$, pero además también es nulo el momento externo total (ver la lección 3.8.6, pág. 181), pues lo era para la catenaria ya que estaba en equilibrio. Por tanto el trozo también está en equilibrio.

Veamos explícitamente que para el trozo AB del arco de catenaria invertida

$$y = -\cosh x,$$

el momento o torque (ver la lección 3.8.6, pág. 181), de las tres fuerzas F_A, F_B y P es nulo

$$\begin{aligned} A &= (x_0, y(x_0)), \quad F_A = (1, y'(x_0)), \\ B &= (x_1, y(x_1)), \quad F_B = -(1, y'(x_1)), \\ P &= (0, -\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx), \end{aligned}$$

estando aplicado P en el centro de gravedad de AB

$$C = \left(\frac{\int_{x_0}^{x_1} x\sqrt{1+y'^2}\, dx}{\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx}, \frac{\int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1+y'^2}\, dx}{\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx} \right),$$

ahora bien $y' = -\operatorname{senh} x$, por tanto $y'' = y = -\sqrt{1+y'^2}$ y tenemos que el torque es

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} &= A \times F_A + B \times F_B + C \times P \\ &= (x_0 y'(x_0) - y(x_0) - x_1 y'(x_1) + y(x_1) - \int_{x_0}^{x_1} x\sqrt{1+y'^2}\, dx)\mathbf{e}_3 = 0, \end{aligned}$$

pues $(xy')' = y' + xy''$ e integrando

$$x_1 y'(x_1) - x_0 y'(x_0) = y(x_1) - y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} xy''\, dx. \quad \blacksquare$$

La catenaria y el electromagnetismo.- En presencia de un campo gravitatorio F constante, la trayectoria de una masa puntual m, que sigue la ley de Newton $(mv)' = ma = F$, es una parábola (ver la pág.46). Veamos que ocurre en presencia de un campo eléctrico constante.

En el marco de la Teoría de la Relatividad, la Ley de Lorentz (ver pág.930) establece que en presencia de un campo electromagnético (E, B), una partícula de carga q y masa en reposo m se mueve con una velocidad $\dot\sigma$, de modo que para $v = |\dot\sigma|$, $M = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ la masa aparente y c la velocidad de la luz, el *momento* $p = M\dot\sigma$ verifica

$$\dot p = q(E + \frac{\dot\sigma}{c} \times B).$$

En el caso particular de un campo eléctrico E constante y $B = 0$ (que son soluciones de la Ecuación de Maxwell, ver pág.932), la partícula se mueve en un plano y podemos simplificar el problema. Para $E = (0, 1)$ y $B = 0$, buscamos la solución $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ de esa ecuación $\dot p = qE$, en el plano xy, que en $t = 0$ pasa por el origen con velocidad $(\dot x(0), \dot y(0)) = (u, 0)$. Es decir para las componentes del momento $p_1 = M\dot x$ y $p_2 = M\dot y$

$$\dot p_1 = 0, \qquad \dot p_2 = q, \qquad x(0) = y(0) = \dot y(0) = 0, \qquad \dot x(0) = u,$$

por tanto tendremos que $p_1 = M\dot x$ es constante y vale $k = M(0)u = mu/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ y $p_2 = M\dot y = qt$, por tanto como $v^2 = \dot x^2 + \dot y^2$, $M^2v^2 = k^2 + q^2t^2$ y por la definición de M y esto (y una simple cuenta para la segunda igualdad)

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{m^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = M^2\frac{v^2}{c^2} + m^2 \\ &= \frac{k^2 + q^2t^2}{c^2} + m^2 = \frac{c^2m^2 + k^2 + q^2t^2}{c^2} \end{aligned}$$

y por lo tanto para $L = \sqrt{k^2 + c^2m^2}$

$$\dot x = \frac{k}{M} = \frac{ck}{\sqrt{L^2 + q^2t^2}} \qquad \dot y = \frac{qt}{M} = \frac{cqt}{\sqrt{L^2 + q^2t^2}},$$

e integrando, teniendo en cuenta que $x(0) = y(0) = 0$, obtenemos

$$x(t) = \frac{ck}{q}(\log(q^2t + q\sqrt{L^2 + q^2t^2}) - \log(qL) = \frac{ck}{q}\log\frac{qt + \sqrt{L^2 + q^2t^2}}{L},$$
$$y(t) = \frac{c}{q}(\sqrt{L^2 + q^2t^2} - L)$$

y para $K = q/kc$, $(Kky+L)^2 = L^2+q^2t^2$, por tanto $qt = \sqrt{(Kky+L)^2 - L^2}$ y la curva en términos de xy es

$$Kx = \log \frac{\sqrt{(Kky+L)^2 - L^2} + kKy + L}{L},$$

y aplicando la exponencial

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{Kx} L = \sqrt{(Kky+L)^2 - L^2} + kKy + L \qquad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & (\mathrm{e}^{Kx} L - (kKy+L))^2 = (Kky+L)^2 - L^2 \qquad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & (\mathrm{e}^{2Kx} L^2 + L^2 = 2\,\mathrm{e}^{Kx} L(kKy+L) \qquad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & kKy = L(\cosh(Kx) - 1) \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{L}{kK}(\cosh(Kx) - 1) \end{aligned}$$

que es una catenaria dilatada en el eje y por $L/k = c/u$. Veamos a que curva converge cuando la velocidad de la luz $c \to \infty$, para ello observemos que el desarrollo en serie de

$$\begin{aligned} \cosh(Kx) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{Kx} + \mathrm{e}^{-Kx}) &= \frac{1}{2}\left(\sum \frac{(Kx)^n}{n!} + \sum \frac{(-Kx)^n}{n!}\right) \\ &= 1 + \frac{K^2x^2}{2} + \frac{K^4x^4}{4!} + \cdots, \end{aligned}$$

por tanto como $L/k = c/u$ y $cK = q/k$

$$\begin{aligned} y = \frac{L}{kK}(\cosh(Kx) - 1) &= \frac{c}{uK}(\frac{K^2x^2}{2} + \frac{K^4x^4}{4!} + \cdots) \\ = \frac{cK}{u}(\frac{x^2}{2} + \frac{K^2x^4}{4!} + \cdots) &= \frac{q}{uk}(\frac{x^2}{2} + \frac{K^2x^4}{4!} + \cdots) \end{aligned}$$

y como $k \to mu$ y $K \to 0$, el resultado es la parábola

$$y = \frac{qx^2}{2mu^2},$$

que es la que corresponde a la ecuación $\ddot{x} = 0$ y $m\ddot{y} = q$ con las mismas condiciones iniciales.

1.10. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.4.1.- (a) Demostrar que existe una biyección entre campos de vectores $F : U \longrightarrow \mathcal{E}$ de clase k y campos de vectores tangentes $\{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : p \in U\}$ de clase k, que verifica:

(i) Si a F le corresponde $\{D_p\}$ y a G $\{E_p\}$, entonces a $F+G$ le corresponde $\{D_p + E_p\}$.

(ii) Si a F le corresponde $\{D_p\}$ y $f \in \mathcal{C}^k(U)$, entonces a fF le corresponde $\{f(p)D_p\}$.

(b) Demostrar que $\{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : \ p \in U\}$ es un campo de vectores tangentes de clase k si y sólo si la aplicación $\sigma : U \longrightarrow T(U)$, $\sigma(p) = D_p$ es una sección de π, de clase k.

Demostración. (a) Consideremos un sistema de coordenadas lineales x_i correspondientes a una base e_i de $\mathcal{E}$.

Para cada $F : U \longrightarrow \mathcal{E}$ consideramos las funciones $f_i = x_i \circ F$, entonces para cada $p \in U$ tenemos el vector de $\mathcal{E}$

$$F(p) = f_1(p)e_1 + \cdots + f_n(p)e_n,$$

el cual corresponde por el isomorfismo canónico $\mathcal{E} \longrightarrow T_p(\mathcal{E})$, al vector de $T_p(\mathcal{E})$

$$D_p = f_1(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)_p + \cdots + f_n(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)_p.$$

Ahora F es de clase k si y sólo si las $f_i \in \mathcal{C}^k(U)$ y es fácil comprobar que los D_p satisfacen la condición de la definición (1.4.1).

Recíprocamente si para cada $p \in U$ tenemos un vector

$$D_p = f_1(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)_p + \cdots + f_n(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)_p \in T_p(\mathcal{E}),$$

verificando la condición de (1.4.1), entonces como $D_p x_i = f_i(p)$ tendremos que $f_i \in \mathcal{C}^k(U)$ y la aplicación $F\colon U \longrightarrow \mathcal{E}$, $F(p) = f_1(p)e_1 + \cdots + f_n(p)e_n$, es de clase k.

Que esta correspondencia tiene las propiedades (i) y (ii) es evidente.

(b) Es fácil comprobar que si a los $\{D_p\}$ les corresponde F por la parte (a), entonces

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\ \sigma\ } & T(U) \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & U \times E \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} p & \to & \sigma(p) = D_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ p & \to & (p, F(p)) \end{array}$$

y σ es de clase k si y sólo si F es de clase k.

Ejercicio 1.4.2.- Demostrar que entre los conjuntos de vectores

$$\{D_p^F \in T_{F(p)}(\mathcal{E}_1) : \ p \in V\},$$

con la propiedad de que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, la función

$$p \in V \longrightarrow D_p^F f \in \mathbb{R},$$

está en $\mathcal{C}^\infty(V)$ y el espacio $\mathcal{D}^F(U)$, existe una biyección verificando las siguientes condiciones:

(i) Si D^F, $E^F \in \mathcal{D}^F(U)$, entonces para cada $p \in V$

$$(D^F + E^F)_p = D_p^F + E_p^F.$$

(ii) Si $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, entonces para cada $p \in V$

$$(f \cdot D^F)_p = f(p) \cdot D^F_p.$$

Indicación.- Consideremos $D^F_p f = D^F f(p)$. ∎

Ejercicio 1.4.3.- Sea $F\colon V \subset \mathcal{E}_2 \to U \subset \mathcal{E}_1$, diferenciable.

(a) Demostrar que para cada $D \in \mathcal{D}(V)$ y $p \in V$

$$(F_* D)_p = F_* D_p.$$

(b) Demostrar que para cada campo $D \in \mathcal{D}(U)$ y $p \in V$

$$[F^* D]_p = D_{F(p)},$$

y que $\mathcal{D}^F(U)$ es un módulo libre con base

$$F^* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

para cada sistema de coordenadas lineales x_i en U.

(c) Demostrar que $\{D^F_p \in T_{F(p)}(\mathcal{E}_1) :\ p \in V\}$, satisface las condiciones de (a) —y por tanto define un campo a soporte $D^F \in \mathcal{D}^F(U)$— si y sólo si

$$\sigma\colon V \longrightarrow T(U)\ , \qquad \sigma(p) = D^F_p,$$

es una aplicación de clase ∞, tal que $\pi \circ \sigma = F$.

Solución. (b) Basta demostrar punto a punto la igualdad

$$D^F = \sum_{i=1}^{n} (D^F x_i) F^* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

(c) Consideremos la aplicación $H\colon V \to \mathcal{E}_1$, definida para cada $p \in V$ como el vector $H(p) \in \mathcal{E}_1$, correspondiente por el isomorfismo canónico $T_{F(p)}(\mathcal{E}_1) \to \mathcal{E}_1$, a D^F_p. Es decir que si $D^F_p = \sum h_i(p)[\partial/\partial x_i]_{F(p)}$, entonces $H(p) = \sum h_i(p) e_i$ —para e_i la base dual de x_i—. En estos términos tenemos que

$$\{D^F_p \in T_{F(p)}(\mathcal{E}_1) :\ p \in V\},$$

satisface las condiciones de *(a)* si y sólo si las $h_i \in \mathcal{C}^\infty(V)$, es decir si y sólo si H es de clase ∞, ahora bien esto equivale a que la aplicación $\sigma(p) = D^F_p$ sea de clase ∞, pues

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\ \sigma\ } & T(U) \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & U \times \mathcal{E}_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} p & \to & \sigma(p) = D^F_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(p) & \to & (F(p), H(p)) \end{array}$$

∎

Ejercicio 1.5.3.- Demostrar que para $p \in U$ y $d_p f \neq 0$, el hiperplano

$$H = \{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : \ d_p f(D_p) = 0\},$$

es tangente a la hipersuperficie $S = \{x : f(x) = f(p)\}$, en el sentido de que coincide con el conjunto de vectores

$$\{D_p \in T_p(\mathcal{E}) : \ \exists X : I \to U, X(0) = p, X(t) \in S, X_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0 = D_p\}.$$

Solución. Es fácil demostrar que este conjunto está en el hiperplano. Recíprocamente supongamos que $p = (p_i) \in U$ y supongamos que $\partial f(p)/\partial x_n \neq 0$, entonces por el teorema de la función implícita existe una función g definida en un entorno V de $(p_1, \ldots, p_{n-1})$, tal que $g(p_1, \ldots, p_{n-1}) = p_n$ y

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_{n-1})) = f(p),$$

para cada $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in V$. Consideremos cualquier $D_p = \sum a_i \partial_{ip} \in H$ y la curva

$$x_1(t) = p_1 + ta_1, \ldots, x_{n-1}(t) = p_{n-1} + ta_{n-1},$$
$$x_n(t) = g[x_1(t), \ldots, x_{n-1}(t)],$$

para la que $X(0) = p$ y $f[X(t)] = f(p)$ y derivando esta ecuación en $t = 0$ y teniendo en cuenta que $D_p f = 0$ y $x_i'(0) = a_i$ para $i = 1, \ldots, n-1$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) x_i'(0) = 0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) a_i \quad \Rightarrow \quad x_n'(0) = a_n,$$

lo cual implica que

$$X_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0 = D_p. \ \blacksquare$$

Ejercicio 1.6.5.- Consideremos un producto interior $< \cdot, \cdot >$ en $\mathcal{E}$, una base ortonormal e_i y el sistema de coordenadas lineales x_i correspondientes a esta base. Demostrar que:

(i) Para toda $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$

$$\operatorname{grad} f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{D}_k(U).$$

(ii) Que el campo $D = \operatorname{grad} f$, es un campo perpendicular a las superficies de nivel de f.

(iii) Que si $U \subset \mathbb{R}^2$, entonces el campo $\operatorname{grad} f$ define en cada punto x el vector D_x el cual indica la dirección y sentido de máxima pendiente de la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

Demostración. (b) Por el Ejercicio (1.5.3), $E_x \in T_x(\mathcal{E})$ es tangente a la superficie de nivel $\{f = f(p)\}$ si y sólo si, para $D = \operatorname{grad} f$, se tiene que

$$< D_x, E_x > = d_x f(E_x) = 0.$$

(c) La pendiente de la gráfica de f en el punto x, relativa a la dirección v_x es

$$v_x f = d_x f(v_x) = < D_x, v_x >,$$

la cual es máxima, entre vectores v_x de igual módulo, cuando v_x tiene la misma dirección y sentido que D_x.

Ejercicio 1.7.5.- Dados $a, c \in \mathbb{R}$, encontrar la solución de $yz_x = xz_y$ que satisface $cz = (x-y)^2$ cuando $x + y = a$.

Indicación. Buscamos una función f tal que $Df = 0$, para $D = y\partial_x - x\partial_y$ que es el campo de los giros, por tanto como $D\rho = 0$, para $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ se tiene que $D = (D\theta)\partial_\theta$, por lo tanto $Df = 0$ sii $f_\theta = 0$, es decir $f = f(\rho)$. Ahora queremos que su gráfica $z = f(\rho)$ contenga a la curva del enunciado, para ello observemos que en $x+y = a$, $\rho^2 = x^2+y^2 = a^2 - 2xy$, por tanto $-2xy = \rho^2 - a^2$ y $(x-y)^2 = \rho^2 - 2xy = 2\rho^2 - a^2$, por lo tanto la solución es

$$z = \frac{2\rho^2 - a^2}{c}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 1.7.6.- (a) Encontrar dos integrales primeras del campo de $\mathbb{R}^3$

$$D = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1+z^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

(b) Encontrar una integral primera común a los campos de $\mathbb{R}^3$

$$D = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad E = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + (x^2+y^2-1-z^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Solución. (a) Consideremos la 1–forma incidente

$$xdx + ydy = \rho d\rho,$$

para $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Ahora consideremos otra 1–forma incidente

$$\frac{1}{x}dy - \frac{1}{(1+z^2)}dz = \frac{1}{\sqrt{\rho^2-y^2}}dy - \frac{1}{1+z^2}dz,$$

y como $D\rho = 0$, también es incidente con D la 1–forma

$$d\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{y}{\rho} - \arctan z\right) = d(\theta - \arctan z),$$

por tanto la función en coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z), $\theta - \arctan z$ es otra integral primera.

(b) Considerar el sistema de coordenadas (ρ, θ, z). $\blacksquare$

Ejercicio 1.8.2.- Encontrar la curva integral —en forma implícita—, del campo de $\mathbb{R}^3$

$$D = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1+z^2)\frac{\partial}{\partial z},$$

que pasa por $(1, 0, 0)$.

Solución. En el ejercicio (1.7.6) encontramos dos integrales primeras de este campo en las coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z),

$$x^2 + y^2, \qquad \theta - \arctan z,$$

por tanto nuestra curva solución en forma implícita satisface

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad z = \tan\theta = y/x. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 1.9.1.- Encontrar la curva[9] cuya tangente en cada punto P corta al eje y en un punto Q tal que $PQ = L$ y pasa por $(L, 0)$.

Indicación.

[9] Tal curva se denomina *tractriz*.

Supondremos que $L = 1$, el caso arbitrario se obtiene haciendo una homotecia de razón L. Del enunciado se sigue que $y(1) = 0$, como además

$$y' = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

la solución se obtiene integrando

$$y(x) = \int_x^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} - \sqrt{1-x^2}. \quad \blacksquare$$

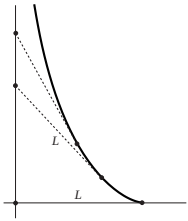


Figura 1.20. Tractriz

Ejercicio 1.9.2.- Encontrar la ecuación de las curvas que en cada punto la normal determina un segmento con los ejes coordenados, cuyo punto medio es el dado.

Indicación. El ejemplo de la pág.40 es igual pero para la tangente y se llega a la ecuación $y' = -y/x$. En nuestro caso la pendiente es la perpendicular, por tanto $y' = x/y$, es decir $(y^2)' = 2x = (x^2)'$ y la solución son las hipérbolas $y^2 - x^2 = cte$. $\blacksquare$

Ejercicio 1.9.3.- Encontrar la ecuación de las curvas que en cada punto P la normal corta al eje x en un punto A tal que $OP = PA$.

Indicación. Como OAP es un triángulo isosceles, tendremos que si $OP = (x, y)$, $AP = (-x, y)$ y es la dirección de la normal, por tanto la de la tangente (y, x), es decir que $y' = x/y$ que es la del ejercicio anterior 1.9.2 y sus soluciones son las hipérbolas $y^2 - x^2 = cte$. $\blacksquare$

Ejercicio 1.9.4.- Encontrar las curvas del semiplano $x > 0$, que para cada punto suyo P, el área del triángulo que forman la tangente, el eje y y la paralela al eje x por P, es proporcional al área de la región limitada por la curva, la tangente y el eje y (contando area positiva si la curva está por debajo de la tangente y negativa en caso contrario).

Demostración. Como la tangente corta al eje y, no es vertical y la curva vamos a poder expresarla como función de x, $y = y(x)$. Si la pendiente de la tangente en x es $y' = b/x$, tendremos que $b = xy'$ es uno de los lados del triángulo que tiene área $A = xb/2 = x^2y'/2$. Ahora si llamamos B al otro área y $C = \int_0^x y(x)dx$, tendremos que $A + B + C = xy$ y si existe $k > 0$, tal que $B = kA$, tendremos para $r = (k+1)/2$ (y derivando)

$$xy = (k+1)A + C = rx^2y' + \int_0^x y(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$y + xy' = 2rxy' + rx^2y'' + y \quad \Rightarrow \quad y'(1-2r) = rxy'',$$

y si llamamos $R = (1-2r)/r = -2k/(k+1)$, $(\log y' - R\log x)' = 0$, por tanto $y'x^{-R}$ es constante y la solución es

$$\begin{aligned} &\text{cte}\cdot\log x, && \text{si} \quad R = -1 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1 \\ &\text{cte}\cdot x^p, && \text{si} \quad R \neq -1, p = R+1 = \frac{1-k}{1+k} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1-p}{1+p}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Ejercicio 1.9.5.- Encontrar las curvas en el semiplano $y > 0$, tales que para cada punto P su proyección A en el eje x se proyecta en el punto B de la normal en P a la curva, de modo que PB sea de longitud constante.

Indicación. Si encontramos las curvas solución para la constante 1, la homotecia de razón k nos dará la solución para $PB = k$. Por otra parte en cada punto $P = (x, y)$ no hay ninguna normal que cumpla el enunciado si $y < 1$, pues PAB forman un triángulo rectángulo con hipotenusa $PA = y$. Para $y > 1$ hay dos normales (simétricas respecto de la vertical por P) que cumplen el enunciado, que corresponden a las pendientes $y' = \pm AB = \pm\sqrt{y^2-1}$, por tanto tenemos dos posibles ecuaciones

$$dx + \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = 0, \qquad dx - \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = 0,$$

las cuales son exactas, diferenciales de $x \pm \log(y + \sqrt{y^2-1})$, por lo tanto las dos soluciones son para cada constante a

$$y + \sqrt{y^2-1} = \mathrm{e}^{\pm x+a} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - 1 = (\mathrm{e}^{\pm x+a} - y)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\mathrm{e}^{\pm x+a}}{2} + \frac{1}{2\,\mathrm{e}^{\pm x+a}},$$

que es una única familia de curvas traslación en la dirección del eje x de $y = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2 = \cosh x$ (ver la catenaria en la pág.54). ∎

Ejercicio 1.9.7.- Si es cierto[10] que en una economía la velocidad de disminución del número de personas $y(x)$, con un salario de por lo menos x euros, es directamente proporcional al número de personas e inversamente proporcional a su salario mínimo, obténgase la expresión de y en términos de x llamada **ley de Pareto**.

Solución.- Sea $y(x)$ el número de personas con salario $\geq x$, entonces $y'(x) = ky(x)/x$, por tanto $y(x) = ax^k$. ∎

Ejercicio 1.9.8.- La ley experimental de Lambert[11] establece que las láminas delgadas de un material transparente absorben la luz que incide en ellas de forma proporcional a la intensidad de la luz incidente y al ancho de la lámina que atraviesa. Exprésese esta ley dando la fórmula que da la intensidad de luz que sale de un medio de ancho L.

Solución.- Sea $y(x)$ la intensidad de luz en el ancho x, contando desde la superficie del material. Entonces $y(x) = y(x+\epsilon) + A(x, x+\epsilon)$, donde $A(x, x+\epsilon) = ky(x)\epsilon$ es la intensidad absorbida por la parte del material entre los anchos x y $x+\epsilon$, por tanto $y'(x) = -ky(x)$ y la solución es $y(L) = y(0)\,\mathrm{e}^{-Lx}$. ∎

Ejercicio 1.9.10.- Una masa se desplaza infinitesimalmente del punto mas alto de una esfera lisa de radio L y empieza a resbalar sin rozamiento ni rotación. ¿En que punto y con que velocidad se separa de la esfera?

Solución.- Las ecuaciones del movimiento de la masa son las mismas que las del péndulo mientras la masa se mantenga sobre la esfera, es decir

[10] Como pensaba el economista Vilfredo Pareto

[11] Lambert, Johann Heinrich (*1728–1777*), fue un matemático, físico, astrónomo y filósofo alemán de origen francés.

$$L\theta''(t) = -g\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad -L\theta'(t)^2 = g\cos\theta + F,$$

y buscamos el punto en el que $F = 0$, es decir $L^2\theta'(t)^2/2 = -gL\cos\theta/2$, de la curva integral de condiciones iniciales (π, ϵ) con $\epsilon \sim 0$ —observemos que la solución correspondiente a $\epsilon = 0$ es constante, la masa se queda sobre la esfera sin moverse y se mueve si la desplazamos infinitesimalmente con velocidad $\epsilon \sim 0$—. Por tanto nuestra curva está en $h = h(\pi, \epsilon)$, es decir

$$\frac{L^2\theta'^2}{2} - gL\cos\theta = L^2\epsilon^2/2 + gL,$$

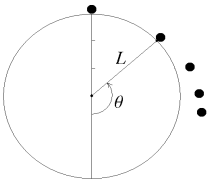


Figura 1.21.

por tanto

$$-3gL\cos\theta/2 = L^2\epsilon^2/2 + gL,$$

y haciendo $\epsilon \to 0$, tenemos $\cos\theta = -2/3$. La velocidad en ese punto está dada por $z = \sqrt{2gL/3}$. ∎

Ejercicio 1.9.11.- Justifíquese por qué un reloj de péndulo atrasa si lo llevamos del polo al ecuador y estímese la proporción de abultamiento de la Tierra en esos puntos, si un mismo intervalo temporal (medido en ambos puntos con otro reloj) en uno de los puntos el reloj de péndulo lo mide de $1h$, $10'$ y $52''$ y en el otro de $1h$, $10'$ y $38''$.

Solución.- Si R_i es la distancia desde cada punto (uno en el polo y el otro en el ecuador), al centro de la Tierra y los períodos del péndulo son respectivamente T_i, tendremos por la fórmula (1.12), que

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{1h + 10' + 38''}{1h + 10' + 52''} = \frac{2119}{2126},$$

pues si el reloj después de m ciclos de péndulo marca $1h + 10' + 38''$ y después de n marca $1h + 10' + 52''$, tendremos que $(1h + 10' + 38'')/m = (1h + 10' + 52'')/n$, pues la aguja del reloj se mueve proporcionalmente al movimiento del péndulo; y como tardan el mismo tiempo real en hacer esos ciclos (de periodos T_1 y T_2), tendremos la segunda igualdad. ∎

Ejercicio 1.9.12.- Nos movemos en un columpio de longitud L, con el asiento a distancia r del suelo (que está horizontal). Salimos con velocidad nula y ángulo α con la vertical, pasamos el punto más bajo un ángulo β y nos tiramos en marcha dejándonos caer por la gravedad hasta llegar al suelo. Calcular el tiempo que pasamos en el aire y la distancia en el suelo desde el pie del

columpio al lugar de llegada; demostrar que esta distancia es independiente de la gravedad y que la velocidad con que llegamos al suelo es independiente de β. Dar su valor.

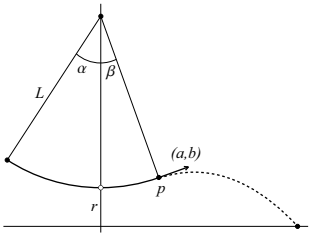


Figura 1.22. Columpio

Solución.- Del ejemplo del péndulo pág.48, sabemos que nuestra velocidad $v(\theta)$, mientras estamos en el columpio satisface

$$\frac{v(\theta)^2}{2} - gL\cos\theta = cte = \frac{v^2(\alpha)}{2} - gL\cos\alpha = -gL\cos\alpha,$$

por tanto la velocidad con la que salimos del columpio es

$$(a,b) = v(\beta)(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta) = \sqrt{2gL(\cos\beta - \cos\alpha)}(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta),$$

y el punto del que salimos es $p = (p_1, p_2) = (L\operatorname{sen}\beta, L + r - L\cos\beta)$, a partir del cual seguimos una parábola, de ecuaciones parametrizadas por el tiempo,

$$x(t) = p_1 + ta, \quad y(t) = p_2 + tb - \frac{t^2}{2}g,$$

ahora poniendo $y = 0$, despejamos el tiempo pedido t en la segunda ecuación y puesto este valor en la primera encontramos la distancia pedida. Observemos que p_1 no depende de g, que a es proporcional a $\sqrt{g}$ mientras que t es inversamente proporcional a $\sqrt{g}$. En cuanto a la velocidad tenemos por la segunda ecuación anterior que $2yg = 2p_2g + 2tbg - t^2g^2$, por tanto

$$x'^2 + y'^2 = a^2 + (b - tg)^2 = a^2 + b^2 - 2tgb + t^2g^2 = a^2 + b^2 + 2p_2g - 2yg,$$

y para $y = 0$ la velocidad pedida es independiente de β y vale

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 2p_2g} = \sqrt{2g(L + r) - 2gL\cos\alpha}. \quad \blacksquare$$

1.11. Bibliografía y comentarios

Los libros consultados en la elaboración de este tema han sido:

Boothby, W,M.: "*An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*". Ac. Press, 1975.

Collatz, L.: "*Differential Equations. An introduction with applications*". John Wiley and Sons, 1986.

Crampin, M. and Pirani, F.A.E.: "*Applicable Differential Geometry*". Cambridge University Press, 1988.

Spiegel, M.R.: "*Ecuaciones diferenciales aplicadas*". Ed. Prentice Hall internacional, 1983.

Los creadores del cálculo diferencial fueron Isaac Newton y Leibnitz, para los que la derivada de una función era el cociente de la diferencial de la función y la diferencial de su argumento —el nombre de *diferencial* de una función f, así como su notación df es de Leibnitz, Isaac Newton la llamaba *momento* de la función—. El tratamiento que da Leibnitz del tema nos ha llegado a través de unas lecciones de Análisis de L'Hopital, en las cuales se encuentra un tratamiento de las ecuaciones diferenciales en curvas muy superior al que tratan los libros en la actualidad, hasta el punto que introduce conceptos como el de la diferencial covariante, que los libros de análisis han perdido y sólo se encuentra en libros de Geometría.

Fin del Tema 1

Tema 2

Teoremas fundamentales de Ecuaciones diferenciales

2.1. Grupo uniparamétrico

A lo largo del tema, denotaremos con $\mathcal{E}$ un espacio vectorial real de dimensión n, en el que consideraremos un sistema de coordenadas lineales x_i, correspondientes a una base e_i.

Definición. Sea U un abierto de $\mathcal{E}$, diremos que una aplicación

$$X : \mathbb{R} \times U \longrightarrow U,$$

es un *flujo* ó un *grupo uniparamétrico* si se tienen las siguientes propiedades:

a) Para todo $p \in U$, $X(0, p) = p$.
b) Para todo $p \in U$ y $t, s \in \mathbb{R}$,

$$X(t, X(s, p)) = X(t + s, p).$$

Definición. Diremos que un grupo uniparamétrico X es de clase k si X es de clase k y las $\partial X_i/\partial t$ son de clase k en $\mathbb{R} \times U$, para $X_i = x_i \circ X$ y x_i un sistema de coordenadas lineales en $\mathcal{E}$.

Si X es un grupo uniparamétrico en U de clase k, podemos definir las siguientes aplicaciones de clase k asociadas a él:

Para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $p \in U$

$$X_t \colon U \longrightarrow U, \qquad X_p \colon \mathbb{R} \longrightarrow U,$$

tales que $X_t(p) = X(t,p)$ para todo $p \in U$ y $X_p(t) = X(t,p)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Nota 2.1 Observemos que cada $X_t \colon U \longrightarrow U$ es realmente un difeomorfismo de clase k, para cada $t \in \mathbb{R}$, pues tiene inversa que es de clase k, ya que es X_{-t}. Además observemos que en términos de las aplicaciones X_t, las propiedades (a) y (b) de grupo uniparamétrico se expresan de la forma

$$X_0 = id, \qquad X_{t+s} = X_t \circ X_s,$$

por lo que que el conjunto

$$\{X_t, t \in \mathbb{R}\},$$

es un grupo de difeomorfismos de clase k que opera sobre U, y que esta forma de operar tiene una simple interpretación. Para cada $t \in \mathbb{R}$ y para cada $p \in U$, $X_t(p)$ es el punto de U al que llega p en el tiempo t.

Entenderemos por grupo uniparamétrico indistintamente a X, al grupo de difeomorfismos X_t con $t \in \mathbb{R}$, o a la familia de curvas X_p con $p \in U$.

Veamos unos ejemplos simples de flujos de clase ∞ en $\mathbb{R}^n$:

Ejemplo 2.1.1 Las traslaciones.- *Sea $a \in \mathbb{R}^n$ fijo, definimos para cada $t \in \mathbb{R}$,*

$$X_t \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad X_t(x) = x + ta.$$

Ejemplo 2.1.2 Las homotecias.- *Para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos*

$$X_t \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad X_t(x) = \mathrm{e}^t\, x.$$

Ejemplo 2.1.3 Los giros en $\mathbb{R}^2$.- *Para cada $t \in \mathbb{R}$, sea*

$$X_t \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad X_t(x,y) = (x\cos t - y \operatorname{sen} t,\ x \operatorname{sen} t + y \cos t).$$

Veamos ahora el concepto localmente.

Definición. Sea U un abierto de $\mathcal{E}$ y sea $\mathcal{W}$ un abierto de $\mathbb{R} \times U$ conteniendo a $\{0\} \times U$, tal que para cada $p \in U$, el conjunto

$$I(p) = \{t \in \mathbb{R} : \ (t,p) \in \mathcal{W}\},$$

es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ conteniendo al origen. Diremos que una aplicación

$$X \colon \mathcal{W} \longrightarrow U,$$

es un *grupo uniparamétrico local* si se verifica que:

a) Para cada $p \in U$, $X(0,p) = p$.

b) Si $t \in I(p)$ y $q = X(t,p)$, entonces $I(p) = I(q) + t$, es decir

$$s \in I(q) \Leftrightarrow t + s \in I(p),$$

y se tiene que

$$X(s+t,p) = X(s, X(t,p)).$$

Diremos que el grupo uniparamétrico local X es de clase k si X es de clase k y las $\partial X_i/\partial t$ son de clase k en $\mathcal{W}$, para $X_i = x_i \circ X$.

Si denotamos

$$I = \cup\{I(p) : \ p \in U\} = \pi_1(\mathcal{W}),$$

para $\pi_1(t,x) = t$, y para cada $t \in I$ consideramos los abiertos de U y las aplicaciones

$$U_t = \{p \in U : \ (t,p) \in \mathcal{W}\}, \qquad X_t \colon U_t \longrightarrow U_{-t}, \quad X_t(p) = X(t,p),$$

entonces (a) y (b) se transforman respectivamente en

a) $X_0 = id \colon U \longrightarrow U$.

b) $U_{t+s} = X_s(U_t)$ y en ese dominio $X_{t+s} = X_t \circ X_s$.

Veremos a continuación que todo grupo uniparamétrico en U define un campo tangente en U. Tal campo nos da en cada punto un vector del espacio tangente que representa la velocidad del movimiento en ese punto. Por otra parte veremos mas adelante que estos vectores juntos, es decir el campo tangente, producen un movimiento en el abierto U, es decir definen un grupo uniparamétrico.

Teorema del generador infinitesimal de un grupo unip. 2.2
Sea X un grupo uniparamétrico local de clase k. Para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $p \in U$ definimos

$$(Df)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f[X(t,p)] - f(p)}{t},$$

entonces $D \in \mathcal{D}_k(U)$ y lo llamaremos el generador infinitesimal de X.

Demostración.- Considerando un sistema de coordenadas lineales x_i en $\mathcal{E}$ y aplicando la regla de la cadena, se tiene que $Df \in \mathcal{C}^k(U)$, pues

$$Df(p) = \frac{\partial f \circ X}{\partial t}(0,p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\frac{\partial X_i}{\partial t}(0,p),$$

y que D es una derivación se sigue de serlo la $\partial/\partial t$. ∎

Nota 2.3 i) Observemos que para cada $p \in U$

$$X_p \colon I(p) \longrightarrow U \ , \quad X_p(t) = X(t,p),$$

es la curva integral de D pasando por p en el instante 0, es decir

$$X_p(0) = p \ , \quad X_{p*}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t = D_{X_p(t)}.$$

ii) Observemos que para cada $x \in U$ y cada $t \in \mathbb{R}$,

$$Df \circ X_p = (f \circ X_p)'.$$

Proposición 2.4 *Todo flujo local X_t, deja invariante a su generador infinitesimal D, es decir, para todo $t \in I$ y $p \in U_t$,*

$$X_{t*}D_p = D_{X(t,p)}.$$

Demostración.- Sea $p \in U_t$, $q = X_t(p)$ y $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$, entonces

$$\begin{aligned}[X_{t*}D_p]g &= D_p(g \circ X_t) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{[g \circ X_t \circ X_s](p) - [g \circ X_t](p)]}{s} \\ &= (Dg)(q) = D_q g. \quad ∎\end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.1 Encontrar los generadores infinitesimales de las traslaciones, homotecias y giros en $\mathbb{R}^2$.

2.2. Existencia de solución

A lo largo de la lección U será un abierto de un espacio vectorial $\mathcal{E}$ de dimensión n, en el que hemos elegido una base e_i y su sistema de coordenadas lineales correspondiente x_i. Con esta elección $\mathcal{E}$ se identifica con $\mathbb{R}^n$.

Sea $D \in \mathcal{D}_0(U)$ un campo tangente continuo, K un compacto de U, $p \in \overset{\circ}{K}$ y $t_0 \in \mathbb{R}$. Queremos saber si existe alguna curva integral de D pasando por p en el instante t_0, es decir si existe algún intervalo real $I = (t_0 - a_0, t_0 + a_0)$, y una curva $X\colon I \longrightarrow U$ de clase 1, tal que $X(t_0) = p$ y para todo $t \in I$

$$X_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_t = D_{X(t)},$$

ó equivalentemente para $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $X = (X_i)$ y el campo tangente $D = \sum f_i \partial/\partial x_i$, si existen funciones $X_1, \ldots, X_n\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, satisfaciendo el sistema de ecuaciones diferenciales

$$X_i(t_0) = p_i \ , \quad X_i'(t) = f_i[X_1(t), \ldots, X_n(t)],$$

para $i = 1, \ldots, n$, ó en forma vectorial para

$$F = (f_1, \ldots, f_n) \ , \quad X' = (X_1', \ldots, X_n'),$$

si existe $X\colon I \longrightarrow U$, tal que

$$X(t_0) = p \ , \quad X'(t) = F[X(t)],$$

ó en forma integral

$$X(t) = p + \int_{t_0}^{t} F[X(s)]ds,$$

entendiendo que la integral de una función vectorial es el vector de las integrales.

A lo largo de la lección consideraremos en $\mathbb{R}^n$ una norma cualquiera.

Lema 2.5 *Sea K un compacto en un abierto U de $\mathbb{R}^n$, $p \in \overset{\circ}{K}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ y $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Entonces existe $I = (t_0 - a_0, t_0 + a_0)$, con $a_0 > 0$, tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $Z\colon I \longrightarrow U$, diferenciable salvo en un número finito de puntos, tal que $Z(I) \subset K$, $Z(t_0) = p$ y salvo en el número finito de puntos*

$$\| Z'(t) - F[Z(t)] \| \leq \epsilon.$$

Demostración. Como $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua es uniformemente continua en K. Dado $\epsilon > 0$ consideremos un $\delta > 0$ tal que si $x, y \in K$ y $\| x - y \| \leq \delta$ entonces

$$\| F(x) - F(y) \| \leq \epsilon.$$

Sean $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset K$, $M = \sup\{\| F(x) \| : x \in K\}$, $a_0 = r/M$, $I = (t_0 - a_0, t_0 + a_0)$ y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $r/m \leq \delta$.

Ahora para cada $i \in \mathbb{Z},$, con $-m \leq i \leq m$, definimos $t_i = t_0 + (i/m)a_0$ y partiendo de $Z(t_0) = p$, definimos para $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$Z(t) = \begin{cases} Z(t_i) + (t - t_i)F[Z(t_i)] & \text{si } i \geq 0 \\ Z(t_{i+1}) + (t - t_{i+1})F[Z(t_{i+1})] & \text{si } i \leq -1, \end{cases}$$

para lo cual basta demostrar que $Z(t_i) \in B(p, r)$, y esto es así porque

$$\begin{aligned} \| Z(t_1) - p \| &= \| Z(t_1) - Z(t_0) \| \\ &\leq M\frac{a_0}{m} = \frac{r}{m} < r, \\ \| Z(t_{-1}) - p \| &\leq M\frac{a_0}{m} < r, \end{aligned}$$

y por inducción

$$\| Z(t_i) - p \| \leq r\frac{| i |}{m} < r.$$

Para esta Z se tiene

$$\| Z(t) - Z(s) \| \leq M \mid t - s \mid, \tag{2.1}$$

para $t, s \in I$. De donde se sigue, tomando $s = t_0$, que $\| Z(t) - p \| \leq Ma_0 = r$ y por tanto que $Z(I) \subset K$. Además si $t \in I$ y $t \neq t_i$ entonces t está en algún (t_i, t_{i+1}) y por tanto

$$\| Z'(t) - F[Z(t)] \| = \| F[Z(t_i)] - F[Z(t)] \| \leq \epsilon,$$

pues $\| Z(t_i) - Z(t) \| \leq M(a_0/m) \leq r/m \leq \delta$. ∎

Como consecuencia podemos asegurar la existencia de curvas integrales de campos continuos.

Teorema de Existencia de Cauchy–Peano 2.6 *Sea $D \in \mathcal{D}_0(U)$ un campo continuo, $p \in U$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces existe $a_0 > 0$ y*

$$X : I = (t_0 - a_0, t_0 + a_0) \longrightarrow U,$$

de clase 1, *solución de D pasando por p en el instante t_0.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ apliquemos el lema anterior para $\epsilon = 1/n$. Tendremos así que existe una sucesión de curvas

$$Z_n : I \longrightarrow U,$$

tales que $Z_n(t_0) = p$, $Z_n(I) \subset K$ y salvo para un número finito de puntos,

$$\| Z_n'(t) - F[Z_n(t)] \| \leq \frac{1}{n}.$$

Ahora de la desigualdad (2.1) se sigue que $\{Z_n\}$ es una familia equicontinua y uniformemente acotada. Aplicando el **Teorema de Ascoli**, existe una subsucesión de Z_n, que llamaremos igual, que converge uniformemente en I a una X, la cual es continua por serlo las Z_n.

Consideremos la sucesión de aplicaciones

$$H_n(t) = \begin{cases} Z_n'(t) - F[Z_n(t)] & \text{si } Z_n \text{ es diferenciable en } t, \\ 0 & \text{si no lo es.} \end{cases}$$

Se sigue que $H_n \to 0$ uniformemente en I. Como $Z_n \to X$ uniformemente y F es uniformemente continua, tendremos que $F \circ Z_n \to F \circ X$ uniformemente, y por tanto $(F \circ Z_n + H_n) \to F \circ X$ uniformemente. Se sigue así que

$$G_n(t) = \int_{t_0}^{t} [F[Z_n(s)] + H_n(s)]ds \to G(t) = \int_{t_0}^{t} F[X(s)]ds,$$

siendo así que por continuidad $Z_n(t) = p + G_n(t)$, por tanto $X(t) = p + G(t)$, es decir

$$X(t) = p + \int_{t_0}^{t} F[X(s)]ds. \quad \blacksquare$$

2.3. Aplicaciones Lipchicianas

Definición. Sean $(\mathcal{E}_1, d_1)$ y $(\mathcal{E}_2, d_2)$ espacios métricos. Diremos que una aplicación $\phi\colon \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$ es *Lipchiciana* si existe $k > 0$ tal que

$$d_2[\phi(x), \phi(y)] \leq k d_1(x, y),$$

para cualesquiera $x, y \in \mathcal{E}_1$.

Si $k < 1$, entonces diremos que ϕ es *contractiva*.

Se sigue que si

$$\phi\colon (\mathcal{E}_1, d_1) \longrightarrow (\mathcal{E}_2, d_2),$$

es lipchiciana entonces no sólo es continua sino uniformemente continua.

Definición. Diremos que $\phi\colon (\mathcal{E}_1, d_1) \longrightarrow (\mathcal{E}_2, d_2)$ es *localmente lipchiciana* si para cada $p \in \mathcal{E}_1$ existe un entorno suyo en el que ϕ es lipchiciana.

Nota 2.7 Obsérvese que si los $\mathcal{E}_i$ son espacios normados, entonces la desigualdad de la definición dice,

$$\| \phi(x) - \phi(y) \|_1 \leq k \| x - y \|_2 .$$

Ahora bien, si los espacios normados son de dimensión finita, entonces no es necesario especificar de que normas se está hablando, pues al ser equivalentes todas las normas en un espacio vectorial finito–dimensional, si la desigualdad es cierta con una elección de normas lo será para cualquier otra, modificando la constante k como corresponda.

Esto permite definir la noción de aplicación lipchiciana entre espacios vectoriales de dimensión finita.

Ejercicio 2.3.1 Sean $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ espacios vectoriales de dimensión finita. Demostrar que

$$f = (f_1, f_2)\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2,$$

es localmente lipchiciana si y sólo si lo son f_1 y f_2.

Teorema de las aplicaciones contractivas 2.8 *Sea $(\mathcal{E}, d)$ un espacio métrico completo. Si $\phi\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ es contractiva, entonces existe un único $x \in \mathcal{E}$ tal que $\phi(x) = x$.*

Demostración. La unicidad es obvia. Veamos la existencia.

Sea $x_0 \in \mathcal{E}$ cualquiera y definamos la sucesión $x_n = \phi(x_{n-1})$, para $n \geq 1$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq k^n d(x_1, x_0) \\ d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (k^{n+m-1} + \cdots + k^{n+1} + k^n) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0), \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\{x_n\}$ es de Cauchy, y por ser $\mathcal{E}$ completo, $\{x_n\} \to x \in \mathcal{E}$. Ahora como ϕ es continua tendremos que

$$\phi(x) = \phi(\lim x_n) = \lim \phi(x_n) = \lim x_{n+1} = x. \quad \blacksquare$$

Lema 2.9 *Si $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son espacios normados y $\phi\colon \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$ es localmente lipchiciana, entonces ϕ es lipchiciana en cada compacto de $\mathcal{E}_1$.*

Demostración. Veámoslo primero para un compacto K convexo. En este caso basta recubrir el compacto con un número finito de bolas abiertas en las que ϕ sea lipchiciana. Entonces si las constantes de lipchicianidad en las bolas son $k_1, \ldots, k_n$, tendremos que $k_1 + \cdots + k_n$ es la constante de lipchicianidad en el compacto.

Ahora bien todo compacto K está dentro de un compacto convexo, por ejemplo su envolvente convexa, pues ésta es la imagen continua de $K \times K \times [0,1]$ por la aplicación

$$F(x, y, \lambda) = \lambda x + (1 - \lambda) y. \quad \blacksquare$$

Sea $\mathcal{E}$ un espacio vectorial real de dimensión finita. Para cada abierto $U \subset \mathcal{E}$ denotaremos con

$$\mathcal{L}(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{localmente lipchicianas.}\}$$

Proposición 2.10 *a) $\mathcal{L}(U)$ es una $\mathbb{R}$–álgebra.*
b) $\mathcal{C}^1(U) \subset \mathcal{L}(U) \subset \mathcal{C}(U)$.
c) Si $f \in \mathcal{L}(U)$ entonces f es lipchiciana en cada compacto de U.
d) Si $f \in \mathcal{L}(U)$ es de soporte compacto, entonces f es lipchiciana.

Demostración. (a) Hágase como ejercicio.

(b) Es consecuencia del teorema del valor medio, pues nos asegura que

$$f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(z)(x_i - y_i),$$

para $x, y \in \mathcal{E}$ y z entre x e y.

(c) Sea $K \subset U$ compacto y sea V un abierto tal que $K \subset V \subset \mathrm{Adh}\,(V) \subset U$ —basta tomar para cada $x \in K$ una $B(x,r) \subset U$ y considerar un subrecubrimiento finito de las $B(x, r/2)$). Ahora tomamos $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$ tal que $h(K) = 1$ y $h(\mathcal{E} - V) = 0$, entonces $hf \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ y $hf = f$ es lipchiciana en K.

(d) Basta ver la desigualdad, para $x \in \mathrm{sop}\, f$ e $y \in (\mathrm{sop}\, f)^c$. Como existe un $t \in (0,1]$, tal que $z = tx + (1-t)y \in \partial \mathrm{sop}\,(f)$, tendremos por el lema anterior que

$$\mid f(x) - f(y) \mid = \mid f(x) \mid = \mid f(x) - f(z) \mid \leq k \parallel x - z \parallel \leq k \parallel x - y \parallel . \quad \blacksquare$$

Definición. Llamaremos *campo tangente localmente lipchiciano* a las derivaciones

$$D \colon \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{L}(U),$$

y denotaremos con $\mathcal{D}_L(U)$ el módulo libre sobre $\mathcal{L}(U)$ de estos campos con las operaciones naturales.

En cualquier sistema de coordenadas u_i de clase ∞ en U, $D = \sum Du_i \partial/\partial u_i$, con las $Du_i \in \mathcal{L}(U)$.

Definición. Sean $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ espacios vectoriales de dimensión finita y $U \subset \mathcal{E}_1$, $V \subset \mathcal{E}_2$ abiertos. Diremos que $f \colon U \times V \longrightarrow \mathcal{E}_3$ es *lipchiciana en V uniformemente en U*, si para una elección de normas, existe $k > 0$ tal que

$$\parallel f(x, v_1) - f(x, v_2) \parallel \leq k \parallel v_1 - v_2 \parallel,$$

para todo $x \in U$ y $v_1, v_2 \in V$.

Diremos que f es *localmente lipchiciana en V uniformemente en U* si para cada $(p,q) \in U \times V$ existen U_p entorno de p en U, V_q entorno de q en V y $k > 0$ tales que

$$\parallel f(x, v_1) - f(x, v_2) \parallel \leq k \parallel v_1 - v_2 \parallel,$$

para todo $x \in U_p$, y $v_1, v_2 \in V_q$.

Con $\mathcal{L}_U(U \times V)$ denotaremos las funciones $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, continuas y localmente lipchicianas en V uniformemente en U.

Definición. Llamaremos *campo tangente localmente lipchiciano* en $V \subset \mathcal{E}_2$, *uniformemente en* $U \subset \mathcal{E}_1$ a las derivaciones

$$D\colon \mathcal{C}^\infty(U \times V) \longrightarrow \mathcal{L}_U(U \times V),$$

las cuales forman un módulo libre $\mathcal{D}_U(U \times V)$ respecto de la $\mathbb{R}$–álgebra $\mathcal{L}_U(U \times V)$, para el que se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(U \times V) \subset \ldots \subset \mathcal{D}_1(U \times V) \subset \mathcal{D}_L(U \times V)\\ \subset \mathcal{D}_U(U \times V) \subset \mathcal{D}_0(U \times V).\end{aligned}$$

Ejercicio 2.3.2 a) Demostrar que si $f\colon U \times V \longrightarrow \mathcal{E}_3$ es localmente lipchiciana entonces es localmente lipchiciana en V uniformemente en U y que $\mathcal{L}(U \times V) \subset \mathcal{L}_U(U \times V)$

b) Demostrar que $f = (f_i)\colon U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es localmente lipchiciana en V uniformemente en U si y sólo si lo son las f_i.

c) Si $f \in \mathcal{L}_U(U \times V)$, entonces f es lipchiciana en cualquier compacto $K_2 \subset V$, uniformemente en cualquier compacto $K_1 \subset U$.

Ejercicio 2.3.3 Sean $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ espacios vectoriales reales de dimensión finita, $U \subset \mathcal{E}$ abierto y $A\colon U \longrightarrow L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ continua. Demostrar que

$$f\colon U \times \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2\ , \quad f(x, v) = A(x)(v),$$

es localmente lipchiciana en $\mathcal{E}_1$ uniformemente en U.

Ejercicio 2.3.4 Demostrar que:

a) $\mathcal{L}_U(U \times V)$ es una $\mathbb{R}$–álgebra.

b) $\mathcal{L}(U \times V) \subset \mathcal{L}_U(U \times V) \subset \mathcal{C}(U \times V)$.

Ejercicio 2.3.5 Demostrar que si $\sigma\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una curva diferenciable, entonces en $\sigma \neq 0$, $|\sigma|' = |\sigma'| \cos(\sigma\sigma')$.

Ejercicio 2.3.6 Demostrar que si en $[a, b]$, $y' \leq ky + r$ con $k > 0$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces

$$y(x) \leq y(a)\, \mathrm{e}^{k(x-a)} + \frac{r}{k}(\mathrm{e}^{k(x-a)} - 1).$$

Ejercicio 2.3.7 Demostrar que si $F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es Lipschiciana en el abierto U, con constante k y $\sigma_i\colon I = (a,b) \subset \mathbb{R} \to U$, $i = 1, 2$, son dos curvas diferenciables para las que $0 \in I$ y $|\sigma_i' - F(\sigma_i)| \leq \epsilon/2$, entonces para $t \geq 0$ e $y(t) = |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|$

$$y(t) \leq y(0)\, \mathrm{e}^{kt} + \frac{\epsilon}{k}(\mathrm{e}^{kt} - 1).$$

2.4. Unicidad de solución

Nuestra intención ahora es analizar bajo que condiciones la solución del sistema de ecuaciones diferenciales, para $i = 1, \ldots, n$,

$$X_i'(t) = f_i[X_1(t), \ldots, X_n(t)],$$

que ya sabemos que existe cuando las f_i son continuas, es única cuando fijamos las condiciones iniciales, $X_i(t_0) = p_i$, para un $t_0 \in \mathbb{R}$ y un punto $p \in U$ de coordenadas (p_i).

La continuidad de las f_i no bastan para asegurar la unicidad de solución, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo en $\mathbb{R}$:

$$x'(t) = \sqrt{|\, x(t)\, |},$$

en el que para $p = 0$ tenemos mas de una solución. Por un lado la aplicación constante $x(t) = 0$, y por otro para cada $c \geq 0$

$$x_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq c, \\ \frac{1}{4}(t-c)^2 & \text{para } t \geq c. \end{cases}$$

Ahora bien si les pedimos a las f_i que sean localmente lipchicianas, la unicidad de solución estará asegurada.

Nota 2.11 No obstante debemos observar que en $\mathbb{R}$ se tiene que toda ecuación diferencial

$$x' = f(x),$$

para f continua y no nula, tiene solución única, satisfaciendo la condición inicial $x(t_0) = p_0$. Pues considerando $g = \int dx/f(x)$, tal que $g(p_0) = t_0$, tendremos que de existir tal solución $x(t)$, debe verificar

$$\frac{x'(t)}{f[x(t)]} = 1,$$

e integrando

$$g[x(t)] - t_0 = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{f(x)} = \int_{t_0}^{t} \frac{x'(t)}{f[x(t)]} dt = t - t_0,$$

por lo que $g[x(t)] = t$, es decir que x debe ser la inversa de g, que existe y es única pues g es estrictamente monótona, ya que tiene derivada no nula.

Recordemos que si existe una solución de la ecuación diferencial —en notación vectorial—

$$X'(t) = f[X(t)],$$

que satisfaga la condición inicial $X(t_0) = p$, entonces tal solución satisface la ecuación integral

$$X(t) = p + \int_{t_0}^{t} f[X(s)] ds,$$

y recíprocamente cualquier solución de esta ecuación integral es solución de la ecuación diferencial satisfaciendo la condición inicial fijada.

Teorema de Unicidad de solución 2.12 *Dados $D \in \mathcal{D}_L(U)$, $p \in U$ y $t_0 \in \mathbb{R}$. Existe un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, con $t_0 \in I$ y una curva integral $X\colon I \longrightarrow U$, de D satisfaciendo $X(t_0) = p$, única y máxima en el siguiente sentido: Si $Y\colon J \longrightarrow U$ es otra curva integral de D tal que $t_0 \in J$ e $Y(t_0) = p$, entonces $J \subset I$ y $X = Y$ en J.*

Demostración. Basta demostrar que si U es abierto de $\mathbb{R}^n$, $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ es localmente lipchiciana y existen $Y\colon I \longrightarrow U$ y $Z\colon J \longrightarrow U$ soluciones de $X' = F \circ X$ que verifican

$$Y(t_0) = Z(t_0) = p \in U,$$

para un $t_0 \in I \cap J$, entonces $Y = Z$ en $I \cap J$.

Consideremos el conjunto

$$A = \{t \in I \cap J :\ Y(t) = Z(t)\},$$

entonces $t_0 \in A$, A es cerrado —pues Y y Z son continuas— y es abierto como veremos a continuación. De esto se seguirá, por la conexión de $I \cap J$, que $A = I \cap J$.

Veamos que A es abierto. Sean $a \in A$ y $q = Y(a) = Z(a)$, entonces

$$Y(t) = q + \int_a^t F[Y(s)]ds,$$
$$Z(t) = q + \int_a^t F[Z(s)]ds,$$

por tanto en el entorno de a, $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, tal que $[a-\epsilon, a+\epsilon] = I_1 \subset I \cap J$ y el compacto $K = Y(I_1) \cup Z(I_1)$, en el que F es lipchiciana con constante k, tendremos —considerando la norma del máximo en $\mathbb{R}^n$— que,

$$\| Y(t) - Z(t) \| \leq k \mid t - a \mid \sup\{\| Y(s) - Z(s) \| :\ a \leq s \leq t\},$$

y si $k \mid t - a \mid < 1$, tendremos que en un entorno de a, $Y(t) = Z(t)$.

Basta definir entonces X, de la forma obvia, en la unión de todos los posibles intervalos I que sean solución del problema. ∎

Definición. Para cada $p \in U$ llamaremos *curva integral máxima* de D pasando por p a la aplicación

$$X_p \colon I(p) \longrightarrow U,$$

dada por el teorema anterior, para $t_0 = 0$. Diremos que D es un *campo completo* si $I(p) = \mathbb{R}$, para cada $p \in U$.

2.5. Grupo Uniparamétrico de un campo

Sea $D = \sum f_i \partial_i \in \mathcal{D}_L(U)$ con curvas integrales máximas X_p para cada $p \in U$. Si denotamos con $I(p)$ el intervalo abierto máximo en el que está definida cada X_p, podremos considerar el conjunto

$$\mathcal{W}_D = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times U :\ t \in I(p)\},$$

y la aplicación

$$X \colon \mathcal{W}_D \longrightarrow U\ , \quad X(t, p) = X_p(t). \tag{2.2}$$

En esta lección veremos que $\mathcal{W}_D$ es abierto, que X es continua y que es grupo uniparamétrico local. Empecemos por lo último. Como es habitual denotaremos $F = (f_i)$.

Proposición 2.13 *En las condiciones anteriores, X satisface las propiedades de grupo uniparamétrico local:*

a) Para cada $p \in U$, $X(0,p) = p$.

b) Si $s \in I(p)$ y $q = X(s,p)$, entonces $I(p) = I(q) + s$, es decir $t \in I(q)$ si y sólo si $t + s \in I(p)$ y $X(t+s,p) = X(t, X(s,p))$.

Demostración Veamos la propiedad (b):

Sean $s \in I(p)$ y $q = X_p(s)$, y definamos para cada $t \in I(p) - s$

$$Y(t) = X_p(t+s),$$

entonces como $Y(0) = q$ y

$$Y'(t) = X'_p(t+s) = F[X_p(t+s)] = F[Y(t)],$$

tenemos que Y es una curva integral de D pasando por q, y por el **Teorema de unicidad**, $I(p) - s \subset I(q)$ e $Y(t) = X_q(t)$. Por razones análogas será $I(q) + s \subset I(p)$, por tanto $I(p) = I(q) + s$. ∎

Ejercicio 2.5.1 Encontrar el grupo uniparamétrico de los campos ∂_x/x en $(0,\infty)$ y $x^2\partial_x$ en $\mathbb{R}$.

Veamos ahora que $X\colon \mathcal{W}_D \longrightarrow U$ es continua en algún entorno de $(0,p)$ para cada $p \in U$.

Consideraremos en $\mathbb{R}^n$ la norma del máximo y elijamos un $\epsilon > 0$ y un punto $p \in U$. Ahora sea $r > 0$ tal que

$$K = B[p,r] \subset U,$$

y denotemos

$$I = [-\epsilon, \epsilon]\ , \quad K_1 = B[p, r/2]\ , \quad M = \text{máx}\{\parallel F(x) \parallel\colon\ x \in K\}.$$

Consideremos el espacio de Banach $\mathcal{B}$ de las aplicaciones continuas

$$Y\colon I \times K_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

con la norma del máximo

$$\parallel Y \parallel = \text{máx}\{\parallel Y(t,\lambda) \parallel\colon\ (t,\lambda) \in I \times K_1\}.$$

Consideremos ahora la bola cerrada, en este espacio, centrada en la aplicación constante igual a p y de radio r,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_r &= \{Y \in \mathcal{B} : \| Y - p \| \leq r\} \\ &= \{Y : I \times K_1 \longrightarrow K, \ \text{ continuas}\}.\end{aligned}$$

En estos términos $\mathcal{B}_r$ es un espacio métrico completo.

Ahora definimos la aplicación ϕ que a cada $Y\colon I \times K_1 \longrightarrow U$ le hace corresponder la aplicación $\phi(Y) = Z$ definida por

$$Z\colon I \times K_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad Z(t,\lambda) = \lambda + \int_0^t F[Y(s,\lambda)]ds.$$

Proposición 2.14 a) *Para cada $Y \in \mathcal{B}_r$, $\phi(Y) \in \mathcal{B}$, es decir*

$$\phi\colon \mathcal{B}_r \longrightarrow \mathcal{B}.$$

b) *Si $0 < \epsilon < r/2M$, entonces para cada $Y \in \mathcal{B}_r$, $\phi(Y) \in \mathcal{B}_r$, por tanto*

$$\phi\colon \mathcal{B}_r \longrightarrow \mathcal{B}_r.$$

c) *Si $k > 0$ es una constante de lipchicianidad de las f_i en K, entonces ϕ es contractiva para $\epsilon < 1/k$.*

Demostración.- (a) Veamos que Z es continua en cada punto (t, λ).

Para cada $(a, \mu) \in I \times K_1$, próximo a (t, λ), tendremos que

$$\begin{aligned}\| Z(t,\lambda) - Z(a,\mu) \| \leq &\| Z(t,\lambda) - Z(t,\mu) \| + \| Z(t,\mu) - Z(a,\mu) \| \leq \\ &\leq \| \lambda - \mu \| + \max_i \int_0^t |f_i[Y(s,\lambda)] - f_i[Y(s,\mu)]|ds + \\ &+ \max_i \int_t^a |f_i[Y(s,\mu)]|ds.\end{aligned}$$

Ahora el segundo sumando es pequeño por la uniforme continuidad de $f_i \circ Y$ y porque $| t |$ es acotado, y el tercero porque está acotado por

$$| t - a | \ \max\{| f_i \circ Y |\colon \ I \times K_1, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

(b) Ahora si $0 < \epsilon < r/2M$, entonces $\| \phi(Y) - Q \| \leq r$.

(c) Si $X, Y \in \mathcal{B}_r$ y k es la constante de lipchicianidad de las f_i en K, entonces

$$\| \phi(X)(t,\lambda) - \phi(Y)(t,\lambda) \| \leq \max_i \int_0^t | f_i[X(s,\lambda)] - f_i[Y(s,\lambda)] | ds$$
$$\leq k \int_0^t \| X - Y \| ds \leq k\epsilon \| X - Y \|,$$

por tanto

$$\| \phi(X) - \phi(Y) \| \leq k\epsilon \| X - Y \| . \quad \blacksquare$$

Teorema de Continuidad local del grupo uniparamétrico 2.15
Sea $D \in \mathcal{D}_L(U)$ y $p \in U$, entonces existe un abierto entorno de p, $V \subseteq U$ y un intervalo $I = (-\epsilon, \epsilon)$ tales que $I \times V \subset \mathcal{W}_D$ y la aplicación $X : I \times V \longrightarrow U$, es continua.

Demostración.- Basta tomar $V = B(p, r/2)$ y aplicar el resultado anterior —y el **Teorema de punto fijo**—, tomando $0 < \epsilon < 1/k$. $\blacksquare$

Nota 2.16 Observemos que además $X : I \times V \longrightarrow U$ podemos construirla por el *Teorema de punto fijo* **(2.8)**, sin mas que partir de una $X^0 \in \mathcal{B}_r$ arbitraria y luego considerando la sucesión $X^{m+1} = \phi(X^m)$, es decir

$$X^{m+1}(t,\lambda) = \lambda + \int_0^t F[X^m(s,\lambda)]ds.$$

En estas condiciones sabemos que X^m converge uniformemente a X.

Por último observemos que el abierto V, entorno de p, podemos tomarlo de tal forma que contenga al compacto que queramos de U. Para ello basta recubrir el compacto por abiertos en las condiciones anteriores y tomar un subrecubrimiento finito, y el mínimo de los ϵ.

Teorema de Continuidad del grupo uniparamétrico 2.17
*La aplicación X de **(2.2)**, es un grupo uniparamétrico local en U, que es de clase k si lo es en algún entorno de $(0, p)$, para cada $p \in U$. Además su generador infinitesimal es D.*

Demostración.- Supongamos que para cada $p \in U$, X es de clase k en algún entorno de $(0, p)$ —esto es cierto, por el **Teorema de continuidad local**, para $k = 0$—, y veamos que $\mathcal{W}_D$ es abierto y X es de clase k en él.

Sea $(t_0, p_0) \in \mathcal{W}_D$ y demostremos la existencia de un $\delta > 0$ y de un entorno abierto V, de p_0 en U, tales que

$$(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times V = I \times V \subset \mathcal{W}_D,$$

y $X\colon I \times V \longrightarrow U$ es de clase k.

Para $t_0 = 0$ es nuestra hipótesis.

Supongamos que existe un $z \in U$ para el que el teorema no es válido. Como para $(0, z)$ lo es, tendremos que existe un $t_0 \in I(z)$ que es el mínimo de todos los $t \in I(z)$, con $t > 0$, para los que no es cierto que existan $\delta_t > 0$ y V_t entorno abierto de z tales que

$$(t - \delta_t, t + \delta_t) \times V_t \subset \mathcal{W}_D,$$

y en él X es de clase k. Veamos que de esto se sigue una contradicción.

Sea $p = X(t_0, z)$, entonces existe $\delta_1 > 0$ y $V_p \subset U$, entorno abierto de p, tales que $(-\delta_1, \delta_1) \times V_p \subset \mathcal{W}_D$ y

$$X\colon (-\delta_1, \delta_1) \times V_p \subset \mathcal{W}_D \longrightarrow U,$$

es de clase k. Como $p = X_z(t_0) \in V_p$ y X_z es continua, existirá $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$ tal que $X(t_1, z) \in V_p$. Pero entonces por nuestra hipótesis existirá un $\delta > 0$ y V_z entorno abierto de z en U tales que $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \times V_z \subset \mathcal{W}_D$ y

$$X\colon (t_1 - \delta, t_1 + \delta) \times V_z \subset \mathcal{W}_D \longrightarrow U,$$

es de clase k.

Ahora bien podemos tomar $\delta > 0$ y V_z más pequeños verificando $X(t, y) \in V_p$, para cada $(t, y) \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta) \times V_z$ pues $X(t_1, z) \in V_p$ y X es continua.

Así para cada $q \in V_z$ tenemos que $q_1 = X(t_1, q) \in V_p$, por tanto como

$$(-\delta_1, \delta_1) \times V_p \subset \mathcal{W}_D,$$

será $(-\delta_1, \delta_1) \subset I(q_1)$, lo cual equivale —ver la propiedad (b) de grupo uniparamétrico local— a que

$$(-\delta_1, \delta_1) \subset I(q_1) = I(q) - t_1,$$

es decir $(t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1) \subset I(q)$, y esto para todo $q \in V_z$. Es decir que

$$(t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1) \times V_z \subset \mathcal{W}_D,$$

y en él X es de clase k, pues es composición de

$$H\colon (t_1-\delta_1,t_1+\delta_1)\times V_z \longrightarrow (-\delta_1,\delta_1)\times V_p, H(t_1+s,q)=(s,X(t_1,q)),$$

y de

$$X : (-\delta_1,\delta_1)\times V_p \longrightarrow U,$$

ya que $X(t_1+s,q)=X(s,X(t_1,q))$.

Pero como $t_0\in(t_1-\delta_1,t_1+\delta_1)$ llegamos a un absurdo.

Por último es fácil ver que D es el generador infinitesimal de X. ∎

2.6. Grupo Unip. de campos subidos

Definición. Sean $U\subset\mathbb{R}^n$ y $V\subset\mathbb{R}^m$ abiertos. Diremos que $E\in\mathcal{D}_0(U\times V)$ es una *subida de* $D\in\mathcal{D}_0(U)$, si para $\pi\colon U\times V\longrightarrow U$, $\pi(x,y)=x$, π lleva E en D, es decir si para cada $(x,y)\in U\times V$ se tiene que

$$\pi_* E_{(x,y)} = D_x.$$

Si en U tenemos un sistema de coordenadas (x_i) y en V otro (y_j) y en $U\times V$ consideramos el sistema de coordenadas (x_i,y_j), tendremos que para una subida

$$E=\sum_{i=1}^{n} g_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m} g_{n+j}\frac{\partial}{\partial y_j},$$

de un campo

$$D=\sum_{i=1}^{n} f_i\frac{\partial}{\partial x_i},$$

se tiene que para $i=1,\ldots,n$ y $(x,y)\in U\times V$

$$g_i(x,y)=f_i(x).$$

Sea $E\in\mathcal{D}_U(U\times V)$ localmente lipchiciano en V uniformemente en U, que sea una subida de un campo $D\in\mathcal{D}_L(U)$ localmente lipchiciano en U.

Veremos que entonces el campo E también tiene grupo uniparamétrico local y es continuo.

Con $X\colon \mathcal{W}_D \longrightarrow U$ denotaremos el grupo uniparamétrico local de D.

Teorema 2.18 *Para cada $\lambda = (p,q) \in U \times V$ y cada $t_0 \in \mathbb{R}$, existe una única curva integral $Z\colon I \longrightarrow U \times V$ de E pasando por λ en el instante t_0, máxima en el sentido de que si $Y\colon J \longrightarrow U \times V$ es otra, con $t_0 \in J$, entonces $J \subset I$ y en J, $Z = Y$.*

Demostración.- Basta ver que si

$$Y_1\colon J_1 \longrightarrow U \times V\ , \quad Y_2\colon J_2 \longrightarrow U \times V,$$

están en estas condiciones entonces $Y_1 = Y_2$ en $J_1 \cap J_2$.

En tales condiciones se tiene que $\pi \circ Y_1$ y $\pi \circ Y_2$ son soluciones de D pasando por p en t_0, por tanto coinciden en $J_1 \cap J_2$. Se concluye con un argumento similar al del *Teorema de unicidad* (2.12) . ∎

Podemos entonces considerar para cada $\lambda \in U \times V$, la curva integral máxima de E pasando por λ en el instante 0

$$Z(.,\lambda)\colon I(\lambda) \longrightarrow U \times V,$$

el conjunto

$$\mathcal{W}_E = \{(t,\lambda) \in \mathbb{R} \times U \times V :\ t \in I(\lambda)\},$$

y la aplicación

$$Z\colon \mathcal{W}_E \longrightarrow U \times V.$$

Ejercicio 2.6.1 a) Demostrar que Z es grupo uniparamétrico local.

b) Que para cada $\lambda = (p,q) \in U \times V$, $I(\lambda) \subset I(p)$, y que para cada $t \in I(\lambda)$

$$\pi[Z(t,\lambda)] = X(t,p).$$

Teorema 2.19 *Para cada $(p,q) \in U \times V$ existen abiertos U_p y V_q, entornos de p y q en U y V respectivamente y un intervalo $I = (-\epsilon,\epsilon)$ para los que es continua la aplicación*

$$Z\colon I \times U_p \times V_q \longrightarrow U \times V.$$

Demostración.- Básicamente se hace como en el **Teorema de continuidad local**. Consideremos en $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ la norma del máximo.

Sea $\lambda = (p, q)$, $r > 0$ tal que $K = B[\lambda, r] \subset U \times V$ y consideremos los compactos

$$K_p = B[p, r/2] \ , \quad K_q = B[q, r/2].$$

Sea $k > 0$ una constante de lipchicianidad uniforme para todas las g_i en K, para $E = \sum g_i \partial_i$, y

$$M = \text{máx}\{|\ g_i(\mu)\ |\colon\ \mu \in K, i = 1, \ldots, n+m\}.$$

Consideremos ahora un $\epsilon > 0$, el intervalo $I = [-\epsilon, \epsilon]$ y el espacio de Banach de las aplicaciones continuas

$$Z\colon I \times K_p \times K_q \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m},$$

con la norma del supremo. Consideremos ahora en él, el espacio métrico completo $\mathcal{B}_X$, de las

$$Z\colon I \times K_p \times K_q \longrightarrow K,$$

continuas, tales que $\pi Z(t, x, y) = X(t, x)$. En estas condiciones si para cada $Z \in \mathcal{B}_X$ definimos

$$\phi(Z)\colon I \times K_p \times K_q \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}, \ \ \phi(Z)(t, \mu) = \mu + \int_0^t G[Z(s, \mu)]ds,$$

para $G = (g_i)$, tendremos que $\phi\colon \mathcal{B}_X \longrightarrow \mathcal{B}_X$ si tomamos el $\epsilon < r/2M$.

Además para $\epsilon < 1/k$, ϕ es contractiva y existe $Z \in \mathcal{B}_X$, tal que $\phi Z = Z$, que es lo que queríamos. ∎

Nota 2.20 Observemos que podemos construir Z a partir de las funciones F_i del campo E, como límite de una sucesión de la forma

$$Z^{n+1}(t, \lambda) = \lambda + \int_0^t G[Z^n(s, \lambda)]ds.$$

Teorema 2.21 *En las condiciones anteriores $\mathcal{W}_E \subset \mathcal{W}_D \times V$ es abierto, Z es un grupo uniparamétrico local continuo, que es de clase k si lo es en algún entorno de $(0, \lambda)$ para cada $\lambda \in U \times V$, que verifica $\pi \circ Z(t, \lambda) = X(t, \pi\lambda)$, y cuyo generador infinitesimal es E.*

Demostración.- Básicamente se hace como en el *Teorema de continuidad* (2.17). ∎

2.7. Diferenciabilidad del grupo unip.

Sea $D \in \mathcal{D}_k(U)$ un campo tangente en un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Y sea $X\colon \mathcal{W}_D \longrightarrow U$ su grupo uniparamétrico local. Veremos en esta lección que $X = (X_i)$ y la $\partial X/\partial t$ son de clase k. Para ello basta demostrar que X lo es, pues si $D = \sum f_i \partial/\partial x_i$, tendremos que para $F = (f_i)$

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t,p) = X'_p(t) = F[X_p(t)] = F[X(t,p)],$$

y por tanto la $\partial X/\partial t$ es de clase k si lo son F y X.

Sabemos que

$$X_i(t,p) = p_i + \int_0^t f_i[X(s,p)]ds,$$

y se sigue que de existir las $\partial X_i/\partial x_j$, y llamándolas X_{ij}, para $i,j = 1,\ldots,n$, tendrían que verificar

$$X_{ij}(t,p) = \delta_{ij} + \int_0^t [\sum_{k=1}^n f_{ik}[X(s,p)]X_{kj}(s,p)]ds,$$

donde $f_{ik} = \partial f_i/\partial x_k$, y por tanto

$$X_{ij}(0,p) = \delta_{ij}\ , \qquad \frac{\partial X_{ij}}{\partial t}(t,p) = \sum_{k=1}^n f_{ik}[X(t,p)]X_{kj}(t,p) \tag{2.3}$$

ó en forma vectorial, definiendo

$$X^j = \frac{\partial X}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_j} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$$

$$X^j(0,p) = e_j, \qquad \frac{\partial X^j}{\partial t} = \mathbf{A}(\mathbf{X}) \cdot X^j.$$

Esto nos sugiere que definamos el sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales en el abierto $U \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{aligned} Z_1' &= g_1[Z_1, \ldots, Z_n, Z_{n+1}, \ldots, Z_{2n}], \\ &\vdots \quad \vdots \\ Z_{2n}' &= g_{2n}[Z_1, \ldots, Z_n, Z_{n+1}, \ldots, Z_{2n}], \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde $g_i \colon U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ están definidas de la forma $g_i(x, y) = f_i(x)$, para $i = 1, \ldots, n$ y

$$\begin{pmatrix} g_{n+1}(x, y) \\ \vdots \\ g_{2n}(x, y) \end{pmatrix} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot y,$$

—donde estamos entendiendo y como vector columna— y considerar el campo

$$E = \sum_{i=1}^{2n} g_i \frac{\partial}{\partial z_i} \in \mathcal{D}_U(U \times \mathbb{R}^n),$$

que es una subida de $D \in \mathcal{D}_L(U)$.

Es obvio que si existe $X^j = (\partial X_i / \partial x_j)$ y es continua en t, entonces (X_p, X^j) es una solución particular de (2.4), la que pasa por los puntos de la forma (p, e_j), para $e_j = (\delta_{ji})$.

Teorema de diferenciabilidad del grupo uniparamétrico 2.22
Si $D \in \mathcal{D}_1(U)$ entonces su grupo uniparamétrico local $X \colon \mathcal{W}_D \longrightarrow U$ es de clase $\mathcal{C}^1$.

Demostración.- El Teorema de continuidad del grupo uniparamétrico de campos subidos, nos asegura que el grupo uniparamétrico local del campo subido E

$$Z \colon \mathcal{W}_E \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n,$$

es continuo y verifica para $i = 1, \ldots, 2n$,

$$Z(t, \lambda) = \lambda + \int_0^t G[Z(s, \lambda)] ds,$$

siendo, para cada $\lambda = (p, v)$, $I(\lambda) \subset I(p)$ y en él, para $i = 1, \ldots, n$

$$Z_i(t, p, v) = X_i(t, p).$$

Por **(2.17)** basta comprobar que existen y son continuas las $\partial X_i/\partial x_j$ en un entorno de los puntos de la forma $(0,p) \in \mathcal{W}_D$.

Ahora bien X podemos construirla localmente como vimos en la nota **(2.16)**, de la siguiente forma. Para cada $p \in U$ existe un $\epsilon > 0$ y dos entornos compactos de p en U, $K_p \subset K \subset U$, tales que

$$X\colon [-\epsilon,\epsilon] \times K_p \longrightarrow K, \tag{2.5}$$

es límite uniforme de la sucesión

$$X^m\colon [-\epsilon,\epsilon] \times K_p \longrightarrow K,$$

definida recurrentemente, para $F = (f_i)$, por

$$X^m(t,q) = q + \int_0^t F[X^{m-1}(s,q)]ds,$$

partiendo de una aplicación continua

$$X^0 : [-\epsilon,\epsilon] \times K_p \longrightarrow K,$$

arbitraria. Si tomamos $X^0(t,q) = p$, tendremos que todas las X^m son diferenciables en $(-\epsilon,\epsilon) \times \overset{\circ}{K}_p$. Tomando ahora un ϵ mas pequeño y cualquier compacto entorno de p en $\overset{\circ}{K}_p$, y llamándolos igual, podemos entonces definir la sucesión

$$Y^m\colon [-\epsilon,\epsilon] \times K_p \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

de la forma

$$Y_i^m(t,q) = \frac{\partial X_i^m}{\partial x_j}(t,q) = \delta_{ij} + \int_0^t [\sum_{k=1}^n f_{ik}[X^{m-1}(s,q)] \cdot Y_k^{m-1}(s,q)]ds,$$

ó en forma vectorial

$$Y^m(t,q) = e_j + \int_0^t \mathbf{A}[X^{m-1}(s,q)] \cdot Y^{m-1}(s,q)ds.$$

Consideremos ahora la aplicación

$$\begin{aligned} Y &: [-\epsilon,\epsilon] \times K_p \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ Y(t,q) &= [Z_{n+1}(t,q,e_j),\ldots,Z_{2n}(t,q,e_j)] \\ &= e_j + \int_0^t [\mathbf{A}[X(s,q)] \cdot Y(s,q)]ds. \end{aligned}$$

En estas condiciones se tiene que (X^m, Y^m) converge uniformemente a (X, Y) en el compacto $[-\epsilon, \epsilon] \times K_p$. Para verlo basta demostrar que $Y^m \to Y$ uniformemente.

$$\begin{aligned}
&\| Y^m(t,q) - Y(t,q) \| \leq \\
&\leq \int_0^t \| \mathbf{A}[X^{m-1}(s,q)] \cdot Y^{m-1}(s,q) - \mathbf{A}[X(s,q)] \cdot Y(s,q) \| \, ds \\
&\leq \int_0^t \| \mathbf{A}[X^{m-1}(s,q)] \| \cdot \| Y^{m-1} - Y \| \, ds + \\
&\quad + \int_0^t \| \mathbf{A}[X^{m-1}(s,q)] - \mathbf{A}[X(s,q)] \| \cdot \| Y \| \, ds \\
&\leq k \int_0^t \| Y^{m-1} - Y \| \, ds + a_{m-1},
\end{aligned}$$

donde $k = \sup\{\| \mathbf{A}(x) \| \colon x \in K\}$, y $a_n \to 0$, pues $X^m \to X$ uniformemente y $\mathbf{A}$ es continua por tanto uniformemente continua en K.

Modifiquemos ahora el ϵ en (2.5) para que se tenga $k \cdot \epsilon < 1/2$, y definamos

$$b_m = \| Y^m - Y \|,$$

entonces

$$0 \leq b_m \leq a_{m-1} + \frac{b_{m-1}}{2},$$

y tomando límites superiores se sigue que $b_m \to 0$.

Tenemos entonces que para $i = 1, \ldots, n$

$$X_i^m \to X_i, \quad \frac{\partial X_i^m}{\partial x_j} = Y_i^m \to Y_i,$$

uniformemente. De esto se sigue que existe la $\partial X_i / \partial x_j = Y_i$ que es continua pues Z lo es y

$$Z(t, q, e_j) = [X(t,q), Y(t,q)]. \tag{2.6}$$

Así X es de $\mathcal{C}^1$ en un entorno de $(0, p)$, para cada $p \in U$, y el resultado se sigue. ∎

Ahora si $D = \sum f_i \partial_i \in \mathcal{D}_2(U)$, es decir es de clase 2, entonces

$$E = \sum g_i \frac{\partial}{\partial z_i} \in \mathcal{D}_1(U \times \mathbb{R}^n),$$

y podemos aplicar el resultado anterior, es decir que $Z\colon \mathcal{W}_E \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$ es de clase 1. Ahora se sigue de (2.6), pág.95, que X es de clase 2 en algún entorno de $(0,p)$ para cada $p \in U$, y de **(2.17)**, pág.87, que X es de clase 2.

Repitiendo el argumento anterior tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.23 *Si $D \in \mathcal{D}_k(U)$ entonces su grupo uniparamétrico local es de clase k.*

Corolario 2.24 *Si $D \in \mathcal{D}(U)$ entonces su grupo uniparamétrico local es de clase infinito.*

Definición. Diremos que un punto $p \in U$ es un punto *singular* de un campo $D \in \mathcal{D}(U)$ si $D_p = 0$.

2.7.1. Clasificación local de campos no singulares.

Terminamos esta lección viendo que todos los campos no singulares en un punto, son localmente el mismo: **el campo de las traslaciones**.

Teorema del flujo 2.25 *Sea $D \in \mathcal{D}_k(U)$, y $D_p \neq 0$, para un $p \in U$. Entonces existe un abierto coordenado U_p, entorno de p en U, con coordenadas $u = (u_1, \ldots, u_n)$, de clase k, tal que en U_p*

$$D = \frac{\partial}{\partial u_1}.$$

Demostración.- Podemos considerar un sistema de coordenadas lineales x_i en $\mathcal{E}$, tales que $D_p = (\partial/\partial x_1)_p$, para ello basta considerar la identificación canónica $T_p(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E}$ y el vector $e_1 \in \mathcal{E}$ correspondiente a D_p, extenderlo a una base e_i y considerar su base dual x_i. Sea $X\colon \mathcal{W}_D \longrightarrow U$ el grupo uniparamétrico local de D y consideremos un $\epsilon > 0$ y un entorno abierto V de 0 tal que $V_p = p + V \subseteq U$ y $(-\epsilon, \epsilon) \times V_p \subset \mathcal{W}_D$.

Consideremos ahora el abierto de $\mathbb{R}^{n-1}$

$$A = \{(y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : \ (0, y_2, \ldots, y_n) \in V\},$$

y la aplicación diferenciable $F\colon (-\epsilon,\epsilon)\times A \to U$

$$F(y_1,\dots,y_n) = X(y_1,(p_1,p_2+y_2,\dots,p_n+y_n)),$$

donde $p=(p_1,\dots,p_n)$.

Para esta función se tiene que $F(0)=p$, $F(t,0,\dots,0)=X(t,p)$,

$$F(y_1,\dots,y_n)=q \quad \Leftrightarrow \quad F(t+y_1,y_2,\dots,y_n)=X(t,q),$$

y para $i\geq 2$

$$F(0,\dots,0,y_i,0,\dots,0)=(p_1,\dots,p_i+y_i,\dots,p_n). \tag{2.7}$$

Veamos que F es un difeomorfismo local en 0 y llamemos por comodidad (y_i) a las coordenadas en $(-\epsilon,\epsilon)\times A$. Entonces para $F_i = x_i\circ F$ tendremos

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}(0) = \lim_{t\to 0}\frac{x_i[F(t,0,\dots,0)]-x_i[F(0)]}{t} = Dx_i(p)=\delta_{i1},$$

y por (2.7),

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0)=\delta_{ij}.$$

Entonces existen abiertos A_0 de 0 en $(-\epsilon,\epsilon)\times A$ y U_p de p en U tales que $F\colon A_0 \longrightarrow U_p$ es un difeomorfismo de clase k.

Si llamamos $(u_1,\dots,u_n)$ a la inversa de F en U_p, es decir $u_i = y_i\circ F^{-1}$, tendremos que en estas coordenadas

$$D=\frac{\partial}{\partial u_1},$$

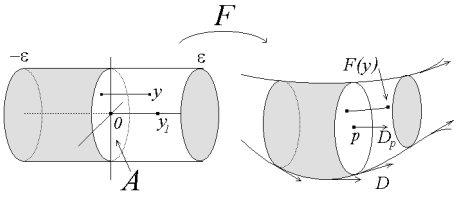


Figura 2.1. Teorema del flujo

pues en todo punto $q = F(a_1, \ldots, a_n) \in U_p$, tenemos que

$$\begin{aligned} Du_i(q) &= \lim_{t\to 0} \frac{y_i[F^{-1}(X(t,q))] - y_i[F^{-1}(q)]}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{y_i(t+a_1, a_2, \ldots, a_n) - y_i(a_1, \ldots, a_n)}{t} = \delta_{1i}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 2.26 *Sea $D \in \mathcal{D}_k(U)$ y $X\colon \mathcal{W}_D \longrightarrow U$ su grupo uniparamétrico local. Si $p \in U$ y $D_p \neq 0$, entonces existe un entorno de p, $U_p \subset U$, con coordenadas (u_i), tal que si $q \in U_p$ tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, $(t,q) \in \mathcal{W}_D$ y $X(t,q) \in U_p$, entonces $X(t,q)$ tiene coordenadas*

$$(t + x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Demostración. Basta observar que al ser $D = \partial/\partial u_1$, entonces

$$(u_1 \circ X_q)'(t) = 1\ , \qquad (u_i \circ X_q)'(t) = 0. \quad \blacksquare$$

2.8. Campos completos

Sean $D \in \mathcal{D}(U)$ y $f \in \mathcal{L}(U)$, con $f \neq 0$, ¿qué relación existe entre las órbitas de D y las de fD?. Parece natural pensar que deben ser iguales, pues en cada punto $p \in U$, no modificamos la dirección del vector tangente, sólo su tamaño D_p por $f(p)D_p$.

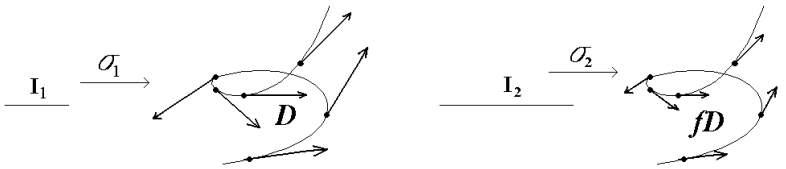


Figura 2.2. Órbitas de D y de fD

No obstante aunque las trayectorias son iguales hay una diferencia, el tiempo que se tarda en llegar a cada punto de la trayectoria, pues si la recorremos con velocidad D tardamos el doble que si la recorremos con velocidad $2D$, es decir que las curvas integrales máximas de D y fD tienen parametrizaciones distintas. En el siguiente resultado justificaremos esta afirmación y lo que es mas importante, daremos la relación que hay entre las dos parametrizaciones.

Teorema 2.27 *Sean $D \in \mathcal{D}_k(U)$ y $f \in \mathcal{C}^k(U)$, (para $k = 0$ localmente lipchicianos), con $f \neq 0$ en todo U. Si $\sigma_1 \colon I_1 \longrightarrow U$ y $\sigma_2 \colon I_2 \longrightarrow U$ son las curvas integrales máximas de D y fD respectivamente, pasando por un $p \in U$, entonces existe un difeomorfismo*

$$h \colon I_2 \longrightarrow I_1,$$

de clase $k+1$ tal que $\sigma_2 = \sigma_1 \circ h$.

Demostración. Si tal difeomorfismo existiera tendría que satisfacer que para cada $t \in I_2$, $x = \sigma_2(t) = \sigma_1[h(t)]$, $D = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i$ y $F = (f_i)$,

$$\begin{aligned} h'(t)F(x) &= h'(t)\sigma_1'[h(t)] = [\sigma_1 \circ h]'(t) \\ &= \sigma_2'(t) = f[\sigma_2(t)] \cdot F[\sigma_2(t)] \\ &= f[\sigma_2(t)] \cdot F(x). \end{aligned}$$

Definamos entonces $h \colon I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$h(t) = \int_0^t f[\sigma_2(s)]ds.$$

Entonces h es de clase k y creciente (ó decreciente), pues $h' \neq 0$, y h' es por tanto positiva en todo punto (ó negativa). Se sigue que h es difeomorfismo local —por tanto $h(I_2) = J_1$ es abierto— y que es inyectiva, por tanto tiene inversa y h es un difeomorfismo de clase k.

Ahora se demuestra fácilmente que

$$\sigma_2 \circ h^{-1} \colon J_1 \longrightarrow U,$$

es una curva integral de D que pasa por p, por tanto $J_1 \subset I_1$ y en J_1, $\sigma_2 \circ h^{-1} = \sigma_1$, por tanto en I_2, $\sigma_2 = \sigma_1 \circ h$.

Falta ver que $J_1 = I_1$.

Por la misma razón si definimos $g\colon I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(t) = \int_0^t \frac{1}{f[\sigma_1(s)]} ds,$$

tendremos que g es un difeomorfismo de I_1 en un intervalo abierto $J_2 \subset I_2$ y en él $\sigma_1 \circ g^{-1} = \sigma_2$, por tanto en I_2, $(g \circ h)' = 1$ y en I_1, $(h \circ g)' = 1$, y como en el origen g y h se anulan, son inversas, por lo que $J_2 = I_2$ y $J_1 = I_1$. ∎

Lema 2.28 *Sean $D \in \mathcal{D}_k(U)$, $p \in U$ y $X_p\colon I(p) \longrightarrow U$ la curva integral máxima de D pasando por p. Si existe una sucesión $t_n \in I(p) = (a, b)$, para la que $t_n \to b$, siendo $-\infty < b < \infty$, entonces no existe compacto en U que contenga a la sucesión $X_p(t_n)$. En particular tal sucesión no tiene punto límite en U. Similármente para a.*

Demostración.- Supongamos que existe un compacto K en U tal que $p_n = X_p(t_n) \in K$. Consideremos para cada $q \in K$ un entorno V_q, de q en U y un $\epsilon_q > 0$ tal que

$$(-\epsilon_q, \epsilon_q) \times V_q \subset \mathcal{W}_D,$$

donde $X\colon \mathcal{W}_D \longrightarrow U$ es el grupo uniparamétrico local de D. Por ser K compacto existe un subrecubrimiento finito $V_1, \ldots, V_n$ de K, y un $\epsilon > 0$ tales que $(-\epsilon, \epsilon) \times V_i \subset \mathcal{W}_D$. Tomemos un $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$, $t_n > b - \epsilon$. Como $p_n = X(t_n, p) \in K$ y por tanto a algún V_i, tendremos que

$$(-\epsilon, \epsilon) \subset I(p_n) = I(p) - t_n,$$

y por tanto $(t_n - \epsilon, t_n + \epsilon) \subset I(p)$, lo cual contradice que $t_n > b - \epsilon$.

Que los p_n no tienen punto límite en U se sigue de que todo punto de U tiene un entorno compacto y basta aplicar lo anterior. ∎

Corolario 2.29 *Si $I(p) = (a, b)$ es un intervalo acotado, entonces la trayectoria de p, $\operatorname{Im} X_p$, es un cerrado de U.*

Demostración.- Tenemos que demostrar que si $\mathcal{O}_p = X_p(I(p))$ y $q_n \in \mathcal{O}_p$, tiene límite $q \in U$, entonces $q \in \mathcal{O}_p$. Como $q_n = X_p(t_n)$ con $t_n \in I(p)$ y t_n tiene un punto límite $t \in [a, b]$, tendremos que si $t \in I(p)$, por ser X_p continua, $X_p(t) = q$, y si $t = b$ —ó $t = a$—, entonces del resultado anterior se sigue que q no existe. ∎

Veamos ahora algunas condiciones suficientes para que un campo sea completo.

Teorema 2.30 *Todo campo lipchiciano D definido en todo $\mathcal{E}$ es completo.*

Demostración.- Recordando la demostración de **(2.14)**, para este caso particular, tenemos que el grupo uniparamétrico X está definido en $[-\epsilon,\epsilon]\times K_q$, para un compacto K_q —cualquiera en nuestro caso— que contenga al q elegido y un $\epsilon>0$, que sólo depende de la constante de lipchicianidad k del campo D —recordemos que $k\epsilon<1$—.

Poniendo $\mathcal{E}$ como unión expansiva de compactos, vemos que X está definida en $[-\epsilon,\epsilon]\times\mathcal{E}$, y por tanto para todo $p\in\mathcal{E}$, $[-\epsilon,\epsilon]\subset I(p)$.

Para ver que X está definida en $[-2\epsilon,2\epsilon]\times\mathcal{E}$, basta coger un $r\in[-\epsilon,\epsilon]$ arbitrario y $q=X(r,p)$. Como $[-\epsilon,\epsilon]\subset I(q)=I(p)-r$, tendremos que $[r-\epsilon,r+\epsilon]\subset I(p)$ y por tanto $[-2\epsilon,2\epsilon]\subset I(p)$, y esto para todo p. El argumento se sigue inductivamente. ∎

Corolario 2.31 *Si $D\in\mathcal{D}_1(\mathcal{E})$ y es de soporte compacto, es decir $D_x=0$ fuera de un compacto, entonces D es completo.*

Definición. Dados $D,E\in\mathcal{D}_{k+1}(U)$, definimos la *derivada covariante* de E respecto de D como el campo $D^\nabla E\in\mathcal{D}_k(U)$, tal que para cada $p\in U$

$$(D^\nabla E)_p=\lim_{t\to0}\frac{E_{X(t,p)}-E_p}{t},$$

donde X es el grupo uniparamétrico de D. (Sobrentendemos la identificación canónica que existe entre los espacios tangentes).

Observemos que si consideramos un sistema de coordenadas lineales (x_i) en $\mathcal{E}$ y $E=\sum h_i\partial_i$, entonces $D^\nabla E(x_i)=Dh_i$, por tanto

$$D^\nabla E=\sum(Dh_i)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Teorema 2.32 *Condición suficiente para que $D\in\mathcal{D}_k(\mathcal{E})$ sea completo es que D ó $D^\nabla D$ ó,..., $D^\nabla\overset{k}{\ldots}{}^\nabla D$, tenga componentes acotadas respecto de algún sistema de coordenadas lineales.*

Demostración.- Hay que demostrar que para cada $p\in\mathcal{E}$, $I(p)=\mathbb{R}$. Sea $I(p)=(a,b)$ y supongamos que $b<\infty$. Si consideramos un sistema de coordenadas lineales (x_i) en $\mathcal{E}$ y denotamos $X_p=(X_1,\ldots,X_n)$, tendremos que

$$X_i(t)=p_i+\int_0^t g_i(s)ds,$$

para $g_i(s) = f_i[X_p(s)]$ y $D = \sum f_i\partial_i$. Ahora bien la condición del enunciado es equivalente a que todas las g_i ó todas las g_i',..., ó las derivadas de orden k de todas las g_i, estén acotadas. En cualquier caso si $t_n \to b$, $X_i(t_n)$ es una sucesión de Cauchy —para todo i— y por tanto lo es $X_p(t_n)$ que tiene un punto límite en $\mathcal{E}$, lo cual contradice a **(2.28)**. ∎

Corolario 2.33 *Sea $D \in \mathcal{D}_L(\mathcal{E})$, (resp. de clase k). Entonces existe una función $f \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, (resp. $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{E})$), $f \neq 0$, tal que fD es completo. Además f puede elegirse para que tome el valor 1 en un compacto K dado de $\mathcal{E}$.*

Demostración.- Consideremos un sistema de coordenadas lineales (x_i) en $\mathcal{E}$, y sean $D = \sum f_i\partial_i$ y

$$g = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum f_i^2}},$$

entonces gD tiene las componentes acotadas. Ahora consideremos una función $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$ —ver el tema I—, tal que $h[\mathcal{E}] = [0, 1]$, $h[K] = 0$ y $h[C] = 1$, para C cerrado disjunto de K y de complementario acotado. Entonces

$$f = \frac{1}{\sqrt{1 + h\sum f_i^2}},$$

satisface el enunciado, pues en K, $fD = D$, y en C, $fD = gD$. ∎

Corolario 2.34 *Sea $U \subset \mathcal{E}$ abierto y $D \in \mathcal{D}_L(U)$, (resp. de clase k). Entonces existe una función $f \in \mathcal{L}(U)$, (resp. $f \in \mathcal{C}^k(U)$), $f \neq 0$, tal que fD es completo. Además f puede elegirse para que tome el valor 1 en un compacto $K \subset U$.*

Demostración.- Consideremos un sistema de coordenadas lineales (x_i) en $\mathcal{E}$, y sea $D = \sum f_i\partial_i$ con las $f_i \in \mathcal{L}(U)$, (resp. $f_i \in \mathcal{C}^k(U)$), entonces por (1.12), pág.11, $f_i = d_i/h_i$, para $d_i \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, (resp. $\in \mathcal{C}^k(\mathcal{E})$) y $h_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$, siendo $h_i \neq 0$ en U y $h_i = 0$ en U^c. Ahora para $h = h_1 \cdots h_n$ y $g_i = d_i \prod_{j\neq i} h_j$, $f_i = g_i/h$; y el campo en $\mathcal{E}$, $E = \sum g_i\partial_i$, coincide en U con hD y se anula fuera. Ahora aplicando el resultado anterior (2.33), existe $f > 0$ tal que $fE = fhD$ es completo, y se sigue el resultado. ∎

Corolario 2.35 *Las órbitas de cualquier $D \in \mathcal{D}_L(U)$ son siempre las órbitas de un campo completo.*

2.9. Corchete de Lie de campos tangentes

En el tema I hemos visto que para cada abierto U de $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}_k(U)$ era un módulo sobre $\mathcal{C}^k(U)$. Ahora veremos que en $\mathcal{D}(U)$ tenemos otra operación natural.

Definición. Sea $k \geq 0$ y $D, E \in \mathcal{D}_{k+1}(U)$, es fácil ver que la composición

$$D \circ E \colon \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^k(U),$$

es $\mathbb{R}$–lineal y se anula en las constantes, aunque no es una derivación pues no verifica la regla de Leibnitz. Sin embargo

$$[D, E] = D \circ E - E \circ D,$$

verifica las tres condiciones y es por tanto un campo tangente de $\mathcal{D}_k(U)$, al que llamaremos *corchete de Lie* de D y E.

Proposición 2.36 *Dados $D_1, D_2, D_3 \in \mathcal{D}_{k+1}(U)$, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$, y $a, b \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes propiedades:*

a) $[D_1, D_2] \in \mathcal{D}_k(U)$.

b) $[D_1, D_2] = -[D_2, D_1]$.

c) $[aD_1 + bD_2, D_3] = a[D_1, D_3] + b[D_2, D_3]$.

d) **Identidad de Jacobi:**

$$[D_1, [D_2, D_3]] + [D_2, [D_3, D_1]] + [D_3, [D_1, D_2]] = 0.$$

e) $[D_1, fD_2] = (D_1 f)D_2 + f[D_1, D_2]$.

Demostración.- Hágase como ejercicio. ∎

Definición. Se llama *álgebra de Lie* en U, a $\mathcal{D}(U)$ con el corchete de Lie $[\ ,\ ]$ como producto.

Veamos que el corchete de Lie se conserva por aplicaciones diferenciables.

Proposición 2.37 *Sea $F \colon U \subset \mathcal{E}_1 \longrightarrow V \subset \mathcal{E}_2$, de clase $k+1$, y para $i = 1, 2$, sean $D_i \in \mathcal{D}_k(U)$ y $E_i \in \mathcal{D}_k(V)$, tales que F lleva D_i en E_i, entonces F lleva $[D_1, D_2]$ en $[E_1, E_2]$.*

Demostración.- Basta demostrar —ver Tema I—, que

$$[D_1, D_2] \circ F^* = F^* \circ [E_1, E_2],$$

lo cual es obvio, pues por hipótesis $D_i \circ F^* = F^* \circ E_i$. ∎

Ejercicio 2.9.1 Demostrar que para cualquier sistema de coordenadas (u_i),

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right] = 0,$$

y si $D_1 = \sum f_i \partial_i$ y $D_2 = \sum g_i \partial_i$ entonces

$$[D_1, D_2] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(f_i \frac{\partial g_k}{\partial u_i} - g_i \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \right) \frac{\partial}{\partial u_k}.$$

Ejercicio 2.9.2 Sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_1(U)$ y $f, g \in \mathcal{C}^1(U)$. Demostrar que

$$[fD_1, gD_2] = fg[D_1, D_2] + f(D_1 g)D_2 - g(D_2 f)D_1.$$

Ejercicio 2.9.3 Calcular los tres corchetes de Lie de los campos de $\mathbb{R}^3$,

$$y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\ , \quad z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\ , \quad \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

2.10. Derivada de Lie de campos tangentes

Sean $D, E \in \mathcal{D}(U)$, con grupos uniparamétricos locales X e Y respectivamente. Para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $p \in U$ podemos definir la función de clase ∞

$$G\colon A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ , \quad G(t,r) = f[X(-t, Y(r, X(t,p)))],$$

donde A es un entorno abierto del $(0,0)$ en $\mathbb{R}^2$.

Es fácil demostrar que para $X(t,p) = x$

$$\frac{\partial G}{\partial r}(t,0) = E(f \circ X_{-t})[X(t,p)] = [(X_{-t})_* E_x]f.$$

Definición. Llamaremos *derivada de Lie* de E respecto de D al campo $D^L E \in \mathcal{D}(U)$ que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $p \in U$ vale

$$(D^L E)f(p) = \lim_{t\to 0}[\frac{(X_{-t})_* E_{X(t,p)} - E_p}{t}]f = \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial t}(0,0).$$

Hay otra forma de escribir la derivada de Lie que puede resultar mas sugestiva pues nos da un modelo que ya hemos utilizado y volveremos a utilizar.

Dado el campo $D \in \mathcal{D}(U)$ y su grupo uniparamétrico local

$$X\colon \mathcal{W}_D \longrightarrow U,$$

tendremos que para $t \in I = \cup_{p\in U} I(p)$, podemos definir los abiertos de U, $U_t = \{p \in U :\ (t,p) \in \mathcal{W}_D\}$, y los difeomorfismos $X_t\colon U_t \longrightarrow U_{-t}$, tales que $X_t(p) = X(t,p)$. Por tanto para cada $E \in \mathcal{D}(U_{-t})$ tendremos que $X_t(E) \in \mathcal{D}(U_t)$, para $[X_t^*(E)]_p = (X_{-t})_* E_{X(t,p)}$ y la derivada de *Lie* se puede expresar de la forma

$$D^L E = \lim_{t\to 0} \frac{X_t^*(E) - E}{t}.$$

Observemos el paralelismo con

$$Df = \lim_{t\to 0} \frac{X_t^* f - f}{t}.$$

Volveremos sobre esta forma de derivar respecto de un campo en el tema III.

Teorema 2.38 $D^L E = [D, E]$.

Demostración.- Consideremos la función diferenciable

$$H\colon B \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\ , \qquad H(t,r,s) = f[X(s, Y(r, X(t,p)))],$$

donde B es un entorno abierto de $(0,0,0)$ en $\mathbb{R}^3$. Aplicando la regla de la cadena tendremos que

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial t}(0,0) = \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t}(0,0,0) - \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial s}(0,0,0),$$

siendo el primer miembro de la expresión de la derecha $D(Ef)(p)$ y el segundo $E(Df)(p)$. El resultado se sigue de la expresión dada en la definición. ∎

Teorema 2.39 *Sean $D, E \in \mathcal{D}(U)$. Entonces si X es el grupo uniparamétrico de D se tiene que $D^L E = 0$ si y sólo si para todo $t \in I = \cup_{p\in U} I(p)$, X_t deja a E invariante.*

Demostración.- Sea $p \in U$ y $t \in I(p)$. Como el difeomorfismo $X_{-t}\colon U_{-t} \longrightarrow U_t$ lleva D en D tendremos que X_{-t} lleva $[D, E]$ en $[D, F]$, para el campo definido en U_t, $F_{X(-t,z)} = X_{-t*}E_z$. Ahora como $D^L E = 0$, se sigue que para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$,

$$\begin{aligned} 0 = [D^L F]f(p) &= \lim_{r\to 0}[\frac{X_{-r*}F_{X(r,p)} - F_p}{r}]f \\ &= \lim_{r\to 0}[\frac{X_{-r*}[X_{-t*}E_{X(t+r,p)}] - X_{-t*}E_{X(t,p)}}{r}]f, \end{aligned}$$

lo cual implica que la función

$$h(t) = X_{-t*}E_{X(t,p)}f,$$

es diferenciable en $I(p)$ y que $h'(t) = 0$. Por tanto tendremos que $h(t) = h(0) = E_p f$. De donde se sigue que X_t lleva E en E. ∎

Para caracterizar los campos que se anulan al hacerles la derivada de Lie respecto de uno dado necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 2.40 *Sea $F\colon U \subset \mathcal{E} \longrightarrow V \subset \mathcal{E}_1$ diferenciable. Si X e Y son los grupos uniparamétricos locales de sendos campos $D \in \mathcal{D}(U)$ y $E \in \mathcal{D}(V)$ respectivamente, entonces F lleva D en E si y sólo si $F \circ X_t = Y_t \circ F$, en el sentido de que si la expresión de la izquierda está definida también lo está la de la derecha y son iguales.*

Demostración.- "⇒" Para cada $p \in U$ y $q = F(p)$ sea $Z = F \circ X_p$, donde X_p es la curva integral máxima de D pasando por p. Entonces $Z(0) = q$ y

$$Z_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t = [F_* \circ X_{p*}]\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t = F_* D_{X_p(t)} = E_{Z(t)},$$

por lo tanto Z es una curva integral de E pasando por q y por la unicidad

$$F[X(t,p)] = Y(t, F(p)).$$

"⇐" Sea $p \in U$ y $q = F(p)$, entonces

$$F_* D_p = F_*[X_{p*}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0] = Y_{q*}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0 = E_q. \quad ∎$$

Proposición 2.41 *Sean $D, E \in \mathcal{D}(U)$. Entonces si X e Y son respectivamente sus grupos uniparamétricos locales, tendremos que $[D, E] = 0$ si y sólo si localmente $X_t \circ Y_s = Y_s \circ X_t$, es decir para todo $p \in U$ existe un abierto U_p entorno de p y un $\delta > 0$, tal que para $|t|, |s| < \delta$, $X_t \circ Y_s = Y_s \circ X_t$ en U_p. Si los campos son completos la igualdad es en todo punto y para $t, s \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $p \in U$, entonces como $\mathcal{W}_D \cap \mathcal{W}_E$ es un abierto de $\mathbb{R} \times U$, entorno de $(0, p)$, existe un entorno abierto V_p, de p en U y un $\epsilon > 0$, tales que

$$(-\epsilon, \epsilon) \times V_p \subset \mathcal{W}_D \cap \mathcal{W}_E,$$

ahora consideremos el abierto $X^{-1}(V_p) \cap Y^{-1}(V_p)$, también entorno de $(0, p)$, para el que existe un entorno abierto U_p, de p en U y un $0 < \delta \leq \epsilon$, tales que $(-\delta, \delta) \times U_p \subset X^{-1}(V_p) \cap Y^{-1}(V_p)$ y por tanto en el que están definidas

$$X, Y \colon (-\delta, \delta) \times U_p \to V_p,$$

entonces se tiene que para todo $q \in U_p$ y $|t|, |s| \leq \delta$ $(X_t \circ Y_q)(s)$ es una curva integral de E que en 0 pasa por $X_t(q)$, por tanto coincide con $Y_s \circ X_t(q)$. ∎

Hemos visto en este último resultado que dos campos conmutan si y sólo si conmutan sus grupos uniparamétricos. Pongámonos otra vez en los términos del enunciado. Podemos definir para cada $p \in U$ la curva

$$\gamma \colon (-\delta, \delta) \longrightarrow U \ , \quad \gamma(t) = [Y_{-t} \circ X_{-t} \circ Y_t \circ X_t](p),$$

que es constante si $[D, E] = 0$. Esta curva nos mide, en cierto modo, la obstrucción que impide que dos campos D y E se comporten como los campos $\partial/\partial u_i$, en el sentido de que su corchete de Lie se anule.

Teorema 2.42 *En los términos anteriores*

$$[D^L E] f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f[\gamma(t)] - f[\gamma(0)]}{t^2}.$$

Demostración. Si consideramos las funciones

$$\begin{aligned} H(a, b, c, d) &= f[Y(a, X(b, Y(c, X(d, p))))] \\ h(t) &= f[\gamma(t)] = H(-t, -t, t, t), \end{aligned}$$

entonces tendremos que calcular el

$$\lim_{t\to 0}\frac{h(t)-h(0)}{t^2}=\frac{h''(0)}{2}$$

Ahora bien

$$h'(t)=[-\frac{\partial H}{\partial a}-\frac{\partial H}{\partial b}+\frac{\partial H}{\partial c}+\frac{\partial H}{\partial d}](-t,-t,t,t),$$

y por tanto

$$\begin{aligned}h''(0)=&[\frac{\partial^2 H}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial c^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial d^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial a\partial b}-2\frac{\partial^2 H}{\partial a\partial c}-\\&-2\frac{\partial^2 H}{\partial a\partial d}-2\frac{\partial^2 H}{\partial b\partial c}-2\frac{\partial^2 H}{\partial b\partial d}+2\frac{\partial^2 H}{\partial c\partial d}](0,0,0,0)=\\&=E(Ef)(p)+D(Df)(p)+E(Ef)(p)+D(Df)(p)+\\&+2D(Ef)(p)-2E(Ef)(p)-2D(Ef)(p)-\\&-2E(Df)(p)-2D(Df)(p)+2D(Ef)(p)=\\&=2[D^L E]f(p).\quad\blacksquare\end{aligned}$$

Definición. Sea Y_t un grupo uniparamétrico en U y E su generador infinitesimal. Diremos que un *campo* $D\in\mathcal{D}(U)$ es *invariante por el grupo* Y_t si $[E,D]=0$, es decir si Y_t lleva D en D, ó en otras palabras cuando Y_t transforma curvas integrales de D en curvas integrales de D —sin alterar su parametrización—.

Definición. Diremos que *la ecuación diferencial* definida por D es *invariante por el grupo* Y_t, si existe una función $f\in\mathcal{C}^\infty(U)$ tal que $[E,D]=fD$, para E el generador infinitesimal de Y_t.

La importancia de este concepto queda de manifiesto en el siguiente resultado.

Teorema 2.43 *Sean $D,E\in\mathcal{D}(U)$ y $p\in U$. Si $E_p\neq 0$, existe un entorno V de p en U en el que las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.- Existe $f\in\mathcal{C}^\infty(V)$ tal que $[E,D]=fD$.

2.- Existe $h\in\mathcal{C}^\infty(V)$, invertible tal que $[E,hD]=0$.

Demostración.- "⇒"

$$[E,hD]=(Eh)D+h[E,D]=(Eh)D+hfD=(Eh+hf)D,$$

Bastará pues tomar h tal que $-f = Eh/h = E(\log h)$, es decir si $E = \partial/\partial v_1$ en un sistema de coordenadas $v_1, \ldots, v_n$,

$$h = \mathrm{e}^{-\int g dx_1}(v_1, \ldots, v_n),$$

donde $g(v_1, \ldots, v_n) = f$, para tener $[E, hD] = 0$.

"$\Leftarrow$"

$$0 = [E, hD] = (Eh)D + h[E, D],$$

y para $f = -Eh/h$, será $[E, D] = fD$. ∎

2.11. Método de Lie para resolver ED

Si en un punto $p \in U$ es $E_p \neq 0$, entonces existe un entorno de p en U, (coordenado por funciones $(u_1, \ldots, u_n)$, en el que $E = \partial/\partial u_n$. En tal caso la condición $[E, D] = 0$, implica, para

$$D = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial u_i},$$

que $\partial f_i/\partial u_n = 0$, es decir que las funciones f_i no dependen de u_n y por tanto no están valoradas en $\mathbb{R}^n$, sino en $\mathbb{R}^{n-1}$, con lo cual hemos logrado rebajar el orden de la ecuación diferencial definida por D.

Esta simple idea, debida a Sophus Lie, es fundamental para la búsqueda de soluciones de una ecuación diferencial definida por un campo D en el plano, pues si encontramos un campo E que nos lo deje invariante, podemos reducirlo — con un cambio de coordenadas — a una ecuación en la recta que automáticamente queda resuelta.

A continuación vamos a desarrollar este método fijando un campo

$$E = h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y},$$

del plano —consideraremos el de las homotecias, el de los giros y el campo $k(x)[\partial/\partial y]$— para encontrar a continuación todas las ecuaciones

diferenciales del plano definidas genéricamente por un campo

$$D = f\frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial y},$$

que son invariantes por el grupo uniparamétrico de E, es decir para las que $[E, D] = 0$. Veamos en tal caso como tienen que ser f y g

$$\left.\begin{array}{l} E(Dx) = D(Ex) \\ E(Dy) = D(Ey) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} Ef = Dh = f\dfrac{\partial h}{\partial x} + g\dfrac{\partial h}{\partial y} \\ Eg = Dk = f\dfrac{\partial k}{\partial x} + g\dfrac{\partial k}{\partial y} \end{array}\right\}.$$

1.- ED invariantes por el campo de las Homotecias.

$$E = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

En este caso tenemos que $h = x$ y $k = y$, por lo que f y g deben satisfacer

$$Ef = f\ , \quad Eg = g.$$

Busquemos un sistema de coordenadas (u, v) en el que $E = \partial/\partial u$, por ejemplo

$$u = \log x, \quad v = \frac{y}{x}.$$

Entonces tendremos que

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial u} = f \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} = g \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \log f = u + \phi_1(v) \\ \log g = u + \phi_2(v) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} f = x \cdot \psi\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ g = x \cdot \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{array}\right\}.$$

En consecuencia toda ecuación diferencial del tipo

$$y' = H\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{–Ecuaciones Diferenciales Homogeneas–}$$

se resuelven poniendo el campo D en las coordenadas (u, v).

2.- ED invariantes por el campo de los Giros.

$$E = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

En este caso tendremos que f y g deben satisfacer, $Ef = -g$ y $Eg = f$, por tanto $E(Ef) = -f$. En el sistema de *coordenadas polares*

$$\begin{cases} \theta = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \end{cases}$$

$E = \partial/\partial\theta$. Para encontrarlo observemos que $E\rho = 0$, por lo que basta encontrar una función θ tal que $E\theta = 1$. Tal función en coordenadas (x, ρ) debe satisfacer

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{-1}{y} = \frac{-1}{\sqrt{\rho^2 - x^2}},$$

es decir $\theta = \operatorname{arc\,cos}(x/\rho)$.

Tenemos ahora que encontrar f y g satisfaciendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} = -f \ , \quad \frac{\partial f}{\partial\theta} = -g.$$

Y como veremos en el tema de sistemas lineales, estas ecuaciones tienen una solución general de la forma

$$f = c_1(\rho)\cdot\cos\theta + c_2(\rho)\cdot \operatorname{sen}\theta \ , \quad g = c_1(\rho)\cdot\operatorname{sen}\theta - c_2(\rho)\cdot\cos\theta.$$

En definitiva en coordenadas (x, y), las ecuaciones diferenciales del tipo

$$y' = \frac{y - xr}{x + yr},$$

para $r(x, y) = h[\sqrt{x^2+y^2}]$, se resuelven haciendo el cambio a coordenadas polares.

3.- ED invariantes por el campo

$$E = k(x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

En este caso tendremos que f y g deben satisfacer

$$Ef = 0 \ , \quad Eg = fk'(x).$$

Busquemos u tal que $Eu = 1$, por ejemplo $u = y/k(x)$. Ahora en el sistema de coordenadas (x, u) tendremos que $E = \partial/\partial u$ y nuestras funciones son tales que

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial u} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} = fk'(x) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f = f(x) \\ g = f(x)k'(x)u + r(x) \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} f = f(x) \\ g = f(x)\dfrac{k'(x)}{k(x)}y + r(x) \end{cases}$$

En definitiva con las coordenadas

$$x, \quad u = \frac{y}{k(x)},$$

resolvemos las ecuaciones diferenciales del tipo

$$y' = a(x) \cdot y + b(x), \qquad \text{–Ecuaciones Diferenciales Lineales–}$$

donde dada la función $a(x)$, tendremos que la coordenada u vale

$$u = \frac{y}{k(x)} = \frac{y}{\mathrm{e}^{\int a(x)dx}},$$

en cuyo caso las trayectorias del campo

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + [a(x)y + b(x)]\frac{\partial}{\partial y},$$

que en coordenadas (x, u) se escribe

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{b(x)}{k(x)}\frac{\partial}{\partial u},$$

se encuentran fácilmente pues tiene una 1–forma incidente exacta

$$du - \frac{b(x)}{k(x)}dx = d[u - \int \frac{b(x)}{k(x)}],$$

por lo que la solución general de la ecuación diferencial lineal es

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int a(x)dx} \cdot \left(\int \frac{b(x)dx}{\mathrm{e}^{\int a(x)dx}} + A \right),$$

cosa que podemos ver también directamente haciendo

$$[y\,\mathrm{e}^{-\int a(x)dx}]' = y'\,\mathrm{e}^{-\int a(x)dx} - ya(x)\,\mathrm{e}^{-\int a(x)dx} = \mathrm{e}^{-\int a(x)dx}\,b(x).$$

Por último observemos que las ecuaciones diferenciales del tipo

$$y' = a(x)\cdot y + b(x)\cdot y^n, \qquad \textbf{–Ecuaciones de Bernoulli–}$$

se resuelven haciendo el cambio $z = y^{1-n}$, pues se obtiene una lineal en z. ∎

Ejercicio 2.11.1 Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x' = \dfrac{1}{x^2} \\ y' = \dfrac{y}{x^3} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x' = \dfrac{-y}{x^2+xy} \\ y' = \dfrac{1}{x+y} \end{array}\right\}$$

Ejercicio 2.11.2 Resolver las ecuaciones diferenciales:

(1) $y' = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, (2) $y' = \dfrac{xy+2x}{x^2+y^2+4y+4}$,

(3) $y' = \dfrac{y-x}{x+y}$ (4) $y' = \dfrac{y-(x+1)^3-(x+1)y^2}{x+1+y^3+y(x+1)^2}$,

(5) $y' = x^2y + x$, (6) $y' = x^2y + xy^3$.

Ejercicio 2.11.3 Encontrar las curvas integrales del campo

$$D = (x+cy-bz)\partial_x + (y+az-cx)\partial_y + (z+bx-ay)\partial_z.$$

Ejercicio 2.11.4 Resolver la ecuación en derivadas parciales:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = y\cdot\log x.$$

Ejercicio 2.11.5 Determinar las trayectorias del campo:

$$D = xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2+x^3)\frac{\partial}{\partial y} + (yz+y^2z+x^2y)\frac{\partial}{\partial z},$$

sabiendo que su ecuación diferencial es invariante por el grupo definido por el campo:

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{x}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Ejercicio 2.11.6 Encontrar la curva que describe un perro que persigue a un conejo que se mueve en línea recta, yendo ambos a velocidad constante.

Ejercicio 2.11.7 Resolver la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \sum f_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t),$$

con la condición inicial $f(x,0) = g(x)$.

Ejercicio 2.11.8 Demostrar que si $f(x,y) = f(-x,y)$ y $g(x,y) = -g(-x,y)$ en $\mathbb{R}^2$, entonces toda curva integral $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ del campo $D = f\partial_x + g\partial_y$, tal que $x(0) = 0 = x(T)$, para un $T > 0$, es $2T$–periódica.

Ejercicio 2.11.9 En una localidad comenzó a nevar a cierta hora de la mañana y continuó nevando a razón constante. La velocidad con que el camión limpianieves limpiaba una calle de la localidad era inversamente proporcional a la altura de la nieve acumulada hasta ese instante. El limpianieves comenzó a las $11h$ y a las $14h$ había limpiado 4 km. A las $17h$ había limpiado otros 2 km. ¿A qué hora empezó a nevar?.

Ejercicio 2.11.10 Dos personas A y B piden café. A le pone una cucharada de leche fría pero no se lo toma. Al cabo de 10 minutos B —que tampoco se lo ha tomado— le pone una cucharada de leche fría (que no ha cambiado de temperatura) y A y B beben el café. ¿Quién lo bebe mas caliente?.

Ejercicio 2.11.11 Un recipiente abierto, lleno de agua, tiene la forma de una semiesfera de R metros de radio. En el fondo tiene un agujero circular de r metros de radio. ¿Cuánto tardará[1] en salir todo el agua del recipiente?..

Ejercicio 2.11.12 Calcula la forma que debe tener el recipiente del ejercicio anterior para que el nivel de la superficie del agua baje a una razón constante.

Ejercicio 2.11.13 Hallar las curvas $y = f(x)$, del plano, que pasan por el origen y tienen la propiedad de que para todo $a \in \mathbb{R}$, el área limitada por la tangente a la curva en $(a, b = f(a))$, el eje y y la recta $y = b$, es proporcional al área limitada por la curva, el eje y y la recta $y = b$.

Ejercicio 2.11.14 Encontrar todas las curvas planas de curvatura constante.

[1] Se admite la ley de Torricelli que dice que el agua sale por el agujero con la misma velocidad ($\sqrt{2gy}$) que obtendría un objeto al caer libremente desde la superficie del agua hasta el agujero, a altura y.

Ejercicio 2.11.15 Hay n moscas ordenadas en los vértices de un n–ágono regular, que se ponen a andar a la misma velocidad y dirigiéndose cada una hacia la siguiente. Dar la trayectoria de la mosca que pasa por un punto cualquiera y calcular la longitud del trayecto recorrido hasta que se encuentra con las demás, en función de su distancia al centro del polígono, en el instante 0.

Ejercicio 2.11.16 Demostrar que el campo de $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + F \frac{\partial}{\partial x_n},$$

en las coordenadas $(x, x_1, \ldots, x_n)$, asociado a las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y^{(n} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

para el que

$$F(x, tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = tF(x, x_1, \ldots, x_n),$$

es invariante por el campo de las homotecias

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Ejercicio 2.11.17 Resolver la ecuación

$$x^2 yy'' = (y - xy')^2,$$

con las condiciones $y(1) = 5$, $y'(1) = 2$.

Ejercicio 2.11.18 Encontrar la forma de unas tijeras, con cuchillas simétricas, tal que el ángulo de corte sea siempre el mismo.

Ejercicio 2.11.19 Encontrar las curvas del plano que en cada punto la distancia de su tangente al origen es la abscisa del punto.

2.12. Apéndice. La tractriz

La tractriz. En 1693 Leibnitz escribe: "*El distinguido médico Parisino Claude Perrault, igualmente famoso por su trabajo en mecánica y en arquitectura, bien conocido por su edición de Vitruvio, e importante miembro de la Real Academia Francesa de las Ciencias, me propuso este problema a mi y a otros muchos antes de mi, admitiendo rápidamente que el no había sido capaz de resolverlo...*"

Claude Perrault[2], planteó dicho problema con su reloj de cadena; lo colocó sobre una mesa rectangular, con la cadena estirada perpendicular al borde de la mesa y desplazó el extremo de la cadena con velocidad constante por el borde de la mesa. El reloj describió un arco de curva. La pregunta fue: ¿qué curva sigue el reloj?.

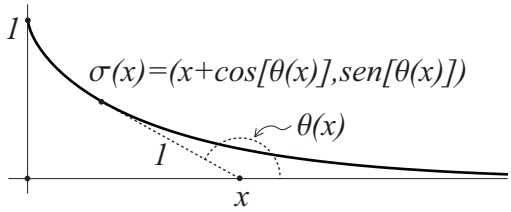


Figura 2.3. Tractriz

La respuesta habitual a este problema, estudiado entre otros por Leibnitz, Huygens y Bernouilli, se basa en suponer que la cadena es tangente a la trayectoria del reloj en cada instante, lo cual no es cierto[3]. Veremos que lo sería si la velocidad de la mano fuese extremadamente pequeña ó, equivalentemente, la fuerza de rozamiento entre la mesa y el reloj extremadamente alta (realmente la tractriz aparecería en la situación límite en cuyo caso paradójicamente el reloj no se movería).

[2]Médico, físico y arquitecto (diseñó la columnata doble de la fachada oriental del Louvre) y hermano mayor de Charles Perrault (escritor de los cuentos de Caperucita roja y la Cenicienta).

[3]Pues en ese caso la fuerza $m\sigma''$ y la velocidad σ' tendrían la misma dirección y reparametrizando la curva con la longitud de arco, tendríamos esa misma propiedad por lo que podemos suponer $1 = \sigma' \cdot \sigma'$, ahora derivando tendríamos $0 = \sigma' \cdot \sigma''$, lo cual implica $\sigma'' = 0$ y la trayectoria es recta.

Analicemos en primer lugar este nuevo problema geométrico, es decir el de la curva del plano cuya tangente en cada punto define un segmento con el eje x de longitud constante; y a continuación estudiaremos el problema original del reloj.

La solución de este, que ya vimos en (1.9.1), es la *tractriz*[4], pero lo veremos ahora de otra forma. Suponemos que la longitud del segmento es 1 y que la curva empieza en $(0,1)$.

Para cada x denotamos con $\theta(x)$ el ángulo que forma la semirrecta $[x,\infty)\times\{0\}$ con el segmento tangente a nuestra curva, unitario y con un extremo en x, en tal caso tendremos que la curva que tiene esa propiedad es

$$\sigma(x) = (x + \cos[\theta(x)], \operatorname{sen}[\theta(x)]),$$

siendo σ' proporcional a $(\cos[\theta], \operatorname{sen}[\theta])$, es decir

$$\frac{1-\theta'\operatorname{sen}[\theta]}{\theta'\cos[\theta]} = \frac{\cos[\theta]}{\operatorname{sen}[\theta]} \qquad (\quad \Leftrightarrow \quad \theta' = \operatorname{sen}[\theta] \quad),$$

ecuación que resolvemos integrando, sabiendo que $\theta(0) = \pi/2$ (y por tanto $\theta'(0) = \operatorname{sen}[\theta(0)] = 1$)

$$x = \int_0^x \frac{\theta'(x)\,dx}{\operatorname{sen}[\theta(x)]} = \int_{\theta(0)}^{\theta(x)} \frac{d\theta}{\operatorname{sen}(\theta)} = \log\tan\frac{\theta}{2}\Big]_{\theta(0)}^{\theta(x)},$$

y la solución es

$$\mathrm{e}^x = \tan\frac{\theta(x)}{2} \qquad (\quad \Leftrightarrow \quad \theta(x) = 2\arctan[\mathrm{e}^x] \quad) \tag{2.8}$$

que corresponde a la *tractriz* (ver la Fig.2.3)

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= (x + \cos[2\arctan[\mathrm{e}^x]], \operatorname{sen}[2\arctan[\mathrm{e}^x]])\\ &= (x + \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}, \frac{2}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}) = \left(x - \tanh[x], \frac{1}{\cosh[x]}\right),\end{aligned}$$

para la que $\sigma(0) = (0,1)$ y $\sigma'(0) = (0,0)$.

[4]Del latín *tractum* (arrastrar) llamada así por Huygens. También es conocida como *curva del perro*, pues se ha considerado erróneamente que también es la trayectoria que sigue un perro que quiere ir hacia un hueso cuando el dueño va en linea recta, o incluso que el perro quiere ir en dirección este cuando el dueño va en dirección norte–sur.

Observemos que con la propiedad definida por la ecuación (2.8), es inmediato construir con regla y compás el punto $\sigma(x)$ si tenemos dibujada la exponencial.

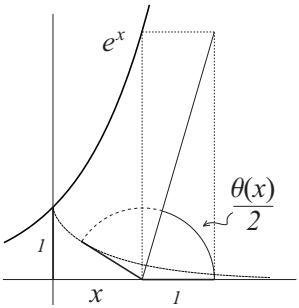


Figura 2.4. La tractriz y la exponencial

Veamos ahora el problema original del reloj. Para hacer un estudio detallado de este problema (aunque simplificado), consideremos en primer lugar que la cadena no tiene masa, que hay un coeficiente de rozamiento constante k, entre el reloj y la mesa; y una velocidad constante v con la que movemos la mano por el borde de la mesa (el eje x), partiendo en el instante inicial de $x = 0$. En cuyo caso en cada instante de tiempo t, la mano está en $(vt, 0)$ y si, como antes, suponemos que la longitud de la cadena es 1, el reloj estará en

$$\sigma[t] = (vt, 0) + (\cos[\theta], \operatorname{sen}[\theta]),$$

y denotando $\beta = (\cos[\theta], \operatorname{sen}[\theta])$ y $\alpha = (-\operatorname{sen}[\theta], \cos[\theta])$ (vector unitario ortogonal a β), tendremos que

$$\sigma = (vt, 0) + \beta, \qquad \dot\sigma = (v, 0) + \dot\theta\alpha, \qquad \ddot\sigma = \ddot\theta\alpha - \dot\theta^2\beta.$$

Ahora bien la aceleración $\ddot\sigma$ del reloj (considerado de masa unidad) es la fuerza total que actúa sobre el reloj, que es suma por una parte de la fuerza con la que tira la cadena $F = f\beta$ (aunque desconocemos con qué intensidad f), y por otra de la resistencia R debida al rozamiento con la mesa. Aquí consideraremos dos posibles hipótesis: (1) que $R = -k\dot\sigma/|\dot\sigma|$ es independiente de la velocidad del reloj, aunque dependiente de su dirección (y no está definida si $\dot\sigma = 0$) y (2) que $R = -k\dot\sigma$ sí depende de la velocidad (y es nula si la velocidad es nula). En cualquier caso

$$\ddot\theta\alpha - \dot\theta^2\beta = \ddot\sigma = F + R = f\beta + (R \cdot \alpha)\alpha + (R \cdot \beta)\beta,$$

e igualando componentes, $\ddot{\theta} = R \cdot \alpha$ y $-\dot{\theta}^2 = f + R \cdot \beta$.

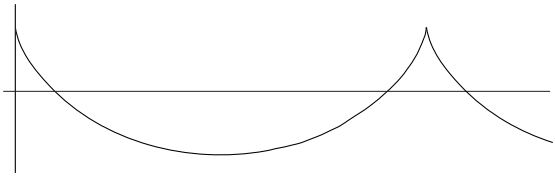


Figura 2.5. Cicloide

Sin rozamiento. En este caso $R = 0$ y por tanto $\ddot{\theta} = 0$, de donde $\theta = at + b$ y la trayectoria es

$$\sigma[t] = (\cos[at + b] + vt, \operatorname{sen}[at + b]),$$

y en nuestras condiciones $\sigma(0) = (0, 1)$, $\sigma'(0) = 0$, (i.e. $a = v$ y $b = \pi/2$) la solución es la cicloide Fig.(2.5).

Con rozamiento Caso (1). En este caso $R = -k\dot{\sigma}/|\dot{\sigma}|$ y

$$\dot{\sigma} = (v - \dot{\theta}\operatorname{sen}[\theta], \dot{\theta}\cos[\theta]),$$
$$\ddot{\theta} = R \cdot \alpha = -k\frac{\dot{\sigma} \cdot \alpha}{|\dot{\sigma}|} = k\frac{v\operatorname{sen}[\theta] - \dot{\theta}}{\sqrt{v^2 - 2v\dot{\theta}\operatorname{sen}[\theta] + \dot{\theta}^2}}.$$

y cambiando de variable $x = tv$, y considerando la nueva derivada $d\theta/dx = \theta'$, tendremos que $\dot{\theta} = v\theta'$ y $\ddot{\theta} = v^2\theta''$, por tanto la ecuación anterior en términos de x es

(2.9)

$$\theta'' = \frac{k}{v^2}\frac{\operatorname{sen}[\theta] - \theta'}{\sqrt{1 - 2\theta'\operatorname{sen}[\theta] + \theta'^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \theta' = z \\ z' = \lambda\dfrac{\operatorname{sen}[\theta] - z}{\sqrt{1 - 2z\operatorname{sen}[\theta] + z^2}} \end{cases}$$

y tenemos que mientras $\lambda = k/v^2$ sea constante las trayectorias no cambian, en particular aumentar el rozamiento k es lo mismo que disminuir adecuadamente la velocidad v. Por ello podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $v = 1$ y analizaremos qué ocurre cuando aumentamos el rozamiento λ. En la Fig.2.6, vemos representado este campo tangente D_λ, para dos valores de λ.

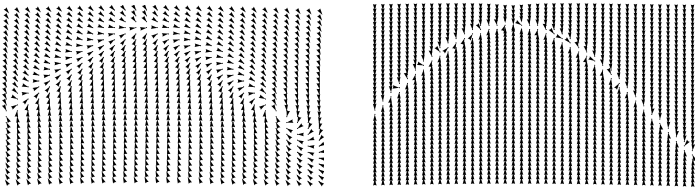


Figura 2.6. Campo para $\lambda = 1$ y $\lambda \approx \infty$

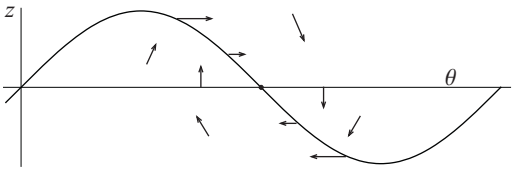


Figura 2.7. Campos D_λ y curva $\operatorname{sen} x$.

Nota 2.44 Observemos (ver Fig.2.7) que este campo tangente

$$D_\lambda = z\partial_\theta + \lambda \frac{\operatorname{sen}[\theta] - z}{\sqrt{1 - 2z\operatorname{sen}[\theta] + z^2}}\partial_z,$$

es 2π–periódico en θ y simétrico respecto del giro de ángulo π en torno al punto singular $(\pi, 0)$, es decir que $D_{\lambda(\pi+\theta,z)} = -D_{\lambda(\pi-\theta,-z)}$, lo cual implica que la curva integral pasando por $(\pi + \theta, z)$ es la que pasa por $(\pi - \theta, -z)$ girada un ángulo π. Además, en la curva $z = \operatorname{sen} x$, el campo es independiente de λ y horizontal $(z\partial_\theta)$ (dirección E en $z > 0$ y O en $z < 0$). Es vertical en la recta $z = 0$ (dirección N en $\theta \in (0, \pi)$ y S en $\theta \in (\pi, 2\pi)$). Tiene dirección SE en la región $\{z > \operatorname{sen}\theta\} \cap \{z > 0\}$, SO en $\{z > \operatorname{sen}\theta\} \cap \{z < 0\}$, NO en $\{z < \operatorname{sen}\theta\} \cap \{z < 0\}$ y NE en $\{z < \operatorname{sen}\theta\} \cap \{z > 0\}$.

Ahora la curva que describe el reloj parametrizada por $t = x$ es (para θ_λ solución de (2.9))

$$\sigma_\lambda(t) = (t + \cos[\theta_\lambda(t)], \operatorname{sen}[\theta_\lambda(t)]) \tag{2.10}$$

y nos interesa la que satisface las condiciones $\sigma_\lambda(0) = (0, 1)$ y $\sigma'_\lambda(0) = 0$, lo cual equivale a que θ_λ satisfaga $\theta_\lambda(0) = \pi/2$ y $\theta'_\lambda(0) = 1$, pero este es el único punto —en $0 \le \theta \le \pi$—, en el que D_λ no está definido, pues

aunque la segunda componente del campo está acotada en módulo por λ, pues

$$0 \leq (\operatorname{sen}[\theta] - z)^2 = \operatorname{sen}^2[\theta] - 2z\operatorname{sen}[\theta] + z^2 \leq 1 - 2z\operatorname{sen}[\theta] + z^2,$$

el denominador $\sqrt{1 - 2z\operatorname{sen}[\theta] + z^2}$ se anula sii se anula el numerador $\operatorname{sen}[\theta] - z$ y $\operatorname{sen}^2[\theta] = 1$ (lo cual ocurre en los puntos $\theta = \pi/2 + n\pi$, $z = (-1)^n$)); y la función $f = (\operatorname{sen}[\theta] - z)/\sqrt{1 - 2z\operatorname{sen}[\theta] + z^2}$ no está definida en estos puntos, en particular en el punto que nos interesa $(\theta, z) = (\pi/2, 1)$, pues $f(\pi/2, z) = \pm 1$, mientras que $f(\theta, \operatorname{sen}[\theta]) = 0$. En la Fig.2.8, vemos la gráfica de f.

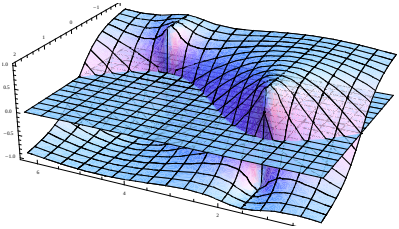


Figura 2.8. Gráfica de f y plano $z = 0$.

Por tanto optaremos por coger un punto próximo a $(\pi/2, 1)$ y demostraremos que si θ_λ es la solución de (2.9) pasando por él, es decir satisfaciendo $\theta_\lambda(0) = \pi/2$ y $\theta'_\lambda(0) \approx 1$, la curva correspondiente

$$\sigma_\lambda(t) = (t + \cos\theta_\lambda(t), \operatorname{sen}\theta_\lambda(t)),$$

que pasa por $\sigma_\lambda(0) = (0, 1)$, con velocidad casi nula, $\sigma'_\lambda(0) \approx (0, 0)$ es para $\lambda \approx \infty$, $\sigma_\lambda \approx \sigma$ (es decir próxima a la tractriz).

Observemos que el caso $\lambda = \infty$ (es decir, velocidad nula ó rozamiento ∞), induce a considerar la ecuación $\theta' = \operatorname{sen}[\theta]$, que define la tractriz según vimos al principio.

Proposición 2.45 *Dado $\epsilon > 0$, existe un λ_ϵ a partir del cual, $|\theta'_\lambda(x) - \operatorname{sen}[\theta_\lambda(x)]| \leq \epsilon$, para la curva integral $\tau_\lambda = (\theta_\lambda, \theta'_\lambda)$ de D_λ satisfaciendo $\theta_\lambda(0) = \pi/2$ y $\theta'_\lambda(0) = 1 + \epsilon$, y existe un primer tiempo T_λ, tal que $\theta_\lambda(T_\lambda) = \pi$, a partir del cual $|\theta_\lambda(t) - \pi| \leq \epsilon$. Además para $\lambda_\epsilon < \mu < \lambda$, la curva $\tau_\lambda[0, T_\lambda]$ se encuentra entre $z = \operatorname{sen} x$ y $\tau_\mu[0, T_\mu]$.*

Demostración. Se sigue de la nota (2.44), que la curva integral τ_λ del campo tangente D_λ va por encima de $z = \operatorname{sen}\theta$, descendiendo en

dirección SE, hasta que llega a la recta $z = 0$ a la que corta perpendicularmente en un $\pi + \alpha$ (con $\alpha > 0$) y sigue descendiendo dirección SO hasta que corta horizontalmente la curva hacia el E y sigue en dirección ascendente NO hasta cortar de nuevo perpendicularmente $z = 0$ en un punto $\pi - \beta$, (con $\beta < \alpha$, pues en caso contrario la curva integral pasando por $(\pi - \alpha, 0)$ que por la nota (2.44) sería la τ_λ girada, se cortaría con τ_λ) y seguir subiendo dirección NE hasta cortar de nuevo la curva horizontalmente y continuar este proceso en espiral indefinidamente en torno al punto singular $(\pi, 0)$. En particular a partir del momento en el que $\theta_\lambda(t) \geq \pi - \alpha$, $|\theta_\lambda - \pi| \leq \alpha$.

Ahora, a medida que λ crece el campo se hace más vertical en los puntos $z \neq \operatorname{sen}\theta$ y a partir de un λ_ϵ apunta hacia el interior de la región $|z - \operatorname{sen}(\theta)| \leq \epsilon$ y $\pi/2 \leq \theta \leq \pi + \delta = \operatorname{arc\,sen}(-\epsilon)$ (ver Fig.2.9), por tanto todas las curvas satisfacen $|\theta'_\lambda(x) - \operatorname{sen}[\theta_\lambda(x)]| \leq \epsilon$. (Observemos que δ es del orden de ϵ, pues la derivada en π del seno es -1).

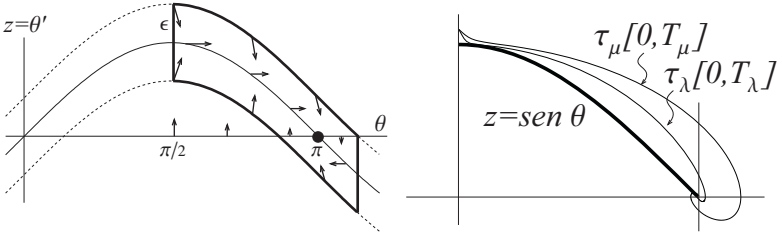


Figura 2.9. El campo apunta hacia el interior de la región.

Lo último se sigue de que D_λ apunta hacia el interior de la región limitada por $\tau_\mu[0, T_\mu]$, $\theta \in [\pi/2, \pi]$ y $z = \operatorname{sen}\theta$, en los puntos de las dos curvas (ver Fig.(2.9)). ∎

Proposición 2.46 *En los términos del resultado anterior (2.45), para cada $\lambda > \lambda_\epsilon$, $\theta_\lambda \colon [0, T_\lambda] \to \mathbb{R}$ tiene inversa $t_\lambda \colon [\pi/2, \pi] \to \mathbb{R}$, es creciente, convexa y si $\mu < \lambda$, $t_\mu < t_\lambda < t$, para t la inversa de θ (de la tractriz), siendo sus diferencias crecientes.*

Demostración. De (2.45) se sigue que en $[0, T_\lambda]$, $\theta'_\lambda > 0$ y $\theta''_\lambda < 0$, por tanto θ_λ es creciente (y tiene inversa t_λ) y cóncava, por tanto t_λ es creciente y convexa. Además si $\mu < \lambda$, para $\alpha \in [\pi/2, \pi]$, $t_\mu(\alpha) < t_\lambda(\alpha) < t(\alpha)$, pues por la última afirmación de (2.45)

$$\alpha = \theta[t(\alpha)] = \theta_\lambda[t_\lambda(\alpha)] = \theta_\mu[t_\mu(\alpha)],$$
$$\theta'[t(\alpha)] = \operatorname{sen}[\alpha] < \theta'_\lambda[t_\lambda(\alpha)] < \theta'_\mu[t_\mu(\alpha)],$$

por tanto $t'_\mu(\alpha) < t'_\lambda(\alpha) < t'(\alpha)$ de donde $t_\lambda - t_\mu$ y $t - t_\lambda$ tienen derivadas > 0 y por tanto son crecientes y como en $\pi/2$ valen 0, se sigue el resultado. ∎

Teorema 2.47 *Dado $\epsilon > 0$ consideremos la solución θ_λ de (2.9) satisfaciendo $\theta_\lambda(0) = \pi/2$ y $\theta'_\lambda(0) = 1 + \epsilon$, entonces existe un λ_0 a partir del cual, $|\theta_\lambda(t) - \theta(t)| \leq \epsilon$.*

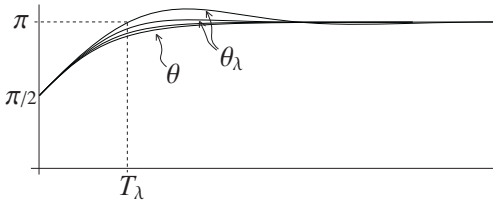


Figura 2.10.

Demostración. Basta considerar un λ tal que $t[\pi-\epsilon]-t_\lambda[\pi-\epsilon] < \epsilon$, pues en tal caso $t[\alpha] - t_\lambda[\alpha] < \epsilon$, para todo $\alpha \in [\pi/2, \pi - \epsilon]$ y como $\theta' = \operatorname{sen}\theta \leq 1$, se sigue del teorema del valor medio que $0 < \theta_\lambda - \theta \leq \epsilon$, para $t \in [0, T_\epsilon]$, siendo $\theta(T_\epsilon) = \pi - \epsilon$; pues si en algún t fuese $\theta_\lambda(t) - \theta(t) > \epsilon$, tendríamos que existe un $r \in [t, t[\theta_\lambda(t)]]$, para el que

$$\theta'(r)(t[\theta_\lambda(t)] - t) = \theta_\lambda(t) - \theta(t),$$

siendo $t[\theta_\lambda(t)]-t = t[\theta_\lambda(t)]-t_\lambda[\theta_\lambda(t)] < \epsilon$ y esto implicaría que $\theta'(r) > 1$.

Ahora para $t \in [T_\epsilon, \infty)$, $\theta(t), \theta_\lambda(t) \in [\pi - \epsilon, \pi + \epsilon]$ y el resultado se sigue. ∎

Teorema 2.48 *Cuando $\lambda \to \infty$ y $\epsilon \to 0$, $\sigma_\lambda \to \sigma$.*

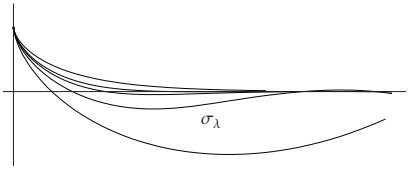


Figura 2.11. Curvas σ_λ para $\lambda = 0'1$, 1, 2 y 10000

Con rozamiento Caso (2). En este caso $R = -k\dot{\sigma}$

$$\dot{\sigma} = (v - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}[\theta], \dot{\theta}\cos[\theta]),$$
$$\ddot{\theta} = R \cdot \alpha = -k\dot{\sigma} \cdot \alpha = k(v\,\mathrm{sen}[\theta] - \dot{\theta}),$$

y cambiando de variable $x = tv$, y considerando la nueva derivada $d\theta/dx = \theta'$, tendremos que $\dot{\theta} = v\theta'$ y $\ddot{\theta} = v^2\theta''$, por tanto la ecuación anterior en términos de x es

$$\theta'' = \frac{k}{v}(\mathrm{sen}[\theta] - \theta').$$

y en este caso tenemos que mientras $\lambda = k/v$ sea constante las trayectorias no cambian.

El análisis es mas sencillo que en el caso (1) pues el campo que antes no estaba definido en el punto $(\pi/2, 1)$ ahora si lo está y podemos considerar la solución σ_λ que parte de $(0, 1)$ con velocidad nula. Básicamente se repiten los argumentos, siendo la conclusión la misma, las curvas tienden a la tractriz cuando $\lambda \to \infty$.

2.13. Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.3.2.- a) Demostrar que si $f\colon U\times V \longrightarrow \mathcal{E}_3$ es localmente lipchiciana entonces es localmente lipchiciana en V uniformemente en U y que $\mathcal{L}(U\times V)\subset \mathcal{L}_U(U\times V)$.

b) Demostrar que $f=(f_i)\colon U\times V\longrightarrow \mathbb{R}^k$ es localmente lipchiciana en V uniformemente en U si y sólo si lo son las f_i.

c) Si $f\in \mathcal{L}_U(U\times V)$, entonces f es lipchiciana en cualquier compacto $K_2\subset V$, uniformemente en cualquier compacto $K_1\subset U$.

Solución.- (c) Demuéstrese primero en un compacto $K_1\times K_2$ convexo. ∎

Ejercicio 2.3.5.- Demostrar que si $\sigma\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ es una curva diferenciable, entonces en $\sigma\neq 0$, $|\sigma|'=|\sigma'|\cos(\sigma\sigma')$.

Indicación. Derivando $\sigma\cdot\sigma=|\sigma|^2$, tenemos

$$|\sigma|\cdot|\sigma'|\cdot\cos(\sigma\sigma')=\sigma\cdot\sigma'=|\sigma|\cdot|\sigma|'. \quad ∎$$

Ejercicio 2.3.6.- Demostrar que si $y'\leq ky+r$, con $k>0$ y $r\in\mathbb{R}$, en $[a,b]$, entonces

$$y(x)\leq y(a)\,\mathrm{e}^{k(x-a)}+\frac{r}{k}(\mathrm{e}^{k(x-a)}-1).$$

Indicación. Integrando $(y\,\mathrm{e}^{-kx})'=\mathrm{e}^{-kx}(y'-ky)\leq r\,\mathrm{e}^{-kx}$, tenemos

$$\begin{aligned} y(x)\,\mathrm{e}^{-kx} &\leq y(a)\,\mathrm{e}^{-ka}+r\int_a^x \mathrm{e}^{-kx}\,dx \\ &= y(a)\,\mathrm{e}^{-ka}+\frac{r}{k}(\mathrm{e}^{-ka}-\mathrm{e}^{-kx}) \quad \Rightarrow \\ y(x) &\leq y(a)\,\mathrm{e}^{k(x-a)}+\frac{r}{k}(\mathrm{e}^{k(x-a)}-1). \quad ∎ \end{aligned}$$

Ejercicio 2.3.7.- Demostrar que si $F\colon U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es Lipschiciana en el abierto U, con constante k y $\sigma_i\colon I=(a,b)\subset\mathbb{R}\to U$, $i=1,2$, son dos curvas diferenciables para las que $0\in I$ y $|\sigma_i'-F(\sigma_i)|\leq\epsilon/2$, entonces para $t\geq 0$ e $y(t)=|\sigma_1(t)-\sigma_2(t)|$

$$y(t)\leq y(0)\,\mathrm{e}^{kt}+\frac{\epsilon}{k}(\mathrm{e}^{kt}-1).$$

Indicación. Por (2.3.5)

$$\begin{aligned} y' &\leq |\sigma_1'(t)-\sigma_2'(t)| = |\sigma_1'(t)-\sigma_2'(t)+F[\sigma_1(t)]-F[\sigma_1(t)]+F[\sigma_2(t)]-F[\sigma_2(t)]| \\ &\leq \epsilon+|F[\sigma_1(t)]-F[\sigma_2(t)]|\leq \epsilon+k|\sigma_1(t)-\sigma_2(t)|=ky+\epsilon, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue aplicando (2.3.6). ∎

Ejercicio 2.5.1.- Encontrar el grupo uniparamétrico de los campos $(1/x)\partial_x$ en $(0,\infty)$ y $x^2\partial_x$ en $\mathbb{R}$.

Indicación. Para el primero tenemos la ecuación $x' = 1/x$, por tanto $(x^2/2)' = x'x = 1$ y $x(t) = \sqrt{2(t+c)}$ y el grupo uniparamétrico es

$$\sigma(t,p) = \sigma_p(t) = \sqrt{2t+p^2}, \qquad I(p) = \left(-\frac{p^2}{2}, \infty\right)$$

Para el segundo tenemos que $x' = x^2$, por tanto $\sigma_p(t) = 0$ para $p = 0$ y para $p \neq 0$, como $(1/x)' = -1$, es $x = 1/(c-t)$, para c constante y las curvas integrales son

$$\text{(para } \quad p > 0), \quad \sigma_p(t) = \frac{1}{\frac{1}{p} - t} = \frac{p}{1-pt}, \quad I(p) = \left(-\infty, \frac{1}{p}\right)$$

$$\text{(para } \quad p < 0), \quad \sigma_p(t) = \frac{1}{\frac{1}{p} - t} = \frac{p}{1-pt}, \quad I(p) = \left(\frac{1}{p}, \infty\right). \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.11.1.- Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y' &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{x^2} \\ y' &= \frac{y}{x^3} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x' &= \frac{-y}{x^2+xy} \\ y' &= \frac{1}{x+y} \end{aligned}\right\}$$

Ind.- La primera ecuación corresponde al campo fD para

$$f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{y} \qquad D = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

La segunda es múltiplo del mismo campo y la tercera corresponde a

$$f = \frac{1}{x^2+xy} \qquad \text{y} \qquad D = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y},$$

y se resuelven haciendo uso del resultado **(2.27)**. $\blacksquare$

Ejercicio 2.11.2.- Resolver las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} &(1)\ \ y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}, && (2)\ \ y' = \frac{xy+2x}{x^2+y^2+4y+4}, \\ &(3)\ \ y' = \frac{y-x}{x+y} && (4)\ \ y' = \frac{y-(x+1)^3-(x+1)y^2}{x+1+y^3+y(x+1)^2}, \\ &(5)\ \ y' = x^2y + x, && (6)\ \ y' = x^2y + xy^3. \end{aligned}$$

Indicación.- (1) y (3) son homogéneas, (2) también considerando el cambio $u = x$, $v = y+2$.

(4) es invariante por los giros considerando el cambio $u = x+1$, $v = y$.

(5) es lineal y (6) de Bernoulli. $\blacksquare$

Ejercicio 2.11.3.- Encontrar las curvas integrales del campo

$$D = (x + cy - bz)\partial_x + (y + az - cx)\partial_y + (z + bx - ay)\partial_z.$$

Indicación.- $D = H + G$, para H el campo de las homotecias y G el de los giros en torno al eje definido por (a, b, c), pues sus componentes son $(x, y, z) \times (a, b, c)$. Denotemos $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Ahora podemos simplificar el problema si consideramos un giro en el espacio que nos lleve el vector unitario $e_3 = (a, b, c)/R$, al $(0, 0, 1)$. Para ello basta considerar un giro como

$$\begin{pmatrix} \frac{ac}{rR} & \frac{bc}{rR} & -\frac{r}{R} \\ \frac{-b}{r} & \frac{a}{r} & 0 \\ \frac{a}{R} & \frac{b}{R} & \frac{c}{R} \end{pmatrix}$$

cuya tercera fila es e_3, la segunda el vector unitario $e_2 = (-b, a, 0)/r$, para $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, perpendicular a e_3 y la primera $e_1 = e_2 \times e_3$ de modo que los tres son ortonormales y bien orientados (observemos que su inversa, que es su traspuesta, lleva la estandar en ellos). Esta transformación nos define las nuevas coordenadas lineales

$$u = \frac{acx + bcy - r^2 z}{rR}, \quad v = \frac{-bx + ay}{r}, \quad w = \frac{ax + by + cz}{R},$$

en las que el campo es $D = (u + Rv)\partial_u + (v - Ru)\partial_v + w\partial_w$, pues

$$\begin{aligned} Du &= \frac{ac(x + cy - bz) + bc(y + az - cx) - r^2(z + bx - ay)}{rR} = u + Rv, \\ Dv &= v - Ru, \\ Dw &= \frac{a(x + cy - bz) + b(y + az - cx) + c(z + bx - ay)}{R} = w, \end{aligned}$$

por tanto como $Dw = w$ y $D\rho' = \rho'$, para $\rho' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, pues $H\rho' = \rho'$ y $G\rho' = 0$, tendremos una integral primera de D, $f = w/\rho'$, que para φ el ángulo que forman (a, b, c) y (x, y, z) es

$$f = \frac{w}{\rho'} = \frac{ax + by + cz}{R\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos\varphi,$$

que nos dice que las curvas están en un cono de eje e_3. Ahora buscamos otra integral primera g, que no dependa de w, por tanto del campo $E = (u + Rv)\partial_u + (v - Ru)\partial_v$, que hemos visto en la pág. 110, es invariante por el campo de los giros y se resuelve en coordenadas polares $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$, $\theta = \arccos u/\rho$, para las que

$$\begin{aligned} \rho_u &= \frac{u}{\rho}, & \theta_u &= \frac{-v}{\rho^2} \\ \rho_v &= \frac{v}{\rho}, & \theta_v &= \frac{u}{\rho^2} \end{aligned}$$

y en estas coordenadas $E = \rho\partial_\rho - R\partial_\theta$, que tiene integral primera $\rho\, \mathrm{e}^{\theta/R}$ que donde es constante es una espiral. Por lo tanto nuestras curvas son espirales ascendentes en conos de eje e. ∎

Ejercicio 2.11.4.- Resolver la ecuación en derivadas parciales:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = y \cdot \log\, x.$$

Indicación.- Buscar coordenadas (u, v) en las que $x\partial_x + y\partial_y = \partial_u$. ∎

Ejercicio 2.11.5.- Determinar las trayectorias del campo:

$$D = xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 + x^3)\frac{\partial}{\partial y} + (yz + y^2 z + x^2 y)\frac{\partial}{\partial z},$$

sabiendo que su ecuación diferencial es invariante por el grupo definido por el campo:

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{x}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Solución.- Sabemos que existe una función g, tal que $[D_1, gD] = 0$. Por otra parte como

$$D_1 = \frac{1}{x}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

tendremos que $D_1 x = 1$, $D_1(y/x) = 0$ y $D_1(z/x) = 0$, por lo que, $D_1 = \partial_x$ en las coordenadas $(x,\ u = y/x,\ v = z/x)$. Escribamos pues D en estas coordenadas,

$$D = ux^2\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u} + (uv + 1)\frac{\partial}{\partial v}\right),$$

y podemos olvidarnos del término ux^2, pues solo nos interesan las trayectorias de D. En definitiva tendremos que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$u'(x) = \frac{1}{u}\ , \quad v'(x) = uv + 1,$$

ó lo que es lo mismo queremos encontrar las curvas integrales del campo bidimensional

$$E = \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u} + (uv + 1)\frac{\partial}{\partial v}.$$

Como este campo es del tipo lineal podemos encontrar sus trayectorias en las coordenadas

$$u, \qquad w = v \cdot e^{-u^3/3},$$

en las que se tiene que

$$E = \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u} + \mathrm{e}^{-u^3/3}\frac{\partial}{\partial w},$$

y sus trayectorias vienen dadas por

$$w'(u) = u\mathrm{e}^{-u^3/3},$$

es decir si $f(u)$ es una primitiva de $u\mathrm{e}^{-u^3/3}$, las trayectorias de E vienen dadas por $h_1 = constante$, para

$$h_1 = w - f(u),$$

pues $Eh_1 = 0$. Por tanto $Dh_1 = 0$.

Ahora bien nosotros queremos las trayectorias de D, para ello basta ver que a lo largo de ellas $u'(x) = 1/u$, es decir $u^2/2 = x + cte$, es decir $Dh_2 = 0$ para

$$h_2 = \frac{u^2}{2} - x.$$

Se sigue que las curvas integrales de D son

$$h_1 = cte\ , \quad h_2 = cte. \ \blacksquare$$

Ejercicio 2.11.6.- Encontrar la curva que describe un perro que persigue a un conejo que se mueve en línea recta, yendo ambos a velocidad constante.

Solución.- Suponemos que el conejo en el instante 0 estaba en el origen y el perro en el punto (a_0, b_0), y que el conejo corre con velocidad constante a por el eje y. En estas condiciones se tiene que si el perro —que corre con velocidad constante b— en el instante t se encuentra en el punto $[x(t), y(t)]$, entonces

$$x' = -\frac{xb}{\sqrt{x^2 + (ta - y)^2}}\ , \quad y' = \frac{b(ta - y)}{\sqrt{x^2 + (ta - y)^2}}.$$

Consideremos entonces el campo tangente —del cual sólo nos interesa la trayectoria pasando por el punto de coordenadas $(x = a_0, y = b_0, t = 0)$, proyectadas en el plano xy—

$$-bx\frac{\partial}{\partial x} + b(ta - y)\frac{\partial}{\partial y} + \sqrt{x^2 + (ta - y)^2}\,\frac{\partial}{\partial t},$$

que en las coordenadas $(x, y, z = ta - y)$, se escribe

$$-bx\frac{\partial}{\partial x} + bz\frac{\partial}{\partial y} + [a\sqrt{x^2 + z^2} - bz]\frac{\partial}{\partial z}.$$

Si ahora dividimos este campo por bz, y llamamos $k = -a/b$, tendremos que sus trayectorias —que es lo que nos interesa— no se modifican. Así pues consideremos el campo

$$E = -\frac{x}{z}\frac{\partial}{\partial x} + \left[k\sqrt{\frac{x^2}{z^2} + 1} - 1\right]\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y},$$

del que sólo nos interesa la trayectoria

$$\sigma(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)),$$

que pasa por el punto $(x = a_0, y = b_0, z = -b_0)$ y de esta trayectoria sólo nos interesa la relación entre $x_1(t)$ e $y_1(t) = t + b_0$. Proyectemos el campo E al plano xz

$$D = -\frac{x}{z}\frac{\partial}{\partial x} + \left[k\sqrt{\frac{x^2}{z^2} + 1} - 1\right]\frac{\partial}{\partial z},$$

y sea

$$\sigma_1(t) = (x_1(t), z_1(t)),$$

su curva integral pasando por el punto de coordenadas $(x = a_0, z = -b_0)$. Ahora como D es homogéneo sabemos que en las coordenadas $(u = z/x,\ v = \mathrm{Log}\, x)$ se simplifica

$$D = \frac{1}{z}\left[k\sqrt{u^2 + 1}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right].$$

Ahora podemos encontrar las trayectorias de D considerando su 1–forma incidente,

$$\omega = \frac{du}{k\sqrt{u^2 + 1}} + dv = dh,$$

donde

$$h = v + \int \frac{du}{k\sqrt{u^2+1}} = v + \frac{1}{k}\cdot \log[u + \sqrt{u^2+1}].$$

Entonces h es una integral primera de D y por tanto de E. Se sigue que las trayectorias de D son

$$v = -\frac{1}{k}\log[u + (u^2+1)^{1/2}] + cte,$$

y en términos de (x, z), las trayectorias son

$$z = \frac{A}{2}x^{1-k} - \frac{1}{2A}x^{1+k}, \tag{2.11}$$

y la nuestra es la que pasa por el punto p de coordenadas $x = a_0$, $z = -b_0$.

Ahora bien con (2.11) podemos construir la curva integral de fD, con $f = -u = -z/x$, que pasa por p, en las coordenadas (x, z), de la forma

$$\sigma_2(r) = (r + a_0,\ \frac{A}{2}(r+a_0)^{1-k} - \frac{1}{2A}(r+a_0)^{1+k}),$$

y nosotros queremos la de D. Sabemos que si σ_2 es la curva integral de fF pasando por el punto p y σ_1 la de F, entonces $\sigma_2 = \sigma_1 \circ h_1$, donde

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \int_0^t f[\sigma_2(s)]ds \\ &= -\int_0^t \left[\frac{A}{2}(s+a_0)^{-k} - \frac{1}{2A}(s+a_0)^k\right] ds \\ &= \int_{a_0}^{t+a_0} \left[\frac{1}{2A}s^k - \frac{A}{2}s^{-k}\right] ds. \end{aligned}$$

Ahora bien nosotros queremos la relación entre $x_1(t)$ e $y_1(t) = t + b_0$, y sabemos que para cada r y cada $t = h_1(r)$ se tiene que

$$(x_1(t), z_1(t)) = \sigma_1(t) = \sigma_1[h_1(r)] = \sigma_2(r),$$

por lo que

$$x_1(t) = r + a_0 = h_1^{-1}(t) + a_0, \qquad y_1(t) = t + b_0,$$

es decir que $h_1[x_1(t) - a_0] = t = y_1(t) - b_0$, por lo que la curva $(x_1(t), y_1(t))$ está definida por

$$\begin{aligned} y = b_0 + h_1(x - a_0) &= b_0 + \int_{a_0}^{x} \left[\frac{1}{2A}s^k - \frac{A}{2}s^{-k}\right] ds \\ &= \begin{cases} b_0 + \frac{x^2-a_0^2}{4A} - \frac{A}{2}\log x + \frac{A}{2}\log a_0, & \text{para } k = 1 \\ b_0 - \frac{(x^2-a_0^2)A}{4} + \frac{1}{2A}\log x - \frac{1}{2A}\log a_0, & \text{para } k = -1 \\ b_0 + \frac{x^{k+1}}{2A(k+1)} + \frac{Ax^{1-k}}{2(k-1)} - \frac{a_0^{k+1}}{2A(k+1)} - \frac{Aa_0^{1-k}}{2(k-1)}, & \text{para cualquier otro } k \end{cases} \end{aligned}$$

∎

Ejercicio 2.11.7.- Resolver la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \sum f_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t),$$

con la condición inicial $f(x,0) = g(x)$.

Ind.: Sea $D = \sum f_i \partial_i$ con grupo uniparamétrico X_t. Entonces $f = g \circ X_t$ es una solución. ∎

Ejercicio 2.11.8.- Demostrar que si $f(x,y) = f(-x,y)$ y $g(x,y) = -g(-x,y)$ en $\mathbb{R}^2$, entonces toda curva integral $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ del campo $D = f\partial_x + g\partial_y$, tal que $x(0) = 0 = x(T)$, para un $T > 0$, es $2T$–periódica.

Solución. Observemos que D es horizontal en el eje y, pues $g(0,y) = -g(0,y)$ por tanto $g(0,y) = 0$. La curva integral σ tiene una continuación única en $[-T,0]$ (que es su reflexión sobre el eje y), considerando para $t \in [-T,0]$, $x(t) = -x(-t)$ e $y(t) = y(-t)$, que obviamente en 0 es $\sigma(0)$ y en todo punto es tangente a D, pues

$$x'(t) = x'(-t) = f(x(-t), y(-t)) = f(x(t), y(t)),$$
$$y'(t) = -y'(-t) = -g(x(-t), y(-t))) = g(x(t), y(t)).$$

Además en $-T$ coincide con $\sigma(T)$, pues $x(-T) = 0 = x(T)$, $y(-T) = y(T)$. ∎

Ejercicio 2.11.9.- En una localidad comenzó a nevar a cierta hora de la mañana y continuó nevando a razón constante. La velocidad con que el camión limpianieves limpiaba una calle de la localidad era inversamente proporcional a la altura de la nieve acumulada hasta ese instante. El limpianieves comenzó a las $11h$ y a las $14h$ había limpiado 4 km. A las $17h$ había limpiado otros 2 km. ¿A qué hora empezó a nevar?.

Indicación.- Sea T el instante en el que empezó a nevar y a la razón de nevada, por tanto la altura de la nieve en el instante $t > T$ era $a(t-T)$ y si para $t \geq 11$, $x(t)$ es el espacio recorrido por el limpianieves entre las 11 y las t horas, tendremos que $x'(t) = b/a(t-T)$, para b una constante. Por tanto como $x(11) = 0$ $x(t) = (b/a)\log\frac{t-T}{11-T}$ y por los dos datos, si llamamos $y = 14 - T > 3$:

$$\begin{array}{l} 4 = x(14) = \frac{b}{a}\log\frac{y}{y-3} \\ 6 = x(17) = (b/a)\log\frac{y+3}{y-3} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} 4 = x(14) = \frac{b}{a}\log\frac{y}{y-3} \\ 2 = x(17) - x(14) = (b/a)\log\frac{y+3}{y} \end{array}$$

de donde $y/(y-3) = (y+3)^2/y^2$, es decir $y^3 = (y^2-9)(y+3) = y^3 + 3y^2 - 9y - 27$ y por tanto $y^2 - 3y - 9 = 0$, y como la solución es $y > 3$,

$$y = \frac{3+3\sqrt{5}}{2} \approx 4,85 \quad \Rightarrow \quad T = 14 - y \approx 9,14h \approx 9h8'. \quad ∎$$

Ejercicio 2.11.10.- Dos personas A y B piden café. A le pone una cucharada de leche fría pero no se lo toma. Al cabo de 10 minutos B —que tampoco se lo ha tomado— le pone una cucharada de leche fría (que no ha cambiado de temperatura) y A y B beben el café. ¿Quién lo bebe mas caliente?

Indicación.- Hágase uso de la LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON : Si $T(t)$ es la diferencia de temperatura entre un objeto y su medio ambiente, entonces T' es proporcional a T. Y que si mezclamos dos cantidades m_1 y m_2 con temperaturas T_1 y T_2 la temperatura de la mezcla es

$$\frac{m_1T_1 + m_2T_2}{m_1 + m_2}. \quad ∎$$

Ejercicio 2.11.11.- Un recipiente abierto, lleno de agua, tiene la forma de una semiesfera de R metros de radio. En el fondo tiene un agujero circular de r metros de radio. ¿Cuánto tardará en salir todo el agua del recipiente?. [5].

Solución. Denotemos con $y(t)$ la altura del nivel del agua, respecto del fondo del recipiente, en el instante t; y sea $A(y)$ el área de la sección del recipiente a una altura y, por tanto el volumen del agua de la cisterna en el instante t es

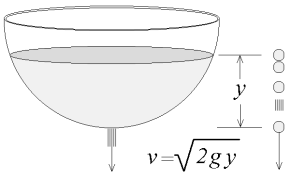


Figura 2.12. Cisterna

$$V(t) = \int_0^{y(t)} A(y)dy \quad \Rightarrow \quad V'(t) = A[y(t)]y'(t),$$

(siendo $y' < 0$, pues y es decreciente) ahora bien para un $\epsilon > 0$ muy pequeño, el volumen que ha salido por el orificio entre los instantes t y $t+\epsilon$ es

$$V(t) - V(t+\epsilon) \approx \pi r^2 \epsilon \sqrt{2gy(t)},$$

y tomando límites $A[y(t)]y'(t) = V'(t) = -\pi r^2\sqrt{2gy(t)}$. Ahora como la sección por $y(t)$ es un círculo de radio $r(t) = \sqrt{R^2 - (R - y(t))^2}$, tendremos que para $k = r^2\sqrt{2g}$

$$r^2(t)y' = -r^2\sqrt{2gy} \quad \Rightarrow \quad \frac{-2Ry + y^2}{\sqrt{y}}dy = kdt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2Ry^{1/2}dy - y^{3/2}dy + kdt = 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{4R}{3}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} + kt\right) = 0$$

y si T es el instante en el que se vacía la cisterna, como en el instante $t = 0$, $y = R$, tendremos que la solución es

$$\frac{4R}{3}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} + kt = cte = \frac{4R}{3}R^{3/2} - \frac{2}{5}R^{5/2} = R^{5/2}\frac{14}{15},$$

y como para $t = T$, $y = 0$, tendremos que

$$T = \frac{14 \cdot R^{5/2}}{15 \cdot r^2 \cdot \sqrt{2g}}.$$

En particular para $R = 25cm$ y $r = 2cm$, $T \approx 16,47$seg. ∎

[5] Se admite la ley de Torricelli que dice que el agua sale por el agujero con la misma velocidad ($\sqrt{2gy}$) que obtendría un objeto al caer libremente desde la superficie del agua hasta el agujero, a altura y

Ejercicio 2.11.12.- Calcula la forma que debe tener el recipiente del ejercicio anterior para que el nivel de la superficie del agua baje a una razón constante.

Solución. Con la misma notación tendremos que sea como sea la forma del recipiente y el agujero de área A, tendremos que $A[y(t)]y'(t) = -A\sqrt{2gy(t)}$. Ahora bien como pedimos que y' sea constante tendremos que existe una constante $k > 0$, tal que para toda altura y, $A^2(y) = ky$. Ahora si pedimos que el recipiente sea una superficie de revolución generada por una curva $y = y(x)$, tendremos que $A(y(x)) = \pi x^2$ es el área de un círculo de radio x, por tanto la curva es $y = ax^4$. ∎

Ejercicio 2.11.13.- Hallar las curvas $y = f(x)$, del plano, que pasan por el origen y tienen la propiedad de que para todo $a \in \mathbb{R}$, el área limitada por la tangente a la curva en $(a, b = f(a))$, el eje y y la recta $y = b$, es proporcional al área limitada por la curva, el eje y y la recta $y = b$.

Solución. Si una tal curva es $y = y(x)$, tenemos que para cada x el área del triángulo es $x^2y'/2$, mientras que el otro área es $xy - \int_0^x y(x)dx$ y si son proporcionales existe $k > 0$, tal que

$$kx^2y' = xy - \int_0^x y(x)dx \quad \Rightarrow \quad k2xy' + kx^2y'' = y + xy' - y = xy',$$

y llamando $z = y'$ tendremos que $kxz' = (1 - 2k)z$ y por tanto

$$k(\log z)' = (1 - 2k)(\log x)' \quad \Rightarrow \quad z = (cte)x^{\frac{1-2k}{k}} \quad \Rightarrow \quad y = qx^p,$$

para $q \in \mathbb{R}$ y como $y(0) = 0$, debe ser $p > 0$. ∎

Ejercicio 2.11.14.- Encontrar todas las curvas planas de curvatura constante.

Solución. Sea $(x(t), y(t))$ una tal curva parametrizada por la longitud de arco. Entonces

$$x'^2 + y'^2 = 1\ , \quad x''^2 + y''^2 = a^2.$$

Derivando la primera ecuación

$$x' = \sqrt{1 - y'^2}, \tag{2.12}$$

obtenemos

$$x'' = -\frac{y'y''}{\sqrt{1 - y'^2}},$$

y despejando en la segunda

$$y'' = a\sqrt{(1 - y'^2)} \quad \Leftrightarrow \quad z' = a\sqrt{1 - z^2}$$

para $z = y'$, por tanto tenemos que resolver el campo

$$\frac{\partial}{\partial t} + a\sqrt{1 - z^2}\frac{\partial}{\partial z},$$

que tiene una integral primera, $ta - \operatorname{arc\,sen} z$, por tanto

$$y'(t) = z(t) = \operatorname{sen}(at + k),$$

y por (2.12) las soluciones son las circunferencias de radio $1/a$,

$$y(t) = -\frac{1}{a}\cos(ta + k) + B\ , \quad x(t) = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ta + k) + C.$$ ∎

Ejercicio 2.11.15.- Hay n moscas ordenadas en los vértices de un n–ágono regular, que se ponen a andar a la misma velocidad y dirigiéndose cada una hacia la siguiente. Dar la trayectoria de la mosca que pasa por un punto cualquiera y calcular la longitud del trayecto recorrido hasta que se encuentra con las demás, en función de su distancia al centro del polígono, en el instante 0.

Solución. Pongamos el origen de un sistema de coordenadas cartesianas en el centro del polígono, ordenemos los vertices en sentido antihorario y sea

$$\theta_n = \frac{(n+2)\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n},$$

el ángulo que forman la semirrecta que une 0 con uno de los vértices y el segmento paralelo por 0 al lado que lo une con el siguiente. Sean

$$a = \cos\,\theta_n, \quad b = \operatorname{sen}\,\theta_n \qquad \text{(observemos que } a < 0 \text{ y } b > 0\text{)}.$$

Entonces nuestro campo es proporcional a

$$D = (ax - by)\frac{\partial}{\partial x} + (bx + ay)\frac{\partial}{\partial y},$$

puesto que en cada punto (x, y), la mosca se mueve en la dirección dada por el giro de ángulo θ_n, del propio (x, y).

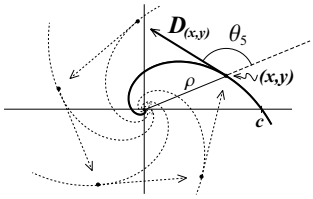


Figura 2.13. Caso $n = 5$

En coordenadas polares tenemos que

$$D = a\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + b\frac{\partial}{\partial \theta},$$

y por tanto para $k = a/b < 0$, tenemos la 1–forma incidente

$$\frac{d\rho}{\rho} - k d\theta = d[\log \rho - k\theta],$$

por lo que la función $\rho\, \mathrm{e}^{-k\theta}$, es una integral primera de D y las trayectorias de las moscas vienen dadas por

$$\rho = \lambda\, \mathrm{e}^{k\theta},$$

para cada constante λ. En nuestro caso tenemos que para $\theta = 0$, $\rho = c$, por tanto nuestra solución es

$$\rho(\theta) = c \cdot \mathrm{e}^{k\theta},$$

y en coordenadas (x, y),

$$x(\theta) = c\, \mathrm{e}^{k\theta} \cos\theta, \quad y(\theta) = c\, \mathrm{e}^{k\theta} \operatorname{sen}\theta,$$

por tanto la longitud de la curva integral de D pasando por $(x = c, y = 0)$, desde este punto es

$$\int_0^\infty \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\, d\theta = c\sqrt{k^2+1} \int_0^\infty \mathrm{e}^{k\theta}\, d\theta$$
$$= -\frac{c}{a} = -\frac{c}{\cos\frac{(n+2)\pi}{2n}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.11.16.- Demostrar que el campo de $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + x_2\partial\partial x_1 + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + F\frac{\partial}{\partial x_n},$$

en las coordenadas $(x, x_1, \ldots, x_n)$, asociado a las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y^{(n} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

para el que

$$F(x, tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = tF(x, x_1, \ldots, x_n),$$

es invariante por el campo de las homotecias

$$x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Indicación. Basta demostrar que $\sum x_i F_{x_i} = F$, lo cual se sigue derivando en $t = 1$ la propiedad de F. ∎

Ejercicio 2.11.17.- Resolver la ecuación

$$x^2yy'' = (y - xy')^2$$

con las condiciones $y(1) = 5$, $y'(1) = 2$.

Solución.- Como $y'' = F(x, y, y')$ y F satisface la propiedad del ejercicio anterior, sabemos que el campo asociado

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + \frac{(y - xz)^2}{x^2y}\frac{\partial}{\partial z},$$

se escribe con dos coordenadas en el sistema $u_1 = x$, $u_2 = z/y$, $u_3 = \log y$.

$$D = \frac{\partial}{\partial u_1} + \left(\frac{1}{u_1^2} - \frac{2u_2}{u_1}\right)\frac{\partial}{\partial u_2} + u_2\partial\partial u_3.$$

Ahora bien el campo

$$\frac{\partial}{\partial u_1} + \left(\frac{1}{u_1^2} - \frac{2u_2}{u_1}\right)\frac{\partial}{\partial u_2},$$

es lineal y podemos resolverlo fácilmente, no obstante observemos que tiene una 1–forma incidente

$$(1 - 2u_2u_1)du_1 - u_1^2du_2 = d[u_1 - u_1^2u_2] = dv.$$

Poniendo D en el sistema de coordenadas (u_1, v, u_3), obtenemos

$$D = \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{u_1 - v}{u_1^2}\frac{\partial}{\partial u_3},$$

que tiene la 1–forma incidente

$$\frac{u_1 - v}{u_1^2}du_1 - du_3,$$

y como v podemos considerarla como una constante pues $Dv = 0$, tenemos la 1–forma incidente

$$d\left(\log u_1 + \frac{v}{u_1} - u_3\right) = dg,$$

y por tanto las soluciones son $v = a$, $g = b$, para cada elección de constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Y en las coordenadas (x, y, z)

$$\log x + \frac{a}{x} - \log y = b \quad \Rightarrow \quad y = kx\,\mathrm{e}^{a/x},$$

ahora basta elegir convenientemente a y k. ∎

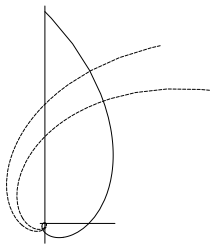


Figura 2.14. Caso $cte = \lambda = 1$, por tanto $\alpha = \pi/4$.

Ejercicio 2.11.18.- Encontrar la forma de unas tijeras, con cuchillas simétricas, tal que el ángulo de corte sea siempre el mismo.

Solución.- Consideremos el origen de coordenadas cartesianas en el centro de giro de las tijeras. Que el ángulo de las dos hojas sea constante equivale a que lo es (y vale la mitad), el ángulo α que forma una de las dos cuchillas con el eje de simetría es decir con la recta que pasa por el origen y el punto que estemos considerando. Esto nos induce a considerar en cada punto $p = (x, y) = \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ del plano, la recta de dirección $(\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta))$. Por lo tanto consideramos el campo tangente que da esa dirección que, para $(a, b) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, es

$$D = (ax - by)\partial_x + (bx + ay)\partial_y,$$

(y sus múltiplos). Ahora bien como es homogéneo, para resolverlo consideramos el sistema de coordenadas $(u = \log x, v = y/x)$, en el que

$$Du = a - bv, \quad Dv = bv^2 + b \quad \Rightarrow \quad D = (a - bv)\partial_u + b(v^2+1)\partial_v,$$

y tiene 1–forma incidente para $\lambda = a/b$

$$du + \frac{v - \lambda}{v^2 + 1} dv,$$

que es exacta y es la diferencial de

$$u + \int \frac{v\,dv}{1+v^2} - \lambda \int \frac{dv}{v^2+1} = u + \log\sqrt{1+v^2} - \lambda \arctan v,$$

y sus curvas integrales son (ver figura)

$$\log x + \log\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = \lambda\theta + cte \quad \Leftrightarrow \quad \rho = cte\cdot \mathrm{e}^{\lambda\theta}\,. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.11.19.- Encontrar las curvas del plano que en cada punto la distancia de su tangente al origen es la abscisa del punto.

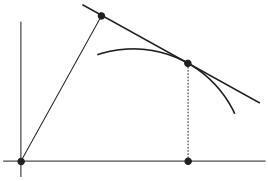


Figura 2.15.

Indicación. Sea $h = 0$ una tal curva, entonces la recta tangente en cada punto suyo $p = (x_0, y_0)$, $h(p) = 0$ es de la forma $h_x(p)(x - x_0) + h_y(p)(y - y_0) = 0$, cuya distancia al origen es x_0, por tanto

$$\frac{h_x(p)x_0 + h_y(p)y_0}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_0y_0h_x + y_0^2h_y = x_0^2h_y$$

y h es integral primera de $D = 2xy\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y$, ahora como el campo es homogéneo consideramos las coordenadas $u = y/x, v = \log x$

$$Du = -\frac{y^2}{x} - x = -x(u^2+1), \qquad Dv = 2y = x2u \quad \Rightarrow \quad D = -x(u^2+1)\partial_u + 2xu\partial_v$$

y tiene 1–forma incidente $\frac{2udu}{u^2+1} + dv = d(v + \log(u^2+1))$ y las soluciones son $x(\frac{y^2}{x^2} + 1)$ =cte, es decir las circunferencias de radio r centradas en $(r, 0)$

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2. \quad \blacksquare$$

2.14. Bibliografía y comentarios

Los libros consultados en la elaboración de este tema han sido:

Arnold, V.: "*Equations differentielles ordinaires*". Ed. Mir, 1974, Moscou.

Boothby, W,M.: "*An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*". Ac. Press, 1975.

Coddington and Levinson: "*Theory of ordinary Differential Equations*". McGraw –Hill, 1955.

Hartman, Ph.: "*Ordinary differential equations*". Ed. Birkhauser. 1982.

Hurewicz, W.: "*Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias*". Ediciones RIALP, 1966.

Muñoz Diaz, Jesus: "*Ecuaciones diferenciales (I)*". Ed. Univ. Salamanca, 1982.

Ya hemos comentado en el primer tema que los primeros en proponer problemas planteados matemáticamente en términos de ecuaciones diferenciales fueron Isaac Newton y G.W. Leibnitz, los cuales dieron técnicas para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales particulares —de Isaac Newton (*1692*), es el método de las series de potencias, del que hablaremos en el Tema de campos tangentes lineales—.

Durante el siglo XVIII siguieron dándose soluciones a problemas particulares y no fue hasta *1820* que A.L. Cauchy trató de demostrar un teorema general de existencia de soluciones de una ecuación diferencial, pero sólo publicó un breve resumen de su método, en la introducción de un trabajo de *1840*. Sin embargo su tratamiento del tema nos ha llegado por una parte a través de un trabajo de G.G. de Coriolis, publicado en *1837* (el cual en palabras de Flett: "*...parecen un intento de reproducir de memoria una demostración que no se ha entendido...*, ver pág.148 y ss.), y por otra a través de unas lecciones de Moigno (*1844*), de cálculo diferencial.

Cauchy estudia el caso escalar $y' = f(t, y)$, y usa la acotación de f_y para probar que f es Lipchiciana en y y utiliza esta propiedad en su argumentación.

Por su parte la condición de lipchicianidad de una función fue introducida explícitamente por Rudolf O.S. Lipschitz en un trabajo publicado en *1868*, en el que prueba la existencia de solución en un entorno suficientemente pequeño, para una ecuación diferencial de $\mathbb{R}^n$, y donde hace uso —como Cauchy— de la uniforme continuidad de f sin justificarla —la distinción entre continuidad y uniforme continuidad se

aclaró entre *1868* y *1876*—. Reconoce la necesidad de probar la unicidad de solución pero su argumentación en esta dirección es insuficiente.

El siguiente paso lo dio Emile Picard en *1890*, donde usando una primera versión del teorema de la aplicación contractiva construye una sucesión de aproximaciones sucesivas de la solución, aunque el dominio de la solución era más pequeño que el de existencia de Cauchy. Este defecto fue remediado en (*1893*) por Ivar O. Bendixson y en (*1894*) por Ernst L. Lindelof .

En *1882*, Vito Volterra planteó la cuestión de si bastaba con la continuidad de f para asegurar la existencia de solución y Giuseppe Peano en *1886* (para el caso escalar) y en *1890* (para el caso vectorial, y para otra versión del caso escalar), dio una contestación afirmativa a la conjetura. En el primer trabajo hace uso de cierta desigualdad diferenciable, mientras que en el segundo trabajo —que es largo y tedioso— mezcla en la propia demostración la esencia del **Teorema de Ascoli–Arzela**.

Por último Charles de la Vallee–Pousin en *1893* y Cesare Arzelà en *1895*, dieron simplificaciones del teorema de Peano. El primero basándose en un caso particular del **Teorema de Ascoli–Arzela** y el segundo haciendo un uso explícito de él.

El lector interesado en el teorema de existencia y unicidad de solución de ecuaciones diferenciales en espacios de dimensión infinita puede consultar los libros

Bourbaki, N.: "*Elements de mathematique, Vol.4*". Hermann Paris, 1951. Cap. 4-7.
Flett, T.M.: "*Differential analysis*". Cambridge Univ.Press., 1980.

En un entorno de un punto no singular hemos visto en el **Teorema del flujo** (2.25), pág.96, que todos los campos tangentes son ∂x y por tanto tienen la misma estructura, pero no hemos dicho nada sobre los campos singulares. En este caso el problema es mucho mas difícil: En el trabajo de

Sternberg, S.: "*On the structure of local homeomorphisms of euclidean n-space, II*", Amer. Journal of Math., Vol. **80**, pp.623–631, 1958.

encontramos que los campos con un punto singular son "casi siempre" difeomorfos, en un entorno del punto, a su *linealización*, es decir a su aproximación lineal en el punto —esto lo definiremos con rigor en la lección 5.2, pág.278, del tema de estabilidad—. En la lección 4.7 (pág.229)

del tema de **Sistemas lineales** clasificaremos los campos tangentes lineales desde un punto de vista lineal y diferenciable —y veremos que ambas clasificaciones son la misma— y en la lección 5.6 (pág.297) del tema de **Estabilidad** haremos la clasificación topológica.

Por otra parte para realizar un estudio "fino" de un objeto matemático, cerca de un punto singular se ha elaborado una técnica, llamada *resolución de singularidades*, que consiste en elegir un sistema de coordenadas cerca de un punto singular, para el que a un pequeño desplazamiento cerca de la singularidad, corresponde un gran cambio en las coordenadas.

El sistema de coordenadas polares tiene esta propiedad, sin embargo el paso a ellas requiere funciones trascendentes, por ello a veces es preferible otro procedimiento, el llamado σ–proceso, que consiste en subir un campo de $\mathbb{R}^2$ con un punto singular, a un campo en el helicoide recto, que es la superficie definida por una hélice circular, con el eje pasando por el punto singular.

Remitimos al lector interesado al libro

Arnold, V.I.: "*Geometric Methods in the theory of ordinary differential equations*". Springer–Verlag, 1983.

El método estudiado en la lección 2.11, pág.109, que consistía en encontrar todas las ecuaciones diferenciales que quedan invariantes por un grupo de difeomorfismos y el sistema de coordenadas en el que se resuelven es de Sophus Lie .

Remitimos al lector a los libros

Bluman, G.W. and Cole, J.D.: "*Similarity Methods for differential equations*". AMS, Vol.**13**, Springer–Verlag, 1974.

Ince, E.L.: "*Ordinary differential equations*". Dover, 1956. Reedición íntegra de la original publicada en 1926.

Olver, P.J.: "*Applications of Lie groups to differential equations*". GTM, N.**107**, Springer–Verlag, 1986.

Sobre este tema han trabajado también Joseph Liouville, —que tiene un teorema sobre la imposibilidad de resolver ciertas ecuaciones diferenciales por cuadraturas—, Ritt y Kolchin.

Que las ecuaciones diferenciales del tipo

$$y^{(n} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

tienen solución expresable por cuadraturas si y sólo si cierto grupo que se le asocia es resoluble, se encuentra en la pág.135 del libro

Bluman,G.W. and Kumei,S.: "*Symmetries and differential equations*". Springer–Verlag, 1989.

Por último, el estudio de la tractriz[6] probablemente lo desencadenó la pregunta de Perrault sobre la trayectoria de su reloj de bolsillo, que comentamos en la lección 2.12, pág.116. No se sabe cuando planteó esta cuestión pero en esas fechas distintos autores estudiaron esta curva y problemas análogos. Lo que sí se sabe es que Leibnitz escribió una carta en 1684 diciendo que tenía los métodos para estudiar esta curva, pero no publica nada hasta 1693

Leibnitz, W.: "*Supplementum geometriae dimensoriae, seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum: similiterque multiplex constructio lineae ex data tangentium conditione*".[7] Acta Eruditorum, 1693.

artículo en el que cita el problema de Perrault. En este artículo usa la construcción mecánica de la tractriz para desarrollar teóricamente un dispositivo que integraba ecuaciones gráficamente (y también está el Teorema fundamental del cálculo). No obstante, Huygens ese mismo año de 1693, publicó antes que Leibnitz sus estudios y en el año anterior, 1692, Jean Bernoulli estudia la tractriz planteada desde el punto de vista geométrico y Pierre Varignon le escribe en enero de 1693, "*... acabo de encontrar la curva que describe un barco arrastrado por una cuerda a lo largo del borde del río: Se trata de una nueva especie de logarítmica*".

El interés sobre estas cuestiones fue abrumador durante mucho tiempo y fruto de esas investigaciones han sido las múltiples construcciones de máquinas que teóricamente permitían dibujar las soluciones de ecuaciones diferenciales. Remitimos al lector interesado en la historia de la tractriz y de estos artilugios llamados "*intégrafos universales*", a la Tesis Doctoral de

Tournès, Dominique: "*Histoire de la construction tractionnelle des équations différentielles.*"2004.

que se encuentra en la página web

[6] Este nombre proviene del término que acuñó Huygens en 1692, *tractoria*, por estar generada mediante una tracción. Mas adelante Leibnitz la llamó *tractrix*, que es el empleado actualmente.

[7] *Suplemento sobre medidas geométricas, o mas generalmente de todas las cuadraturas a través del movimiento: y similarmente distintas formas de construir una curva a partir de condiciones sobre sus tangentes.*

http://www.reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/calculsavant/Textes/vincenzo_riccati.html

y en la que el autor traduce en las páginas 290–354, la memoria de Vincenzo Riccati con el mismo título. Así mismo remitimos al trabajo de

Bos, H.J.M.: "*Tractional Motion and the Legitimation of Transcendental Curves*". Centaurus, Vol.31, Issue 1, Abril 1988.

que se encuentra en la página web

http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1600-0498.1988.tb00714.x/abstract

Fin del Tema 2

Tema 3

Campos tensoriales en un espacio vectorial

3.1. Tensores en un módulo libre

Definición. Sea $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ un *anillo conmutativo y con unidad*, es decir que:

(1) $(\mathcal{A}, +)$ es grupo conmutativo —lo cual significa que para cualesquiera $a, b, c \in A$ se tiene, $a + (b + c) = (a + b) + c$, que existe un $0 \in A$ tal que $a+0 = 0+a = a$ y que existe $-a$ tal que $a+(-a) = (-a)+a = 0$ y que $a + b = b + a$—,

(2) (**Propiedad asociativa**): $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

(3) (**Propiedad distributiva**): $a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$ y $(b+c)\cdot a = b\cdot a+c\cdot a$;

(4) existe $1 \in A$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ y

(5) $a \cdot b = b \cdot a$.

Sea V un $\mathcal{A}$*–módulo*, es decir un conjunto con dos operaciones

$$V \times V \xrightarrow{+} V, \qquad A \times V \xrightarrow{+} V,$$

tales que:

(1) $(V, +)$ es grupo conmutativo;

(2) $a \cdot (v_1 + v_2) = a \cdot v_1 + a \cdot v_2$;
(3) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$;
(4) $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$ y
(5) $1 \cdot v = v$.

Sea V^* su módulo dual, es decir el conjunto de las aplicaciones $\mathcal{A}$–lineales de V en $\mathcal{A}$. Sean $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, no ambos nulos. Llamaremos *tensor de tipo* (p, q) en V a toda aplicación $(p + q)$–lineal

$$T\colon V^p \times V^{*q} \longrightarrow \mathcal{A},$$

entendiendo para $p = 0$, $T\colon V^{*q} \longrightarrow \mathcal{A}$ y para $q = 0$, $T\colon V^p \longrightarrow \mathcal{A}$. Llamaremos *tensores de tipo* $(0, 0)$ a los elementos de $\mathcal{A}$. Así mismo denotaremos con $\mathcal{T}_p^q(V)$ el $\mathcal{A}$–módulo de los tensores de tipo (p, q) en V.

Definición. Si $T \in \mathcal{T}_p^q(V)$ y $T' \in \mathcal{T}_{p'}^{q'}(V)$, definimos el *producto tensorial* de T y T', como el tensor $T \otimes T'$ de tipo $(p + p', q + q')$, en V, que para $e_1, \ldots, e_{p+p'} \in V$ y $f_1, \ldots, f_{q+q'} \in V^*$ satisface

$$T \otimes T'(e_1, \ldots, e_{p+p'}, f_1, \ldots, f_{q+q'}) = \\ = T(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q) T'(e_{p+1}, \ldots, e_{p+p'}, f_{q+1}, \ldots, f_{q+q'}).$$

Ejercicio 3.1.1 Demostrar que la aplicación producto tensorial

$$\mathcal{T}_p^q(V) \times \mathcal{T}_{p'}^{q'}(V) \xrightarrow{\otimes} \mathcal{T}_{p+p'}^{q+q'}(V)\ , \qquad (T, T') \rightsquigarrow T \otimes T',$$

es $\mathcal{A}$–bilineal. Y que el producto tensorial es asociativo.

Definición. Sean $W, V_1, \ldots, V_n$ módulos sobre un anillo $\mathcal{A}$, y sea

$$T\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W,$$

una aplicación n–lineal. Definimos la *contracción interior* de T por un elemento $e \in V_1$ como la aplicación $(n - 1)$–lineal

$$i_e T\colon V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W\ , \quad i_e T(e_2, \ldots, e_n) = T(e, e_2, \ldots, e_n),$$

para $n = 1$ definimos $i_e T = T(e)$.

Si denotamos con

$$\mathcal{M} = \mathbf{M}(V_1 \times \ldots \times V_n; W),$$

el módulo sobre $\mathcal{A}$ de las aplicaciones n–lineales de $V_1 \times \cdots \times V_n$ en W, tendremos un isomorfismo entre este módulo y

$$\mathbf{Hom}[V_1, \mathbf{M}(V_2 \times \ldots \times V_n; W)],$$

que hace corresponder a cada $T \in \mathcal{M}$ la aplicación lineal

$$e \in V_1 \longrightarrow i_e T \in \mathbf{M}(V_2 \times \cdots \times V_n; W).$$

Teorema 3.1 i) *Si $W, V_1, \ldots, V_n$ son módulos libres, entonces*

$$\operatorname{rang} \mathbf{M}(V_1 \times \ldots \times V_n; W) = (\operatorname{rang} V_1) \cdots (\operatorname{rang} V_n)(\operatorname{rang} W).$$

ii) *Si V es módulo libre, su dual V^* y $\mathcal{T}_p^q(V)$ también son libres y*

$$\operatorname{rang}[\mathcal{T}_p^q(V)] = [\operatorname{rang}(V)]^{p+q}.$$

iii) *Si V es libre, la aplicación $F\colon V \longrightarrow V^{**}$, $F(v)(\omega) = \omega(v)$, es un isomorfismo.*
iv) *Si V es libre, con base $v_1, \ldots, v_n$ y base dual $\omega_1, \ldots, \omega_n$, entonces los n^{p+q} productos tensoriales*

$$\omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_p} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_q},$$

forman una base de $\mathcal{T}_p(V)$, entendiendo —por (iii)—, que para cada $v \in V$ y cada $\omega \in V^*$, $v(\omega) = \omega(v)$.

Demostración. (Indicación) i) Se hace por inducción teniendo en cuenta la contracción interior.
ii) Es consecuencia de (i).
iii) F es lineal y lleva base en base.
iv) Por (ii) y (iii). ∎

Hay una operación de relevante importancia, que nos convierte un tensor de tipo (p, q) en otro de tipo $(p-1, q-1)$. Tal operación se llama *contracción* y para definirla necesitamos el siguiente resultado previo.

Teorema 3.2 *Sean V y V' módulos libres, entonces existe un isomorfismo entre los módulos libres*

$$\mathcal{H} = \mathbf{Hom}\,(\mathcal{T}_p^q(V), V') \sim \mathcal{M} = \mathbf{M}(V^{*p} \times V^q; V').$$

Demostración. Consideremos la aplicación producto tensorial

$$\otimes : V^{*p} \times V^q \longrightarrow \mathcal{T}_p^q(V),$$

y demostremos que la aplicación

$$F\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{M}, \quad F(f) = f \circ \otimes,$$

es un isomorfismo:

1. Está bien definida pues la composición de una multilineal con una lineal es multilineal.

2. Es lineal.

3. Es inyectiva pues si $F(f) = 0$, tendremos que para todos los elementos de la base de $\mathcal{T}_p^q(V)$,

$$f(\omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_p} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_q}) = 0,$$

por tanto $f = 0$.

4. $\operatorname{rang}(\mathcal{H}) = \operatorname{rang}(\mathcal{M}) = n^{p+q} \dim(V')$. ∎

Definición. Como consecuencia tenemos que si por V' tomamos $\mathcal{T}_{p-1}^{q-1}(V)$, entonces para un $1 \leq i \leq p$ y un $1 \leq j \leq q$, la aplicación $(p+q)$–lineal

$$V^{*p} \times V^q \longrightarrow \mathcal{T}_{p-1}^{q-1}(V),$$

que hace corresponder a $(\omega_1, \ldots, \omega_p, v_1, \ldots, v_q)$

$$\omega_i(v_j)\omega_1 \otimes \cdots \widehat{\omega}_i \cdots \otimes \omega_p \otimes v_1 \otimes \cdots \widehat{v}_j \cdots \otimes v_q,$$

—donde con $\widehat{\omega}$ indicamos que ω no aparece en la expresión—, define una única aplicación lineal que llamaremos *contracción* (i, j)

$$C_i^j \colon \mathcal{T}_p^q(V) \longrightarrow \mathcal{T}_{p-1}^{q-1}(V),$$

que sobre los elementos de la forma

$$\omega_k \otimes v_l = \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_q,$$

actúa de la forma,

$$C_i^j(\omega_k \otimes v_l) = \omega_i(v_j)\omega_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\omega}_i \cdots \otimes \omega_p \otimes v_1 \otimes \cdots \widehat{v}_j \cdots \otimes v_q.$$

Para $p = q = 1$, será $C_1^1(\omega \otimes v) = \omega(v) = i_v\omega$.

3.2. Campos tensoriales en $\mathbb{R}^n$

Sea U un abierto de un espacio vectorial real $\mathcal{E}$ de dimensión n. Sea $\mathcal{D} = \mathcal{D}(U)$ el $\mathcal{C}^\infty(U)$–módulo de los campos tangentes a U de clase ∞, y $\Omega = \Omega(U)$ su dual, es decir el $\mathcal{C}^\infty(U)$–módulo de las 1–formas sobre U de clase ∞.

Definición. Llamaremos *campo tensorial* de tipo (p, q) sobre U —p veces covariante y q veces contravariante—, a toda aplicación $(p+q)$–lineal sobre $\mathcal{C}^\infty(U)$

$$T_p^q \colon \mathcal{D}^p \times \Omega^q \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U),$$

es decir a todo tensor sobre el $\mathcal{C}^\infty(U)$–módulo $\mathcal{D}$. Y denotaremos con $\mathcal{T}_p^q(\mathcal{D})$ ó $\mathcal{T}_p^q$ si no hay confusión, el conjunto de los campos tensoriales de tipo (p, q) sobre U, los cuales forman un haz de $\mathcal{C}^\infty(U)$–módulo.

En particular tendremos que $\mathcal{T}_1^0 = \Omega$. Por (3.1) tenemos que $\mathcal{T}_0^1 = \mathcal{D}$, y convenimos en llamar $\mathcal{T}_0^0 = \mathcal{C}^\infty(U)$.

Nota 3.3 Si p y q se sobrentienden escribiremos T en vez de T_p^q y $T(D_i, \omega_j)$ en vez de

$$T_p^q(D_1, \ldots, D_p, \omega_1, \ldots, \omega_q).$$

Nota 3.4 Definimos el *producto tensorial* de campos tensoriales, la *contracción interior* por un campo tangente D y la *contracción* (i, j)

$$\begin{gathered} T \otimes Q \\ i_D \colon \mathcal{T}_p^q \longrightarrow \mathcal{T}_{p-1}^{q-1}, \\ i_D T(D_2, \ldots, D_p, \omega_1, \ldots, \omega_q) = T(D, D_2, \ldots, D_p, \omega_1, \ldots, \omega_q), \\ C_i^j \colon \mathcal{T}_p^q \longrightarrow \mathcal{T}_{p-1}^{q-1}, \end{gathered}$$

como hicimos en la lección anterior, para el caso particular en el que el anillo $\mathcal{A}$ es $\mathcal{C}^\infty(U)$ y el $\mathcal{C}^\infty(U)$–módulo libre es $\mathcal{D}$.

Tanto i_D como C_i^j son $\mathcal{C}^\infty(U)$–lineales, y verifican:

a) $i_D T = C_1^1(D \otimes T)$.

b) Para $\omega \in \Omega$, $i_D \omega = C_1^1(D \otimes \omega) = \omega D$.

c) Si $T \in \mathcal{T}_p^q$, $D_i \in \mathcal{D}$, *y* $\omega_j \in \Omega$, *entonces*

$$T(D_i, \omega_j) = C_1^1 \overset{(p+q)}{\cdots} C_1^1(D_1 \otimes \ldots \otimes D_p \otimes T \otimes \omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_q),$$

Nota 3.5 Como consecuencia de **(3.1)** tenemos que dado en U un sistema de coordenadas $(u_1, \ldots, u_n)$, como las $\partial/\partial u_i$ son base de $\mathcal{D}$ y las du_i son su base dual, tendremos que

$$du_{i_1} \otimes \ldots \otimes du_{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial u_{j_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial u_{j_q}},$$

es una base del módulo de los tensores de tipo (p, q).

Definición. Llamaremos *campo diferenciable de tensores* de tipo (p, q), en U, a toda colección

$$\{T_x \in \mathcal{T}_p^q[T_x(\mathcal{E})] : \ x \in U\},$$

tal que para cada $D_1, \ldots, D_p \in \mathcal{D}$ y $\omega_1, \ldots, \omega_q \in \Omega$ y los vectores $D_{ix} \in T_x(\mathcal{E})$ y las 1–formas $\omega_{jx} \in T_x(\mathcal{E})^*$, que respectivamente definen para cada $x \in U$, se verifica que la aplicación

$$x \in U \longrightarrow T_x(D_{1x}, \ldots, D_{px}, \omega_{1x}, \ldots, \omega_{qx}),$$

es de $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Ejercicio 3.2.1 Demostrar que existe una biyección entre los campos tensoriales de tipo (p, q) en U y los campos diferenciables de tensores —de tipo (p, q)—, en U, para la que se tiene que si $T, T_1, T_2 \in \mathcal{T}_p^q$, $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $x \in U$, entonces:

a) $(T_1 + T_2)_x = T_{1x} + T_{2x}$.
b) $(fT)_x = f(x)T_x$.
c) $(T_1 \otimes T_2)_x = T_{1x} \otimes T_{2x}$.
d) $(i_D T)_x = i_{D_x} T_x$.
e) $(C_i^j T)_x = C_i^j T_x$.

3.3. Derivada de Lie de un campo tensorial

Definición. Sea $F\colon U \subset \mathcal{E}_1 \longrightarrow V \subset \mathcal{E}_2$ un difeomorfismo. Definimos el isomorfismo

$$F_*\colon \mathcal{T}_p^q(U) \longrightarrow \mathcal{T}_p^q(V), \quad F_*T(D_i, \omega_j)[F(x)] = T(F^*D_i, F^*\omega_j)(x).$$

Denotaremos con $F^* = F_*^{-1}$.

Ejercicio 3.3.1 Demostrar que para cada campo tensorial T,

$$F_*(C_i^j T) = C_i^j(F_* T).$$

Definición. Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ y $X\colon \mathcal{W} \longrightarrow U$ su grupo uniparamétrico local. Entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, el abierto de U,

$$U_t = \{x \in U : (t,x) \in \mathcal{W}\},$$

es no vacío y

$$X_t\colon U_t \longrightarrow U_{-t},$$

es un difeomorfismo. Por tanto para cada $T \in \mathcal{T}_p^q(U)$, podemos restringir T al abierto U_{-t} y considerar el campo tensorial $X_t^* T \in \mathcal{T}_p^q(U_t)$.

Llamaremos *derivada de Lie* del campo tensorial T al campo tensorial de $\mathcal{T}_p^q(U)$

$$D^L T = \lim_{t\to 0} \frac{X_t^* T - T}{t},$$

es decir tal que para cualesquiera $D_i \in \mathcal{D}(U)$, $\omega_j \in \Omega(U)$ y $x \in U$, verifica

$$\begin{aligned} D^L T(D_i,\omega_j)(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{(X_t^* T)(D_i,\omega_j)(x) - T(D_i,\omega_j)(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{T_{X_t(x)}(X_{t*} D_{ix}, X_{t*}\omega_{jx}) - T_x(D_{ix},\omega_{jx})}{t}. \end{aligned}$$

Nota 3.6 Observemos que para $T = f \in \mathcal{T}_0^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$, $D^L T = Df$ y para $T = E \in \mathcal{T}_0^1(U) = \mathcal{D}(U)$, $D^L T$ coincide con la derivada de Lie para campos tangentes definida en la lección (2.10), pág.104.

Por tanto ya tenemos que al menos para dos clases de campos tensoriales la derivada de lie existe y es un campo tensorial. Es curioso observar que si lo logramos demostrar para las 1–formas lo tendremos demostrado para cualquier campo tensorial.

Proposición 3.7 *a) Para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $D^L(df) = d(Df) \in \Omega$.*

b) Si $f, g \in \mathcal{C}^\infty(U)$, entonces

$$D^L(gdf) = (Dg)df + gD^L(df).$$

c) Dada $\omega \in \Omega$, existe la $D^L\omega$ y está en Ω.

Demostración. (a) Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $\omega = df$. Para cada $E \in \mathcal{D}(U)$ y cada $x \in U$ tendremos —ver tema II— que

$$\begin{aligned}[D^L(df)E](x) &= \lim_{t\to 0} \frac{d_{X_t(x)}f(X_{t*}E_x) - d_x f(E_x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{E(f\circ X_t)(x) - Ef(x)}{t} \\ &= \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial s}(0,0,0) = E(Df)(x) = [d(Df)E](x).\end{aligned}$$

Se sigue por tanto que $D^L(df) \in \Omega(U) = \mathcal{T}_1^0(U)$.
(c) Es consecuencia de (a), (b) y de que $\omega = \sum g_i du_i$. ∎

Para demostrar ahora que la derivada de lie de cualquier campo tensorial existe y es un campo tensorial necesitamos el siguiente resultado.

Teorema 3.8 *Sea $D \in \mathcal{D}$ y sean T y T' dos campos tensoriales para los que existen las derivadas $D^L T$ y $D^L T'$ y son campos tensoriales. Entonces $D^L(T\otimes T')$ existe y vale $D^L T \otimes T' + T \otimes D^L T'$.*

Demostración. Consideremos $D_i, D_j \in \mathcal{D}$ y $\omega_k, \omega_l \in \Omega$ y definamos las aplicaciones

$$\begin{aligned} A\colon \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad A(t,x) = T_{X_t(x)}(X_{t*}D_{ix}, X_{t*}\omega_{kx}), \\ A'\colon \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad A'(t,x) = T'_{X_t(x)}(X_{t*}D_{jx}, X_{t*}\omega_{lx}). \end{aligned}$$

Entonces se tiene que,

$$\begin{aligned} D^L(T\otimes T')(D_i, D_j, \omega_k, \omega_l)(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{A(t,x)A'(t,x) - A(x)A'(x)}{t} \\ &= [T\otimes D^L T' + D^L T \otimes T'](D_i, D_j, \omega_k, \omega_l)(x). \end{aligned}$$ ∎

Corolario 3.9 *Todo campo tensorial de tipo (p,q) tiene derivada de Lie respecto de cualquier campo tangente y es un campo tensorial de tipo (p,q).*

Demostración. Como los campos tensoriales de tipo $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ satisfacen las condiciones del resultado anterior y todo campo tensorial T de tipo (p,q) puede escribirse, en un sistema de coordenadas, como

$$\sum_{\alpha=(i_1,\dots,j_q)} T_\alpha dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_q}},$$

tendremos que $D^L T$ existe y es un campo tensorial de tipo (p,q). ∎

Teorema 3.10 *La derivada de Lie tiene las siguientes propiedades:*

i) $D^L T = Df$, *para cada* $T = f \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

ii) $D^L T = [D, E]$, *para cada* $T = E \in \mathcal{D}$.

iii) $D^L(df) = d(Df)$, *para cada* $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

iv) $D^L(T \otimes T') = D^L T \otimes T' + T \otimes D^L T'$, *para* T *y* T' *campos tensoriales.*

v) $D^L(C_i^j T) = C_i^j(D^L T)$, *para cada campo tensorial* T.

vi) $D^L\omega(E) = D(\omega E) - \omega(D^L E)$, *para cada* $\omega \in \Omega$ *y* $E \in \mathcal{D}$.

vii) *Para cada campo tensorial* T, $D_i \in \mathcal{D}$ *y* $\omega_j \in \Omega$

$$\begin{aligned} D^L T(D_i, \omega_j) = {} & D[T(D_i, \omega_j)] - \\ & - T(D^L D_1, D_2, \ldots, D_p, \omega_1, \ldots, \omega_q) - \ldots - \\ & - T(D_1, \ldots, D^L D_p, \omega_1, \ldots, \omega_q) - \\ & - T(D_1, \ldots, D_p, D^L\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q) - \ldots - \\ & - T(D_1, \ldots, D_p, \omega_1, \ldots, \omega_{q-1}, D^L\omega_q). \end{aligned}$$

viii) $D^L T = 0$ *si y sólo si* $X_{t*}T = T$, *para cada campo tensorial* T *y restringiendo* T *a los entornos en los que* X_t *es difeomorfismo.*

ix) $(D_1 + D_2)^L = D_1^L + D_2^L$, *para cada par de campos* $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(U)$.

x) $[D_1, D_2]^L = D_1^L \circ D_2^L - D_2^L \circ D_1^L$.

Demostración. (v) Es consecuencia de que

$$F_*(C_i^j T) = C_i^j(F_* T).$$

(vi) y (vii) son consecuencia de (iv), (v), de que $C_1^1(D \otimes \omega) = \omega D$ y de la linealidad de C_1^1.

(viii) En las funciones $A(t,x)$ de (**3.8**) se tiene que $\partial A(t,x)/\partial t = 0$, por tanto $A(t,x) = A(0,x)$, para todo $(t,x) \in \mathcal{W}$.

(ix) Es consecuencia de (vii).

(x) Para $T = f$ es la definición. Para $T = D$ es consecuencia de la igualdad de Jacobi. Para $T = df$ es consecuencia de (iii). Para $T = gdf$ es un simple cálculo. Para $T = \omega$ es consecuencia de (i) y el caso anterior. Y para T arbitrario es consecuencia de los casos anteriores y de (vii). ∎

3.4. Campos tensoriales Covariantes

Definición. Llamaremos *campos tensoriales covariantes de orden p* en U, a los campos tensoriales de $\mathcal{T}_p^0(U)$.

Proposición 3.11 *Toda aplicación diferenciable, $F\colon U \subset \mathcal{E}_1 \longrightarrow V \subset \mathcal{E}_2$, define un morfismo de módulos*

$$F^*\colon \mathcal{T}_p^0(V) \longrightarrow \mathcal{T}_p^0(U),$$

tal que para cada $T \in \mathcal{T}_p^0(V)$ y para cada $D_1, \ldots, D_p \in \mathcal{D}(U)$, $x \in U$ e $y = F(x)$

$$F^*T(D_1, \ldots, D_p)(x) = T_y(F_*D_{1x}, \ldots, F_*D_{px}).$$

Además F^* verifica las propiedades:

a) $F^*(T_1 + T_2) = F^*(T_1) + F^*(T_2)$, *para cada* $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_p^0(V)$.
b) $F^*(fT) = F^*(f)F^*(T)$, *para cada* $T \in \mathcal{T}_p^0(V)$ *y* $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$.
c) $F^*(T_1 \otimes T_2) = F^*(T_1) \otimes F^*(T_2)$, *para* $T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{T}_p^0(V)$.

por tanto es un morfismo de módulos que conserva el producto tensorial.

Demostración. Para cada $x \in U$ e $y = F(x)$, tenemos que $T_y \in \mathcal{T}_p^0[T_y(\mathcal{E}_2)]$ por tanto para

$$(F^*T)_x(D_{1x}, \ldots, D_{px}) = T_y(F_*D_{1x}, \ldots, F_*D_{px}),$$

tendremos que $(F^*T)_x \in \mathcal{T}_p^0[T_x(\mathcal{E}_1)]$,

Basta ver que $F^*T(D_1, \ldots, D_p) \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

Si $T = \sum T_\alpha dv_{i_1} \otimes \ldots \otimes dv_{i_p}$, para $\alpha = (i_1, \ldots, i_p)$ y siendo $T_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V)$, entonces para cada $x \in U$,

$$F^*T(D_1, \ldots, D_p)(x) = \sum_\alpha T_\alpha(F(x))D_1(v_{i_1} \circ F)(x) \cdots D_p(v_{i_p} \circ F)(x),$$

y como $v_{i_j} \circ F \in \mathcal{C}^\infty(U)$, el resultado se sigue.

El resto de apartados queda como ejercicio. ∎

Definición. Diremos que un *tensor covariante* , $T \in \mathcal{T}_p^0(U)$ es *simétrico* si dados cualesquiera $D_1, \ldots, D_p \in \mathcal{D}(U)$ y $1 \leq i, j \leq p$, se tiene

$$T(D_1, \ldots, D_i, \ldots, D_j, \ldots, D_p) = T(D_1, \ldots, D_j, \ldots, D_i, \ldots, D_p).$$

Denotaremos con $\Sigma_p(U)$ ó Σ_p si no hay confusión, el conjunto de los campos tensoriales de $\mathcal{T}_p^0(U)$ que son simétricos, y con Σ_1 a $\mathcal{T}_1^0(U) = \Omega$.
Definición. Diremos que T es *hemisimétrico* ó *alterno* si en las condiciones de antes se tiene que

$$T(D_1, \ldots, D_i, \ldots, D_j, \ldots, D_p) = -T(D_1, \ldots, D_j, \ldots, D_i, \ldots, D_p).$$

Denotaremos con $\Lambda_p(U)$ ó Λ_p si no hay confusión, el conjunto de los campos tensoriales de $\mathcal{T}_p^0(U)$ que son hemisimétricos. Entenderemos por $\Lambda_0 = \mathcal{C}^\infty(U)$ y por $\Lambda_1 = \mathcal{T}_1^0(U) = \Omega$.

Ejercicio 3.4.1 Demostrar que si $F\colon U \longrightarrow V$ es diferenciable, entonces F^* conserva la simetría y la hemisimetría de los tensores simétricos y hemisimétricos respectivamente.

Nota 3.12 Recordemos que dada una permutación $\sigma \in S_p$, el $\operatorname{sig}(\sigma)$ está definido de la forma siguiente:

Se considera el polinomio

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_I (x_i - x_j),$$

donde $I = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\}$. Ahora se define $\operatorname{sig}(\sigma)$ como el valor ± 1 tal que

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{sig}(\sigma) P(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

y se demuestra que

$$\operatorname{sig}(\sigma_1) \operatorname{sig}(\sigma_2) = \operatorname{sig}(\sigma_1 \circ \sigma_2),$$

que si σ es una *trasposición*, es decir intercambia sólo dos elementos, entonces $\operatorname{sig}(\sigma) = -1$, y que toda permutación es composición finita de trasposiciones.

Definición. Dada una permutación $\sigma \in S_p$, definimos la aplicación $\mathcal{C}^\infty(U)$–lineal

$$\sigma\colon \mathcal{T}_p^0(U) \longrightarrow \mathcal{T}_p^0(U),$$

que para $T \in \mathcal{T}_p^0$ y $D_1, \ldots, D_p \in \mathcal{D}$, vale

$$\sigma(T)[D_1, \ldots, D_p] = T(D_{\sigma(1)}, \ldots, D_{\sigma(p)}).$$

Nota 3.13 Esta aplicación tiene las propiedades:
$(\tau \circ \sigma)[T] = \tau[\sigma(T)]$.
$id[T] = T$.
$\sigma^{-1}[\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p] = \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)}$.

Ejercicio 3.4.2 Demostrar que son equivalentes:
(i) $T \in \mathcal{T}_p^0(U)$ es hemisimétrico.
(ii) Dados $D_1, \ldots, D_p \in \mathcal{D}(U)$ tales que existen $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ distintos para los que $D_i = D_j$, entonces $T(D_1, \ldots, D_p) = 0$.
(iii) Dada $\sigma \in S_p$, $\sigma(T) = \operatorname{sig}(\sigma)T$.

Definición. Llamaremos *aplicaciones de simetrización y hemisimetrización* a las aplicaciones $\mathcal{C}^\infty(U)$–lineales

$$\mathcal{S}\colon \mathcal{T}_p^0(U) \longrightarrow \mathcal{T}_p^0(U)\ , \quad \mathcal{H}\colon \mathcal{T}_p^0(U) \longrightarrow \mathcal{T}_p^0(U),$$

definidas por

$$\mathcal{S}(T) = \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(T), \quad \mathcal{H}(T) = \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\sigma(T),$$

para cada $T \in \mathcal{T}_p^0$.

Estas operaciones tienen las siguientes propiedades:

Proposición 3.14 a) $\mathcal{S}^2 = p!\mathcal{S}$ *y* $\mathcal{H}^2 = p!\mathcal{H}$.
b) *Si* $\mathcal{H}(T) = 0$, *para* $T \in \mathcal{T}_p^0$, *entonces* $\mathcal{H}(T \otimes Q) = \mathcal{H}(Q \otimes T) = 0$, *para cada* $Q \in \mathcal{T}_q^0$.
c) $\mathcal{S}(\mathcal{T}_p^0) = \Sigma_p$ *y* $\mathcal{H}(\mathcal{T}_p^0) = \Lambda_p$.
d) $T \in \mathcal{T}_p^0$ *es simétrico si y sólo si* $\mathcal{S}(T) = p!T$, *y es hemisimétrico si y sólo si* $\mathcal{H}(T) = p!T$.
e)

$$\mathcal{H}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (\operatorname{sig}\sigma)\omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)}.$$

f) *Si* $F\colon U \longrightarrow V$ *es diferenciable entonces* $\mathcal{S}$ *y* $\mathcal{H}$ *conmutan con*

$$F^*\colon \mathcal{T}_p^0(V) \longrightarrow \mathcal{T}_p^0(U).$$

Demostración. Veamos (b): Sea $\sigma \in S_p$ considerada como elemento de S_{p+q}, donde los q últimos quedan fijos. Entonces

$$\sum_{\sigma \in S_p} (\operatorname{sig}\sigma)\sigma(T_p \otimes T_q) = \mathcal{H}(T_p) \otimes \mathcal{H}(T_q) = 0,$$

y aplicando $\tau \in S_{p+q}$, tendremos que

$$\sum_{\sigma \in S_p} [\mathrm{sig}(\tau \circ \sigma)](\tau \circ \sigma)(T_p \otimes T_q) = 0,$$

para toda $\tau \in S_{p+q}$. Por tanto $\mathcal{H}(T_p \otimes T_q) = 0$, pues podemos hacer una partición en S_{p+q} mediante S_p, siendo nulo cada sumando como el de la expresión anterior, correspondiente a esta partición. ∎

Ejercicio 3.4.3 Demostrar que si $T \in \Lambda_n(U)$, $D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{D}(U)$ y $E_i = \sum a_{ij} D_j \in \mathcal{D}(U)$ entonces

$$T(E_1, \ldots, E_n) = \det(a_{ij}) T(D_1, \ldots, D_n).$$

Nota 3.15 Para cada $(p, q) \in I = [\mathbb{N} \cup \{0\}]^2$ hemos definido el $\mathcal{C}^\infty(U)$–módulo de los campos tensoriales de tipo (p, q). En este módulo hay suma y producto por funciones de $\mathcal{C}^\infty(U)$ y nada más. Sin embargo hemos definido un producto entre campos tensoriales sin que hayamos dicho en donde es operación. Procediendo como sigue podremos considerar las tres operaciones anteriores en un contexto común:

Consideremos el conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(U) &= \oplus_{(i,j)\in I} \mathcal{T}_i^j(U) \\ &= \{T = (T_i^j) \in \prod_I \mathcal{T}_i^j(U) : \ \exists N \in \mathbb{N},\, i, j \geq N \Rightarrow T_i^j = 0\}. \end{aligned}$$

Cada elemento de este conjunto lo escribiremos de la forma

$$\sum T_i^j = T_0^0 + T_0^1 + T_1^0 + T_0^2 + \cdots + T_p^q,$$

y en él podemos definir la suma (sumando componente a componente) y el producto tensorial (remitiéndonos al producto tensorial ya definido), de tal forma que el que damos en $\mathcal{T} = \mathcal{T}(U)$ sea distributivo respecto de la suma y asociativo (observemos que hay un único modo de hacer esto).

Por otro lado todo campo tensorial $T \in \mathcal{T}_p^q$ se identifica de forma natural con un único elemento de $\mathcal{T}$, que tiene todas la componentes nulas excepto la (p, q) que es T.

De esta forma tenemos que $\mathcal{T}$ tiene una estructura de álgebra sobre $\mathcal{C}^\infty(U)$, a la que llamaremos *álgebra tensorial* sobre U.

Del mismo modo podemos proceder con los campos tensoriales hemisimétricos Λ_p. Definimos

$$\Lambda = \oplus \Lambda_p,$$

con la suma habitual. Sin embargo tenemos un problema al definir el producto tensorial, pues si ω y ω' son hemisimétricos $\omega \otimes \omega'$ no tiene por qué serlo. Por tanto aunque Λ es un submódulo de $\mathcal{T}$ respecto de $\mathcal{C}^\infty(U)$, no es una subálgebra.

Observamos de todas formas que $\omega \otimes \omega'$ define un campo tensorial hemisimétrico, a saber $\mathcal{H}(\omega \otimes \omega')$. Este hecho nos permitirá definir otra multiplicación para tensores hemisimétricos extremadamente útil.

Ejercicio 3.4.4 Demostrar que si $\mathcal{H}(T_r) = \mathcal{H}(Q_r) \in \Lambda_r$ y $\mathcal{H}(T_s) = \mathcal{H}(Q_s) \in \Lambda_s$, entonces

$$\mathcal{H}(T_r \otimes T_s) = \mathcal{H}(Q_r \otimes Q_s).$$

Definición. Sean $\omega_r = \mathcal{H}(T_r) \in \Lambda_r$ y $\omega_s = \mathcal{H}(T_s) \in \Lambda_s$. Llamaremos *producto exterior* de estos campos tensoriales al campo tensorial

$$\omega_r \wedge \omega_s = \mathcal{H}(T_r \otimes T_s),$$

el cual está bien definido en virtud del ejercicio anterior.

Ejercicio 3.4.5 Demostrar que para $\omega_1 = \mathcal{H}(T_1) \in \Lambda_{i_1}, \ldots, \omega_r = \mathcal{H}(T_r) \in \Lambda_{i_r}$

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r = \mathcal{H}(T_1 \otimes \cdots \otimes T_r).$$

Podemos definir ahora en Λ una estructura de álgebra asociativa sobre $\mathcal{C}^\infty(U)$, donde el producto

$$\wedge : \Lambda \times \Lambda \longrightarrow \Lambda,$$

se define extendiendo el producto exterior, de tal forma que siga siendo bilineal y por tanto que sea distributivo respecto de la suma. Observemos que, al igual que para el producto tensorial, hay una única forma de hacer esto y es que si $\varphi = \varphi_1 + \cdots + \varphi_m$ y $\psi = \psi_1 + \cdots + \psi_n$, con los $\varphi_i \in \Lambda_{k_i}$ y los $\psi_j \in \Lambda_{r_j}$ entonces $\varphi \wedge \psi = \sum \sum \varphi_i \wedge \psi_j$.

Definición. A la $\mathcal{C}^\infty(U)$–álgebra $(\Lambda, +, \wedge)$ sobre U la llamaremos *álgebra exterior* ó *álgebra de Grassman de las formas diferenciales* de U.

Ejercicio 3.4.6 Demostrar que

$$\mathcal{H}\colon (\mathcal{T},+,\otimes) \longrightarrow (\Lambda,+,\wedge),$$

es un homomorfismo de $\mathcal{C}^\infty(U)$–álgebras.

Nota 3.16 Se demuestra fácilmente que $(T \wedge Q)_x = T_x \wedge Q_x$. Por tanto en virtud de las propiedades del producto exterior de tensores hemisimétricos en un espacio vectorial se siguen las siguientes propiedades para cualesquiera $\omega_r \in \Lambda_r$, $\omega_s \in \Lambda_s$ y $D \in \mathcal{D}$:

$$\omega_r \wedge \omega_s = (-1)^{rs}\omega_s \wedge \omega_r,$$
$$i_D(\omega_r \wedge \omega_s) = (i_D\omega_r) \wedge \omega_s + (-1)^r \omega_r \wedge (i_D\omega_s),$$
$$\text{si } r \text{ es impar} \quad \Rightarrow \quad \omega_r \wedge \omega_r = 0.$$

Ejercicio 3.4.7 Demostrar que si $D \in \mathcal{D}$, entonces

$$D^L(\omega_r \wedge \omega_s) = D^L\omega_r \wedge \omega_s + \omega_r \wedge D^L\omega_s.$$

por tanto la derivada de Lie es una derivación del álgebra exterior.

Teorema 3.17 *Para cada sistema de coordenadas $(u_1,\ldots,u_n)$ en U, se tiene:*

a) *$du_1,\ldots,du_n$ son una base de $\Lambda_1(U)$.*
b) *Para $r \leq n$, son una base de $\Lambda_r(U)$, los campos tensoriales*

$$du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r}, \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n.$$

c) *Para $n < r$, $\Lambda_r(U) = 0$.*

Por tanto $\Lambda(U)$ tiene una base formada por 2^n elementos, es decir

$$\operatorname{rang}\Lambda(U) = 2^n.$$

Demostración. Para $r \in \mathbb{N}$, los n^r campos tensoriales $du_{i_1} \otimes \cdots \otimes du_{i_r}$, son base de $\mathcal{T}_r^0(U)$ y $\mathcal{H}(\mathcal{T}_r^0(U)) = \Lambda_r(U)$. Por tanto los campos tensoriales del enunciado al menos generan $\Lambda_r(U)$. Como por otra parte son independientes, pues si existe una combinación $\omega = \sum f_i\omega_i = 0$, donde i recorre los elementos de la forma $(i_1,\ldots,i_r)$ con $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$ y

$$\omega_i = du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r},$$

entonces

$$f_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial u_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_{i_r}}\right) = 0.$$

Se sigue que son base de $\Lambda_r(U)$.

Si $n < r$ y $\omega \in \Lambda_r(U)$, entonces como para cualquier colección de

$$\frac{\partial}{\partial u_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_{i_r}},$$

alguna debe repetirse, tendremos que

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial u_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_{i_r}}\right) = 0,$$

por ser ω hemisimétrica, y por tanto $\omega = 0$. ∎

Nota 3.18 Observemos que $\Lambda_n(U)$ tiene una base formada por un único elemento, que en los términos anteriores es $\omega_n = du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$. Cualquier otra base por tanto será de la forma $f\omega_n$, donde $f > 0$ (ó $f < 0$) en todo U. Esto permite clasificar las bases de $\Lambda_n(U)$ en dos tipos, las que tienen la misma orientación que ω_n —es decir con la $f > 0$—, y las que tienen orientación contraria —es decir con la $f < 0$—.

Ejercicio 3.4.8 Demostrar que si $D_i = \sum a_{ij}\partial_j \in \mathcal{D}(U)$, entonces

$$du_1 \wedge \cdots \wedge du_n(D_1, D_2, \ldots, D_n) = \det(a_{ij}).$$

Ejercicio 3.4.9 Demostrar que si $F\colon U \longrightarrow V$ es diferenciable, entonces la aplicación

$$F^*\colon \Lambda(V) \longrightarrow \Lambda(U), \qquad F^*(\sum \omega_i) = \sum (F^*\omega_i),$$

donde $\omega_i \in \Lambda_i$, es un homomorfismo de álgebras sobre $\mathcal{C}^\infty(U)$.

3.5. La diferencial exterior

Teorema 3.19 *Existe una única aplicación $\mathbb{R}$–lineal $d\colon \Lambda \longrightarrow \Lambda$, a la que llamamos diferencial exterior, tal que para cada $p \geq 0$, $d(\Lambda_p) \subset \Lambda_{p+1}$ y para todo $D \in \mathcal{D}$ verifica*

$$D^L = i_D \circ d + d \circ i_D.$$

Demostración. *Unicidad.-* Para $p = 0$, sea d_1 una que satisfaga el enunciado y sea $f \in \Lambda_0 = \mathcal{C}^\infty(U)$. Como $df \in \Lambda_1$ e $i_D f = 0$, tendremos que

$$(df)D = Df = D^L f = i_D(d_1 f) + d_1(i_D f) = i_D(d_1 f) = (d_1 f)D,$$

para todo $D \in \mathcal{D}$, por tanto $d_1 f = df$.

Supongámoslo cierto para $p \leq k-1$ y demostrémoslo para $p = k$.

Sea $\omega \in \Lambda_k$, entonces si d y d' satisfacen el enunciado, tendremos que para cualesquiera $D, D_1, \ldots, D_k \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} d\omega(D, D_1, \ldots, D_k) &= i_D d\omega(D_i) = D^L\omega(D_i) - d(i_D\omega)(D_i) \\ &= D^L\omega(D_i) - d'(i_D\omega)(D_i) = d'\omega(D, D_1, \ldots, D_k) \end{aligned}$$

pues $i_D\omega \in \Lambda_{k-1}$.

Existencia.- Vamos a definir $d\colon \Lambda_p \longrightarrow \Lambda_{p+1}$ recurrentemente. Para $p = 0$ ya la conocemos. Supongámoslas definidas para $p \leq k-1$ y definámosla para $p = k$:

Para cada $\omega \in \Lambda_k$, definimos $d\omega \in \Lambda_{k+1}$, tal que para $D_i \in \mathcal{D}$ y $D \in \mathcal{D}$

$$(d\omega)(D, D_1, \ldots, D_k) = (D^L\omega)(D_1, \ldots, D_k) - d(i_D\omega)(D_1, \ldots, D_k).$$

Que es lineal en cada componente respecto de la suma, así como respecto del producto por funciones diferenciables en las k últimas componentes, es evidente. Antes de ver la linealidad en la primera componente veamos que es hemisimétrico.

Si $D = D_1$ —para $D = D_i$ se hace análogamente—, entonces

$$\begin{aligned} d(i_D\omega)(D, D_2, \ldots, D_k) &= \\ &= i_D d(i_D\omega)(D_2, \ldots, D_k) \\ &= D^L(i_D\omega)(D_2, \ldots, D_k) - d(i_D i_D\omega)(D_2, \ldots, D_k) \\ &= D^L(i_D\omega)(D_2, \ldots, D_k) \\ &= D[(i_D\omega)(D_2, \ldots, D_k)] + \\ &\quad + \sum_{i=2}^{k} (i_D\omega)(D_2, \ldots, [D, D_i], \ldots, D_k) \\ &= (D^L\omega)(D, D_2, \ldots, D_k). \end{aligned}$$

Si $D_i = D_j$, con $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$, es evidente pues $D^L\omega$ y $d(i_D\omega)$ son hemisimétricos.

Ahora

$$\begin{aligned} (d\omega)(fD, D_1, \ldots, D_k) &= -(d\omega)(D_1, fD, \ldots, D_k) \\ &= -f(d\omega)(D_1, D, \ldots, D_k) \\ &= f(d\omega)(D, D_1, \ldots, D_k). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 3.20 *La diferencial exterior tiene las propiedades siguientes:*

i) *Es antiderivación, es decir*

$$d(\omega_p \wedge \omega_q) = d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q,$$

para $\omega_p \in \Lambda_p$ *y* $\omega_q \in \Lambda_q$.

ii) $d^2 = 0$.

iii) $D^L \circ d = d \circ D^L$, *para cada* $D \in \mathcal{D}$.

iv) *Si* $F\colon U \longrightarrow V$ *es diferenciable, entonces* $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$, *para cada* $\omega \in \Lambda$.

v) *Para* $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ *y* $\omega \in \Omega$ *se tiene*

$$d\omega(D_1, D_2) = D_1(\omega D_2) - D_2(\omega D_1) - \omega[D_1, D_2].$$

vi) *Para* $\omega \in \Lambda_p$ *y* $D_i \in \mathcal{D}$ *se tiene*

$$\begin{aligned} d\omega(D_0, \ldots, D_p) = (-1)^i D_i[\omega(D_0, \ldots, D_{i-1}, D_{i+1}, \ldots, D_p)] + \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([D_i, D_j], D_0, \ldots, D_{i-1}, D_{i+1}, \ldots, \\ \ldots, D_{j-1}, D_{j+1}, \ldots, D_p). \end{aligned}$$

Demostración. (i) Veámoslo por inducción sobre $p+q$.

Para $p+q=0$, es evidente pues $p=q=0$, $\omega_p = f$, $\omega_q = g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $\omega_p \wedge \omega_q = fg$.

Supongamos que es cierto para los $p+q \leq n-1$ y probémoslo para $p+q=n$.

Para cada $D \in \mathcal{D}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&i_D[d(\omega_p \wedge \omega_q)] = \\
&\quad = D^L(\omega_p \wedge \omega_q) - d[i_D(\omega_p \wedge \omega_q)] \\
&\quad = D^L\omega_p \wedge \omega_q + \omega_p \wedge D^L\omega_q - d[i_D\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge i_D\omega_q] \\
&\quad = D^L\omega_p \wedge \omega_q + \omega_p \wedge D^L\omega_q - d(i_D\omega_p) \wedge \omega_q - \\
&\qquad - (-1)^{p-1} i_D\omega_p \wedge d\omega_q - (-1)^p d\omega_p \wedge i_D\omega_q - \\
&\qquad - (-1)^p (-1)^p \omega_p \wedge d(i_D\omega_q) \\
&\quad = [D^L\omega_p - d(i_D\omega_q)] \wedge \omega_q + (-1)^{p-1} d\omega_p \wedge i_D d\omega_q + \\
&\qquad + (-1)^p i_D\omega_p \wedge d\omega_q + \omega_p \wedge [D^L\omega_q - d(i_D\omega_q)] \\
&\quad = i_D(d\omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^{p-1} d\omega_p \wedge i_D d\omega_q + (-1)^p [i_D\omega_p \wedge d\omega_q + \\
&\qquad + (-1)^p \omega_p \wedge i_D(d\omega_q)] = i_D[d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q],
\end{aligned}$$

por tanto se tiene la igualdad (i).

(ii) Veamos que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $d(df) = 0$. Sea $D \in \mathcal{D}$, entonces

$$i_D(d(df)) = D^L(df) - d[i_D(df)] = d(Df) - d[(df)D] = 0.$$

El resultado se sigue para una ω arbitraria, poniéndola en coordenadas, aplicando (i) y el primer caso.

(iii) Es consecuencia de la definición y de (ii).

(iv) Para $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, $D \in \mathcal{D}(U)$, $x \in U$ e $y = F(x)$ tenemos

$$\begin{aligned}
[F^*(df)]D(x) &= (df)_y(F_* D_x) = d_y f(F_* D_x) \\
&= D_x(f \circ F) = D(f \circ F)(x) = d(F^* f)D(x),
\end{aligned}$$

por tanto $F^* df = dF^* f$.

Para $\omega = df$, con $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ es trivial.

Para $\omega = g df_1 \wedge \cdots \wedge df_p$, con $g, f_i \in \mathcal{C}^\infty(V)$ tenemos que

$$\begin{aligned} F^* d\omega &= F^*(dg \wedge \cdots \wedge df_p) = (F^* dg) \wedge (F^* df_1) \wedge \cdots \wedge (F^* df_p) \\ &= d(F^* g) \wedge d(F^* f_1) \wedge \cdots \wedge d(F^* f_p) \\ &= d[F^* g \wedge F^*(df_1) \wedge \cdots \wedge F^*(df_p)] \\ &= dF^* \omega. \end{aligned}$$

Ahora en general, para $\omega = \sum \omega_a$, donde

$$\omega_a = f_a dv_{i_1} \wedge \cdots \wedge dv_{i_p}.$$

se sigue de los casos anteriores.

(v)

$$\begin{aligned} d\omega(D_1, D_2) &= i_{D_1} d\omega(D_2) = D_1^L \omega(D_2) - d(i_{D_1}\omega)(D_2) \\ &= D_1(\omega D_2) - \omega(D_1^L D_2) - d(\omega D_1)(D_2) \\ &= D_1(\omega D_2) - D_2(\omega D_1) - \omega[D_1, D_2]. \end{aligned}$$

(vi) Se hace por inducción teniendo en cuenta (g) de **(3.10)** y que $D^L = i_D \circ d + d \circ i_D$. ∎

Para cada $D \in \mathcal{D}$ hemos visto las siguientes propiedades de D^L:

i) $D^L f = Df$.

ii) *Si* $T \in \mathcal{T}_p^q$ *entonces* $D^L T \in \mathcal{T}_p^q$.

iii) $D^L(T \wedge T') = D^L T \wedge T' + T \wedge D^L T'$.

iv) $D^L \circ d = d \circ D^L$.

Recíprocamente se tiene

Ejercicio 3.5.1 Demostrar que el único operador $\mathcal{L} \colon \Lambda \longrightarrow \Lambda$ que verifica las 4 propiedades anteriores es D^L para algún campo D.

3.6. El Lema de Poincaré

Definición. Como consecuencia de **(ii)** de **(3.20)**, tenemos que si $\omega \in \Lambda_p$ es *exacta*, es decir existe $\omega_{p-1} \in \Lambda_{p-1}$ tal que $\omega = d\omega_{p-1}$, entonces ω es *cerrada* , es decir $d\omega = 0$, y podemos definir los espacios cociente

$$\mathcal{H}^p(U) = \{\omega \in \Lambda_p : \ d\omega = 0\}/\{\omega \in \Lambda_p : \ \omega = d\omega_{p-1}\},$$

que llamaremos —para cada $p \in \mathbb{N}$—, *grupo p–ésimo de Cohomología de De Rham* de U. Los cuales no dependen de la estructura diferenciable de U, sino de la topológica (aunque esto no lo veremos).

Ejercicio 3.6.1 Demostrar que la 1–forma del plano $(y^2 + h)dx + (x^2 + h)dy$ es exacta sii $h = 2xy + f(x + y)$.

Veremos que en todo abierto de $\mathbb{R}^n$ los grupos de cohomología son nulos. Dicho de otro modo, toda ω_p cerrada, $(d\omega_p = 0)$, es exacta $(\omega_p = d\omega_{p-1})$.

Definición. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Llamaremos *curva diferenciable de p–formas* a toda aplicación

$$I \longrightarrow \Lambda_p, \qquad t \rightsquigarrow \omega_t,$$

tal que para $D_1, \ldots, D_p \in \mathcal{D}$ y $x \in U$ la función

$$f(t) = \omega_t(D_1, \ldots, D_p)(x),$$

está en $\mathcal{C}^\infty(I)$.

Definición. Dada una curva diferenciable de p–formas ω_t y $r, s \in I$, definimos en los términos anteriores:

1. La $d\omega_t/dt \in \Lambda_p$ como la p–forma

$$\frac{d\omega_t}{dt}(D_1, \ldots, D_p)(x) = f'(t),$$

2. La $\int_r^s \omega_t dt \in \Lambda_p$ como la p–forma

$$\left[\int_r^s \omega_t dt\right](D_1,\ldots,D_p)(x) = \int_r^s f(t)dt.$$

Ejercicio 3.6.2 Demostrar que si

$$\omega_t = \sum f_a(t,x) dx_{a_1} \wedge \cdots \wedge dx_{a_p},$$

entonces:

i)
$$\frac{d\omega_t}{dt} = \sum \frac{df_a}{dt} dx_{a_1} \wedge \cdots \wedge dx_{a_p}.$$

ii)
$$\int_r^s \omega_t dt = \sum \left[\int_r^s f_a(t,x)dt\right] dx_{a_1} \wedge \cdots \wedge dx_{a_p}.$$

iii) Si $\omega_t \to \eta$, cuando $t \to r$ ($r \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$), entonces

$$\lim_{t\to r} d\omega_t = d[\lim_{t\to r} \omega_t] = d\eta.$$

Proposición 3.21 *Dada una curva diferenciable de p–formas, ω_t, se tiene*

$$\int_r^s d\omega_t dt = d\int_r^s \omega_t dt.$$

Demostración. Si

$$\omega_t = \sum f_a(t,x) dx_{a_1} \wedge \cdots \wedge dx_{a_p},$$

entonces

$$\begin{aligned} d\omega_t &= \sum \left(\sum \frac{\partial f_a}{\partial x_i} dx_i\right) \wedge dx_{a_1} \wedge \cdots \wedge dx_{a_p}, \\ \int_r^s d\omega_t dt &= \sum\sum \left[\int_r^s \frac{\partial f_a}{\partial x_i} dt\right] dx_i \wedge dx_{a_1} \wedge \cdots \wedge dx_{a_p} \\ &= \sum \left(\sum \frac{\partial \left[\int_r^s f_a(t,x)dt\right]}{\partial x_i} dx_i\right) \wedge dx_{a_1} \wedge \cdots \wedge dx_{a_p} \\ &= d\left[\int_r^s \omega_t dt\right]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Como consecuencia tenemos el principal resultado de esta lección.

Lema de Poincaré 3.22 *Si $\omega \in \Lambda_{p+1}$ es cerrada ($d\omega = 0$), entonces es exacta, es decir existe $\eta \in \Lambda_p$, tal que $\omega = d\eta$.*

Demostración. Sea $H = \sum x_i \partial_i$ el campo de las homotecias y $\tau_t(z) = \mathrm{e}^t\, z$ su grupo uniparamétrico. Entonces

$$\frac{d(\tau_t^*\omega)}{dt} = \tau_t^*(H^L\omega) = \tau_t^*(di_H\omega) = d(\tau_t^* i_H\omega),$$

y como $\tau_0^*\omega = \omega$, tendremos que para $r < 0$

$$\omega - \tau_r^*\omega = \int_r^0 d(\tau_t^* i_H\omega)dt = d\int_r^0 [\tau_t^* i_H\omega]dt,$$

y como $\tau_r^*\omega \to 0$, cuando $r \to -\infty$, tendremos (por el apartado (iii) del ejercicio (3.6.2)) que $\omega = d\eta$ para

$$\eta = \int_{-\infty}^0 [\tau_t^* i_H\omega]dt. \quad \blacksquare$$

Nota 3.23 Observemos que

$$\eta(D_1, \ldots, D_p)(z) = \int_{-\infty}^0 [\tau_t^* i_H\omega](D_1, \ldots, D_p)(z)dt,$$

y si consideramos un sistema de coordenadas lineales tales que $\partial_{iz} = D_{iz}$ para $i = 1, \ldots, p$ —suponemos que los D_i son independientes en z—, entonces la expresión anterior es igual a

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^0 i_H\omega \left(\mathrm{e}^t \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \mathrm{e}^t \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}\right)(\mathrm{e}^t\, z)dt \\
&= \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{tp}\,\omega \left(H, \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}\right)(\mathrm{e}^t\, z)dt \\
&= \int_0^1 t^{p-1}\omega \left(H, \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}\right)(tz)dt,
\end{aligned}$$

que es integrable para $p \geq 0$. Además se ve sin dificultad que $\eta \in \Lambda_p$.

Nota 3.24 Vamos a verlo para 1–formas en $\mathbb{R}^2$.

Sea $\omega = f dx + g dy \in \Lambda_1$, entonces

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx + dg \wedge dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= (g_x - f_y) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

por tanto

$$d\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y},$$

y esto es así si y sólo si existe $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f, \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = g.$$

Una h tal viene dada por

$$h(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_0) dt + \int_{y_0}^{y} g(x,t) dt,$$

y esto equivale a que $\omega = dh$.

Ahora observemos que por **(3.23)** tenemos —para $z = (x,y)$— que

$$h(x,y) = \int_0^1 t^{-1} \omega(H)(tz) dt = \int_0^1 x f(tx, ty) dt + \int_0^1 y g(tx, ty) dt.$$

3.7. Aplicación. Factores de integración

En (2.11), pág.109, vimos un método que nos permitía resolver una ecuación diferencial, siempre que conociéramos un grupo de simetrías que la dejara invariante. No obstante este método tenía un inconveniente, pues era imprescindible conocer en que sistema de coordenadas el campo correspondiente al grupo era de la forma $\partial/\partial x$. Ahora veremos otro método en el que esto no es necesario.

Consideremos una ecuación diferencial,

$$y'(x) = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}, \qquad \omega \doteq -g dx + f dy = 0$$

y el campo incidente que la define

$$D = f\frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial y},$$

es decir $\omega \in \Lambda_1$ y $\omega D = 0$. Si demostramos que $d\omega = 0$, tendremos por El Lema de Poincaré (3.22), pág.165, que $\omega = dg$ y por tanto

$$(dg)D = Dg = 0,$$

lo cual implica que g es constante en las trayectorias de D, con lo cual $\{g = cte\}$ nos da las curvas solución de nuestra ecuación diferencial.

Ahora si esto no ocurre, pero conocemos una simetría de D, es decir otro campo E tal que $[E, D] = fD$ —y se tiene que E y D son independientes en cada punto del entorno en el que estemos—, entonces podemos construir una función h tal que $h\omega$ es cerrada, es decir $d(h\omega) = 0$, lo cual equivale a que sea exacta, es decir que $h\omega = dg$ y g sea por tanto una integral primera de D, con lo cual de nuevo $\{g = cte\}$ nos da las curvas solución de nuestra ecuación diferencial.

Definición. A una tal función h, tal que $h\omega$ sea exacta, se la llama *factor de integración* de ω.

En nuestro caso como D y E son independientes tendremos que $\omega E \neq 0 = \omega D$ y podemos definir la función

$$h = \frac{1}{\omega E},$$

y se sigue que $d(h\omega) = 0$, pues por la propiedad (v) de 3.20, pág.160

$$d\left(\frac{1}{\omega E}\omega\right)(E, D) = E\left(\frac{\omega D}{\omega E}\right) + D\left(\frac{\omega E}{\omega E}\right) - \frac{1}{\omega E}\omega[E, D] = 0,$$

por tanto $h\omega = dg$.

Observemos que si $[D_1, D_2] = 0$, nuestro abierto es de $\mathbb{R}^2$, y ambos campos son independientes, entonces sus 1–formas duales, $\omega_i D_j = \delta_{ij}$ también son independientes y como antes tendremos que $\omega_1 = du_1$ y

$\omega_2 = du_2$, por lo que (u_1, u_2) forman un sistema de coordenadas en el que

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial u_1}\ , \qquad D_2 = \frac{\partial}{\partial u_2}.$$

Por último veamos otro método para encontrar un factor de integración h, para ciertas 1–formas

$$\omega = -g dx + f dy,$$

en $\mathbb{R}^2$. Observemos que si h es un factor integrante de ω, entonces $d(h\omega) = 0$, lo cual significa que

$$\begin{aligned} 0 &= dh \wedge \omega + h d\omega \\ &= \left(\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy\right) \wedge (-g dx + f dy) + h(-dg \wedge dx + df \wedge dy) \\ &= \frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{\partial h}{\partial y} g + h\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\right), \end{aligned}$$

y por tanto h debe satisfacer

$$\frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{\partial h}{\partial y} g = -h\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

y tenemos tres casos particulares sencillos en los que existe un factor integrante h, que podemos definir:

a) Si $$\frac{g_y + f_x}{f} = r(x),$$

basta considerar $h = h(x)$ tal que $h' = -h \cdot r$, es decir

$$h(x) = \mathrm{e}^{-\int r(x)}.$$

b) Si $$\frac{g_y + f_x}{g} = r(y),$$

definimos $h = h(y)$ tal que $h' = h \cdot r$, es decir

$$h(y) = \mathrm{e}^{-\int r(y)}.$$

c) Si $$\frac{g_y + f_x}{yf + xg} = r(xy),$$

definimos $h = H(xy)$, tal que $H' = H \cdot r$, es decir

$$H(t) = \mathrm{e}^{-\int r(t)}\ , \qquad h(x,y) = H(xy).$$

Ejercicio 3.7.1 Demostrar que si $D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{D}$ son independientes en un abierto U de $\mathbb{R}^n$, entonces la condición necesaria y suficiente para que exista un sistema de coordenadas $(u_1, \ldots, u_n)$, tal que en U, $D_i = \partial/\partial u_i$, es que $[D_i, D_j] = 0$, para cualesquiera $i, j = 1, \ldots, n$.

Ejercicio 3.7.2 Encontrar la ecuación de las curvas que verifican que en cada punto la tangente y la normal cortan respectivamente al eje y y al eje x, en dos puntos que equidistan del origen.

Ejercicio 3.7.3 Una cuerda flexible de 4 metros está perfectamente enrollada —en el sentido de que al tirar del extremo sólo se mueve la parte de la cuerda que sale del rollo—, al borde de una mesa. Si en un instante dado, en el que cuelga un metro de cuerda, la soltamos y empieza a desenrollarse toda la cuerda por su peso, ¿cuanto tiempo tardará la cuerda en desenrollarse?

¿Y si la cuerda está estirada sobre la mesa de forma perpendicular al borde?.

Ejercicio 3.7.4 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, encontrando un factor de integración:

$$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}\ , \qquad y' = \frac{xy - 1}{xy - x^2}\ , \qquad y' = -\frac{y}{x + 3x^3y^4}.$$

Ejercicio 3.7.5 a) Encontrar la forma de un espejo curvo en $\mathbb{R}^2$, tal que la luz de una fuente en el origen se refleje en un haz de rayos paralelos.

b) Encontrar la forma de una curva plana que tenga la propiedad de que el sonido emitido desde un punto A pase, después de reflejarse en la curva, por otro punto fijo B.

Ejercicio 3.7.6 Encontrar la curva que describe una canoa que sale de una orilla en un río y se dirige a un punto de la otra orilla a velocidad constante, siendo arrastrada por el río que baja también a velocidad constante.

Ejercicio 3.7.7 Un pescador en una barca ve salir un pez en un lugar del mar. Si suponemos que el pez sale del lugar en línea recta a un tercio de la velocidad del pescador, ¿qué trayecto debe realizar el pescador para pasar con seguridad por encima del pez, sea cual sea la dirección que este tome?.

3.8. Ejemplos de tensores

En esta lección daremos algunos ejemplos de tensores, para ver otros remitimos al lector a la página 31–1 del vol.III del FEYNMAN ó a la página 278 del SANTALÓ.

3.8.1. Tensor métrico del espacio euclídeo.

Consideremos en $\mathbb{R}^n$ el producto escalar

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

para $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, el cual es un tensor en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Si lo llevamos a cada espacio tangente $T_p(\mathbb{R}^n)$ por el isomorfismo canónico

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow T_p(\mathbb{R}^n),$$

que a cada vector le hace corresponder su derivada direccional correspondiente, tendremos un campo de tensores que nos define un campo tensorial en la variedad diferenciable $\mathbb{R}^n$, llamado *tensor métrico* y que para cada par de campos tangentes $D = \sum f_i \partial x_i$ y $E = \sum g_i \partial x_i$, vale

$$g(D, E) \equiv D \cdot E = \sum_{i=1}^{n} f_i g_i,$$

el cual en términos de coordenadas se expresa como

$$g = dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n.$$

Asociado a este tensor tenemos el *tensor de volumen*, que es la n–forma en $\mathbb{R}^n$

$$\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

que para cada colección de campos tangentes $D_1, \ldots, D_n$

$$\omega(D_1, \ldots, D_n),$$

es el volumen del paralelepípedo generado por los D_i.

Definición. Denotamos la forma cuadrática correspondiente a esta forma bilineal g, con

$$ds^2 = \sum dx_i^2, \qquad ds(D_p)^2 = g(D_p, D_p) = \sum dx_i(D_p)^2$$

donde debe entenderse que en cada punto p, la $d_p x^2$ es el cuadrado de la función lineal $d_p x$. La *longitud de un vector* $D_p \in T_p(\mathbb{R}^n)$ se define como

$$|D_p| \equiv ds(D_p) = \sqrt{D_p \cdot D_p}.$$

El ángulo $\widehat{D_p E_p}$, entre dos vectores no nulos D_p, E_p se define a través del coseno mediante la fórmula

$$D_p \cdot E_p = |D_p| \cdot |E_p| \cos(\widehat{D_p E_p})$$

y decimos que dos vectores D_p, E_p son *perpendiculares* si $D_p \cdot E_p = 0$

Ejercicio 3.8.1 Demostrar que en coordenadas cartesianas (x, y) y polares (ρ, θ) en el plano

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

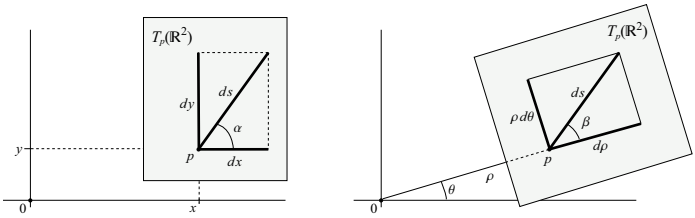


Figura 3.1. *ds* en el plano (ver la Fig.1.9, pág.34).

Nota 3.25 No debe entenderse que *ds* es una 1–forma exacta, aunque la razón de esta notación es que sí lo es sobre cada curva, donde es la diferencial de la función s longitud de arco. En la Fig.3.2 vemos la relación de las diferenciales de las funciones consideradas, con sus incrementos, sobre una curva del plano, $APQB$, donde Q está infinitesimálmente próximo a P, de modo que PQ es aproximadamente tangente a la curva.

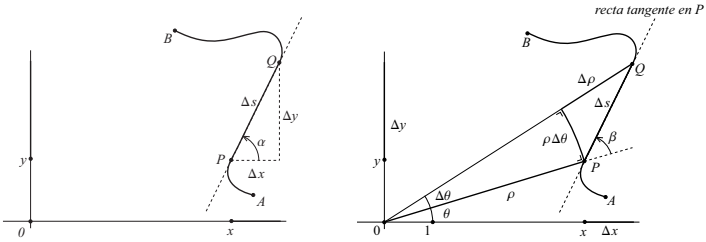


Figura 3.2. Incrementos de x, y, ρ, θ y s en una curva.

3.8.2. Divergencia, rotacional y gradiente.

En la pág.32 del Tema I vimos la definición del *gradiente de una función* f en un abierto del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con la métrica

$$g = dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n,$$

que era el campo $D = \operatorname{grad} f$, para el que $i_D g = df$, y que su expresión en coordenadas, respecto de una base ortonormal, era

$$\operatorname{grad} f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Definición. Llamamos *divergencia de un campo* D a la función $\operatorname{div} D$, que satisface

$$D^L \omega = (\operatorname{div} D)\omega,$$

para la forma de volumen $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

Ejercicio 3.8.2 i) Demostrar que si en términos de coordenadas, respecto de una base ortonormal, $D = \sum f_i \partial x_i$, entonces

$$\operatorname{div} D = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

ii) Demostrar que $\operatorname{div}(fD) = \operatorname{grad} f \cdot D + f \operatorname{div} D$.

Las siguientes definiciones son particulares de $\mathbb{R}^3$.

Definición. Dado $D \in \mathcal{D}(U)$, con U abierto de $\mathbb{R}^3$, definimos el *rotacional* de D, $R = \operatorname{rot} D$, como el único campo tal que

$$i_R \omega_3 = d(i_D g),$$

donde

$$\omega_3 = dx \wedge dy \wedge dz \ , \qquad g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz,$$

son la forma de volumen y la métrica habitual en $\mathbb{R}^3$.

Definición. Un campo tangente se llama *solenoidal* si su divergencia es nula e *irrotacional* si su rotacional es nulo. Por ejemplo un campo rotacional es solenoidal pues $\operatorname{div}\operatorname{rot} D = 0$ y un campo gradiente es irrotacional (ver el Ejercicio (3.8.3)).

Definición. Llamamos *producto vectorial* de dos vectores tangentes D_1, D_2 en un punto de $\mathbb{R}^3$, al vector $D_1 \times D_2$ definido por la propiedad

$$i_{D_2} i_{D_1} \omega_3 = i_{D_1 \times D_2} g,$$

es decir tal que para cualquier vector D_3

$$\omega(D_1, D_2, D_3) = (D_1 \times D_2) \cdot D_3.$$

Se sigue fácilmente que $D = D_1 \times D_2 \neq 0$ sii D_1 y D_2 son independientes, en cuyo caso D es un vector perpendicular al plano que definen D_1 y D_2, de módulo el área del paralelogramo definido por D_1 y D_2, pues $\omega(D_1, D_2, D/\|D\|) = \|D\|$ y con el sentido tal que la terna de vectores D_1, D_2 y D está bien orientada.

Ejercicio 3.8.3 (1) Demostrar que el rotacional de un campo D existe y encontrar sus componentes en función de las de D.

(2) Demostrar que para cada función f y cada campo D

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0 \ , \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} D = 0, \quad \operatorname{rot}(fD) = \operatorname{grad} f \times D + f \operatorname{rot} D.$$

(3) Demostrar que si R es un campo tal que $\operatorname{div} R = 0$, entonces localmente existe un campo D tal que $R = \operatorname{rot} D$.

Ejercicio 3.8.4 Demostrar las siguientes propiedades:

(1) $D_1 \times D_2 = -D_2 \times D_1$.

(2) $D_1 \times (D_2 + D_3) = D_1 \times D_2 + D_1 \times D_3$.

(3) $(D_1 \times D_2) \cdot D_3 = (D_2 \times D_3) \cdot D_1 = (D_3 \times D_1) \cdot D_2$.

(4)

$$\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \times \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \times \frac{\partial}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \times \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \times \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}.$$

(5) $i_{D_1\times D_2}\omega = i_{D_1}g \wedge i_{D_2}g$.
(6) $D_1 \times (D_2 \times D_3) = (D_1 \cdot D_3)D_2 - (D_1 \cdot D_2)D_3$.
(7) $(D_1 \times D_2) \times D_3 + (D_2 \times D_3) \times D_1 + (D_3 \times D_1) \times D_2 = 0$.
(8) $\operatorname{div}(D_1 \times D_2) = D_2 \cdot \operatorname{rot} D_1 - D_1 \cdot \operatorname{rot} D_2$.
(9) $(D_1 \times D_2) \cdot (D_3 \times D_4) = (D_1 \cdot D_3)(D_2 \cdot D_4) - (D_1 \cdot D_4)(D_2 \cdot D_3)$.

Ejercicio 3.8.5 Demostrar el siguiente Teorema de Caratheodory : Dado un triángulo ABC y un punto interior suyo O, demostrar que

$$\operatorname{area}(OAB)\cdot\vec{OC} + \operatorname{area}(OAC)\cdot\vec{OB} + \operatorname{area}(OBC)\cdot\vec{OA} = 0.$$

3.8.3. Interpretación geométrica del rotacional.

Sea D un campo tangente en $\mathbb{R}^n$, con $Dx_i = f_i$, y grupo uniparamétrico $\tau\colon \mathcal{W} \to \mathbb{R}^n$, entonces como

$$\tau(t,x) = x + \int_0^t f[\tau(s,x)]\,ds,$$

para $f = (f_i)$, tendremos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_i}{\partial x_j}(t,x) &= \delta_{ij} + \int_0^t \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_k}[\tau(s,x)]\frac{\partial \tau_k}{\partial x_j}(s,x)\,ds \\
\frac{\partial^2 \tau_i}{\partial t \partial x_j}(t,x) &= \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_k}[\tau(t,x)]\frac{\partial \tau_k}{\partial x_j}(t,x) \\
\frac{\partial^2 \tau_i}{\partial t \partial x_j}(0,x) &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x),
\end{aligned}$$

y desarrollando por Taylor en un punto $(0,p)$, con $p \in \mathbb{R}^n$, tendremos que para todo $(t,x) \in \mathcal{W}$

$$\begin{aligned}
\tau(t,x) =& \tau(0,p) + t\frac{\partial \tau}{\partial t}(0,p) + \sum_{j=1}^n (x_j - p_j)\frac{\partial \tau}{\partial x_j}(0,p) + \\
&+ \sum_{j=1}^n t(x_j - p_j)\frac{\partial^2 \tau}{\partial t \partial x_j}(0,p) + \\
&+ t^2\, h + \sum_{i,j=1}^n (x_i - p_i)(x_j - p_j)\, h_{ij},
\end{aligned}$$

para ciertas funciones h y h_{ij}; y llamando $y = x - p$, $y_j = x_j - p_j$ y haciendo cociente por el ideal generado por $y_i y_j = (x_i - p_i)(x_j - p_j)$ y t^2, por tanto en un entorno infinitesimal de $(0, p)$,

$$\tau(t, x) = p + tD_p + (\mathbf{I} + t\mathbf{A})y,$$

para el Jacobiano $\mathbf{A} = (\partial f_i(p)/\partial x_j)$, de f. Ahora bien existen únicas matrices $\mathbf{S}$ simétrica y $\mathbf{H}$ hemisimétrica, tales que $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{H}$, que son

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t), \quad \mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^t)$$

y módulo t^2 se tiene que $\mathbf{I}+t\mathbf{A} = (\mathbf{I}+t\mathbf{S})(\mathbf{I}+t\mathbf{H}) = \mathbf{LG}$ y como la matriz $\mathbf{S}$ es[1] simétrica, sus autovalores λ_i son reales y es diagonalizable en una base u_i ortonormal, por tanto en esa base $\mathbf{I} + t\mathbf{S} = \mathbf{L}$ es diagonalizable con autovalores $\mu_i = 1 + t\lambda_i$, próximos a 1 (recordemos que $t^2 = 0$), por tanto positivos; y transforma un entorno esférico en uno elipsoidal; por otra parte (siempre módulo t^2), $\mathbf{G} = \mathbf{I} + t\mathbf{H}$ es una matriz ortogonal, pues $\mathbf{G}^t\mathbf{G} = (\mathbf{I} - t\mathbf{H})(\mathbf{I} + t\mathbf{H}) = \mathbf{I}$, con $\det \mathbf{G} = 1$, pues siempre es ± 1, pero por continuidad es 1, ya que $\lim_{t\to 0} \det(\mathbf{I} + t\mathbf{H}) = 1$.

En $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{G}$ es un giro alrededor de un eje de vector el $\operatorname{rot} D = R = (r_1, r_2, r_3)$, pues las filas de $\mathbf{H}$ son ortogonales a R, ya que

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & 2\frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & 2\frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix},$$

[1] Observemos que $\mathbf{S}$ y el tensor $D^L g$ están relacionados, (ver también el tensor de deformación 3.8.10), pues

$$D^L g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = D[g(\partial_i, \partial_j)] - g(D^L\partial_i, \partial_j) - g(\partial_i, D^L\partial_j)$$
$$= \partial_j \cdot \partial_i^L D + \partial_i \cdot \partial_j^L D = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

por tanto $(\mathbf{I}+t\mathbf{H})(R)=R$.

Por tanto, todo grupo uniparamétrico τ_t, en el espacio euclídeo tridimensional, infinitesimalmente en un punto p y para t pequeño, es una traslación en la dirección del campo, un giro $\mathbf{G}$ (de eje el rotacional de ese campo) y una dilatación $\mathbf{L}$ que deja invariantes los tres ejes perpendiculares definidos por u_i, y dilatando cada vector la cantidad μ_i

$$\tau(t,p+y)=tD_p+p+\mathbf{L}\mathbf{G}y.$$

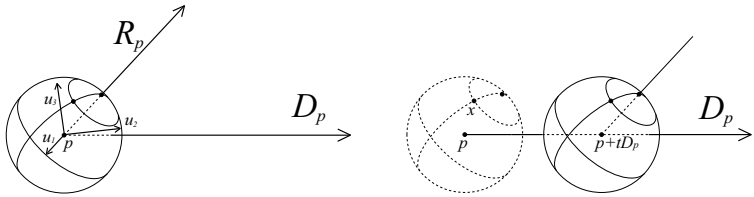


Figura 3.3. Traslación

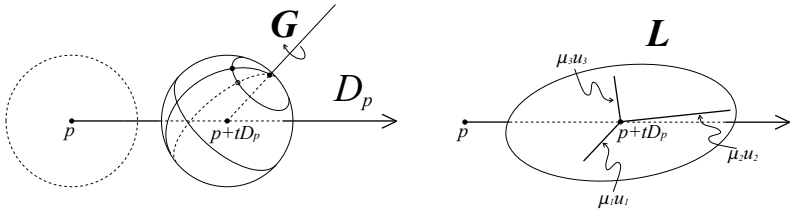


Figura 3.4. Giro $\mathbf{G}$ y dilatación de ejes u_i, $\mathbf{L}u_i=\mu_i u_i$.

Por último en el plano tenemos que si $D=f\partial_x+g\partial_y$,

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^t)=\begin{pmatrix} f_x & \frac{f_y+g_x}{2} \\ \frac{f_y+g_x}{2} & g_y \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{H}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^t)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{f_y-g_x}{2} \\ \frac{g_x-f_y}{2} & \end{pmatrix}$$

y como $\tau(t,x)=p+tD_p+(\mathbf{I}+t\mathbf{A})(x-p)$, cada recta $r=p+\lambda v$ que pase por p, con dirección $v=(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$, en el tiempo t va a la recta

$r_t = \tau(t, r)$, que pasa por $p + tD_p$, con dirección

$$v(t) = (\mathbf{I} + t\mathbf{A})v = \begin{pmatrix} 1 + tf_x & tf_y \\ tg_x & 1 + tg_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (1 + tf_x)\cos\alpha + tf_y \operatorname{sen}\alpha \\ tg_x \cos\alpha + (1 + tg_y)\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$$

y la velocidad angular con la que se mueve esta recta r_t en el instante 0 es la componente tangencial, en el punto $v = v(0)$ de la circunferencia unidad, de $(v/\mid v \mid)'(0) = v'(0) - v \mid v \mid' (0)$, es decir para $u = (-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)$

$$u \cdot v'(0) = u \cdot \mathbf{A} \cdot v = (g_y - f_x)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - f_y \operatorname{sen}^2\alpha + g_x \cos^2\alpha,$$

por ejemplo si tomamos la recta horizontal ($\alpha = 0$), su velocidad angular es g_x, mientras que si tomamos la vertical ($\alpha = \pi/2$), su velocidad es $-f_y$ y su semisuma $(g_x - f_y)/2$, es el valor que nos salió en H (a menudo se llama *rotacional de* D a la función $g_x - f_y$) y se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.26 *El valor medio de las velocidades angulares es* $(g_x - f_y)/2$ *y es el mismo que la semisuma de las velocidades angulares de una recta cualquiera pasando por* p *y su perpendicular.*

Demostración. El valor medio es

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ((g_y - f_x)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - f_y \operatorname{sen}^2\alpha + g_x \cos^2\alpha\ )\, d\alpha = \frac{g_x - f_y}{2},$$

Las velocidades angulares correspondientes a $v = (v_1, v_2) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ y su ortogonal $u = (u_1, u_2) = (-v_2, v_1)$, son

$$v_1 v_2(g_y - f_x) - v_2^2 f_y + v_1^2 g_x, \quad -v_1 v_2(g_y - f_x) - v_1^2 f_y + v_2^2 g_x$$

y su semisuma es el mismo valor. ∎

3.8.4. Tensores de torsión y de curvatura.

Dada una variedad diferenciable $\mathcal{V}$ (ver el Apéndice 6.10, pág.422), se define una *conexión lineal* sobre ella como una aplicación

$$\nabla\colon \mathcal{D}(\mathcal{V}) \times \mathcal{D}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{V}), \quad (D_1, D_2) \rightsquigarrow D_1^{\nabla} D_2,$$

que satisface las siguientes propiedades:

i) $D^\nabla(fD_1+gD_2)=(Df)D_1+fD^\nabla D_1+(Dg)D_2+gD^\nabla D_2$,
ii) $(fD_1+gD_2)^\nabla D=fD_1^\nabla D+gD_2^\nabla D$.

La conexión se extiende de modo único a todas las capas tensoriales

$$\nabla\colon \mathcal{D}(\mathcal{V})\times\mathcal{T}_p^q(\mathcal{V})\longrightarrow\mathcal{T}_p^q(\mathcal{V}),\quad (D,T)\rightsquigarrow D^\nabla T,$$

de tal forma que para las funciones $D^\nabla f=Df$, para las 1–formas ω se tiene despejando en "la regla de Leibnitz" (como en la derivada de Lie)

$$D(\omega E)=D^\nabla\omega(E)+\omega(D^\nabla E),$$

y para los tensores la regla de Leibnitz generalizada que despejando es

$$\begin{aligned}D^\nabla T(D_i,\omega_j)=D[T(D_i,\omega_j)]&-\\ -T(D^\nabla D_1,D_2,\dots,D_p,\omega_1,\dots,\omega_q)-\dots&-\\ -T(D_1,\dots,D^\nabla D_p,\omega_1,\dots,\omega_q)&-\\ -T(D_1,\dots,D_p,D^\nabla\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_q)-\dots&-\\ -T(D_1,\dots,D_p,\omega_1,\dots,\omega_{q-1},D^\nabla\omega_q).&\end{aligned}$$

En una variedad con conexión $(\mathcal{V},\nabla)$, se definen los *tensores de torsión y de curvatura* respectivamente como

$$\begin{gathered}g^1(D_1,D_2,\omega)=\omega(D_1^\nabla D_2-D_2^\nabla D_1-[D_1,D_2]),\\ R^1_{2,1}(D_1,D_2,D_3,\omega)=\omega(D_1^\nabla(D_2^\nabla D_3)-D_2^\nabla(D_1^\nabla D_3)-[D_1,D_2]^\nabla D_3).\end{gathered}$$

3.8.5. Tensores de una variedad Riemanniana.

Una *variedad Riemanniana* se define como una variedad diferenciable $\mathcal{V}$ con un tensor

$$g\in\mathcal{T}_2^0(\mathcal{V}),\qquad g(D,E)=D\cdot E,$$

que en cada punto $p\in\mathcal{V}$ define un producto interior en $T_p(\mathcal{V})$, es decir una forma bilineal, simétrica y definida positiva. En un abierto coordenado se expresa de la forma

$$g=\sum_{i,j=1}^n g_{ij}dx_i\otimes dx_j,$$

donde la matriz g_{ij} es simétrica y definida positiva.

Se demuestra en los cursos de geometría diferencial que toda variedad Riemanniana tiene una única conexión lineal llamada *conexión de Levi–Civitta* con torsión nula es decir

$$[D_1, D_2] = D_1^{\nabla} D_2 - D_2^{\nabla} D_1, \tag{3.1}$$

y tal que para tres campos D, E, F

$$D(E \cdot F) = D^{\nabla} E \cdot F + E \cdot D^{\nabla} F.$$

Dicha demostración se basa en que estas dos propiedades implican que si $[D, E] = [D, F] = [E, F] = 0$ (por ejemplo si son parciales de coordenadas), entonces $D^{\nabla} E = E^{\nabla} D$, $F^{\nabla} E = E^{\nabla} F$ y $D^{\nabla} F = F^{\nabla} D$, por lo tanto

$$\left.\begin{array}{l} D(E \cdot F) = D^{\nabla} E \cdot F + E \cdot D^{\nabla} F \\ F(D \cdot E) = F^{\nabla} D \cdot E + D \cdot F^{\nabla} E \\ E(F \cdot D) = E^{\nabla} F \cdot D + F \cdot E^{\nabla} D \end{array}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad D^{\nabla} E \cdot F = \frac{1}{2}[D(E \cdot F) + E(F \cdot D) - F(D \cdot E)]$$

lo cual da la construcción de la conexión a partir de la métrica.

Ejemplo 3.8.1 En particular si consideramos $\mathbb{R}^n$ y su métrica Euclídea estándar $g_{ij} = \delta_{ij}$, tendremos que la conexión correspondiente satisface $D^{\nabla} \partial_{x_j} = 0$, pues $\partial_{x_i}^{\nabla} \partial_{x_j} = 0$, ya que

$$\partial_{x_i}^{\nabla} \partial_{x_j} \cdot \partial_{x_k} = \frac{1}{2}\left[\partial_{x_i}(\partial_{x_j} \cdot \partial_{x_k}) + \partial_{x_j}(\partial_{x_i} \cdot \partial_{x_k}) - \partial_{x_k}(\partial_{x_i} \cdot \partial_{x_j})\right] = 0,$$

En términos de la conexión de Levi–Civitta, se tiene un nuevo tensor que básicamente es el Tensor de curvatura y que se llama *Tensor de Riemann–Christoffel*

$$R_{2,2}(D_1, D_2, D_3, D_4) = D_3 \cdot (D_1^{\nabla}(D_2^{\nabla} D_4) - D_2^{\nabla}(D_1^{\nabla} D_4) - [D_1, D_2]^{\nabla} D_4),$$

el cual tiene las propiedades

$$\begin{aligned} R(D_1, D_2, D_3, D_4) &= -R(D_2, D_1, D_3, D_4) = R(D_2, D_1, D_4, D_3) \\ &= R(D_3, D_4, D_1, D_2), \end{aligned}$$

y si consideramos un plano $\mathcal{E} \subset T_p(\mathcal{V})$ en el espacio tangente en un punto p y dos vectores ortonormales D_1, D_2 que lo generen, se tiene que la llamada *curvatura seccional*

$$K_{\mathcal{E}} = R(D_1, D_2, D_1, D_2),$$

no depende de la base elegida, sólo del subespacio $\mathcal{E}$. Por último si nuestra variedad Riemanniana es de dimensión $n = 2$, sólo hay un plano que es el propio espacio tangente y a esta función se la llama *curvatura de Gauss* de la superficie,

$$K = R(D_1, D_2, D_1, D_2).$$

Ejercicio 3.8.6 Demostrar que la métrica en el disco unidad

$$\frac{(1 - x^2 - y^2)(dx \oplus dx + dy \oplus dy) + (xdx + ydy) \oplus (xdx + ydy)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

tiene curvatura constante negativa $K = -1$.

Ejercicio 3.8.7 Demostrar que la métrica en el plano

$$\frac{(1 + x^2 + y^2)(dx \oplus dx + dy \oplus dy) - (xdx + ydy) \oplus (xdx + ydy)}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

tiene curvatura constante positiva $K = 1$.

Una hipersuperficie en una variedad Riemanniana $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$, hereda la estructura Riemanniana $(\mathcal{S}, \overline{g})$, siendo para cada $D, E \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$,

$$\overline{g}(D, E) = g(D, E) = D \cdot E,$$

y esta define la correspondiente conexión de Levi–Civitta $\overline{\nabla}$, que podemos dar también considerando un campo N_S, normal a la superficie y de modulo 1, del siguiente modo: Para cada dos campos de la hipersuperficie $D, E \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$, descomponemos $D^{\nabla}E$ en su parte tangencial a la superficie y su parte normal,

$$D^{\nabla}E = D^{\overline{\nabla}}E + \phi_2(D, E)N_S.$$

Ahora se demuestra fácilmente que con esta definición $\overline{\nabla}$ es una conexión y que satisface las dos propiedades que caracterizan la de Levi–Civitta, pues para $F \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$,

$$D(E \cdot F) = D^{\nabla}E \cdot F + E \cdot D^{\nabla}F = D^{\overline{\nabla}}E \cdot F + E \cdot D^{\overline{\nabla}}F,$$

ya que $D \cdot N_S = E \cdot N_S = 0$ y como $D^\nabla E - E^\nabla D - [D, E] = 0$, siendo $[D, E] \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$, también son nulas su parte tangencial y su parte normal

$$0 = D^{\overline{\nabla}} E - E^{\overline{\nabla}} D - [D, E],$$
$$0 = \phi_2(D, E) - \phi_2(E, D).$$

Por tanto ϕ_2 es simétrico y se verifica fácilmente que es un tensor en la hipersuperficie, llamado *segunda*[2] *forma fundamental*, de $\mathcal{S}$, para el que se tiene

$$\phi_2(D, E) = D^\nabla E \cdot N_S = D(E \cdot N_S) - E \cdot D^\nabla N_S = \phi(D) \cdot E,$$

para el llamado *endomorfismo o operador de Weingarten*

$$\phi : \mathcal{D}(\mathcal{S}) \to \mathcal{D}(\mathcal{S}), \qquad \phi(D) = -D^\nabla N_S,$$

siendo $-D^\nabla N_S \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$, pues

$$0 = D(1) = D(N_S \cdot N_S) = 2D^\nabla N_S \cdot N_S.$$

Ahora si $T = \sigma_*(\partial_t)$ es el vector tangente a una curva de la hipersuperficie, tendremos que

$$T^\nabla T = T^{\overline{\nabla}} T + \phi_2(T, T) N_S,$$

y para $\kappa = |T^\nabla T|$, $\kappa_g = |T^{\overline{\nabla}} T|$ y $\kappa_S = \phi_2(T, T)$, (a las que respectivamente llamamos *curvatura, curvatura geodésica y curvatura normal* de la curva; tendremos que

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_S^2,$$

y la curva es una geodésica por definición si $T^{\overline{\nabla}} T = 0$, es decir $\kappa_g = 0$, en cuyo caso $T^\nabla T$ es normal a la hipersuperficie.

3.8.6. El tensor de inercia.

En este epígrafe seguiremos la descripción que ofrece un libro típico de Física como el Feynman, pag.18-1 y siguientes, el Goldstein ó el Spiegel. Para un tratamiento lagrangiano remitimos al lector al Arnold.

Consideremos en el espacio afín tridimensional $\mathbb{A}_3$ un sistema de masas puntuales m_i, que se desplazan a lo largo del tiempo. Consideremos

[2] la *primera forma fundamental* es $\overline{g}$

un *sistema de coordenadas inercial*[1] fijo en un punto 0, respecto del cual cada masa m_i está en el instante t en $\mathbf{r}_i(t)$, entonces bajo la segunda ley de NEWTON ($F = ma$) y la ley de acción–reacción se tiene que el centro de masa del sistema

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i(t)}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{r}_i(t),$$

se mueve como si la masa total $M = \sum m_i$ y la fuerza externa resultante estuvieran aplicadas en él, pues si denotamos con F_i la fuerza externa que actúa sobre la masa m_i y con F_{ij} la interna que m_i ejerce sobre m_j, tendremos que

$$F_j + \sum_i F_{ij} = m_j \mathbf{r}_j'',$$

y sumando en j y considerando que $F_{ii} = 0$ y que $F_{ij} = -F_{ji}$ (**Ley de acción–reacción débil**),

$$F = \sum_j F_j = \sum_j F_j + \sum_{ij} F_{ij} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j'' = M\mathbf{r}''.$$

Como consecuencia se tiene que si la fuerza externa resultante es nula $F = 0$, entonces el centro de masa $\mathbf{r}(t)$ se mueve en línea recta con velocidad uniforme ó dicho de otro modo se tiene el

Principio de conservación del momento lineal 3.27
Si la fuerza externa total es $F = 0$ (en particular si no hay fuerzas externas), el momento total $\mathbf{P} = \sum m_i \mathbf{r}_i' = M\mathbf{r}'$ es constante.

Definición. Llamamos *momento angular* del sistema de masas, respecto del punto fijo 0 tomado como origen, al vector

$$\mathbf{\Omega} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_i',$$

Y si como antes la fuerza exterior que actúa sobre la masa m_i es F_i, llamamos *momento* ó *torque* de F_i sobre m_i, respecto del origen, a $\mathbf{r}_i \times F_i$ y *momento externo total* del cuerpo a

$$\mathbf{\Lambda} = \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i,$$

[1] es decir uno en el que son válidas las leyes del movimiento de Newton

el cual es independiente del punto considerado como origen si $\sum F_i = 0$, pues en ese caso, para todo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$,

$$\sum_i (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}) \times F_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i + \mathbf{r} \times (\sum_i F_i) = \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i.$$

Si ahora consideramos la **Ley de acción–reacción fuerte** : *las fuerzas internas F_{ij} son centrales*, es decir tienen la dirección del eje que une las masas m_i y m_j, por tanto la dirección de $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, se tiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}' &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{r}_i' + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_i'' = \sum_i \mathbf{r}_i \times (F_i + \sum_j F_{ji}) \\ &= \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i + \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times F_{ji} \\ &= \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i + \sum_{i<j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times F_{ji} = \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i = \Lambda.\end{aligned}$$

Como consecuencia se tiene el siguiente:

Principio de conservación del momento angular 3.28
Si el momento externo total $\mathbf{\Lambda} = 0$ (en particular si no hay fuerzas externas), el momento angular $\mathbf{\Omega}$ es constante.

3.8.7. Movimiento de un sólido rígido.

Definición. Por un *sólido rígido* entendemos un sistema de masas puntuales m_i (sobre las que actúan unas fuerzas internas verificando las propiedades anteriores), cuyas distancias mutuas $\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$ se mantienen constantes en el tiempo.

1.- Movimiento del sólido con un punto fijo.- Supongamos que hay un punto del sólido 0 que se mantiene fijo o en línea recta con velocidad constante (si la fuerza externa resultante que actúa sobre un cuerpo rígido es nula, se sigue del resultado anterior que su centro de gravedad sigue una trayectoria recta con velocidad constante). Consideremos entonces un sistema de coordenadas centrado en 0 y estudiemos el movimiento del sólido en esta referencia a lo largo del tiempo. Para ello consideremos una base ortonormal $\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)$ ligada al cuerpo

y centrada en 0, de modo que las coordenadas (x_i, y_i, z_i) de cualquier punto del cuerpo $\mathbf{r}_i(t)$, en esta base, son constantes en el tiempo

$$\mathbf{r}_i(t) = x_i\mathbf{e}_1(t) + y_i\mathbf{e}_2(t) + z_i\mathbf{e}_3(t),$$

por lo que su velocidad será

$$\mathbf{r}_i'(t) = x_i\mathbf{e}_1'(t) + y_i\mathbf{e}_2'(t) + z_i\mathbf{e}_3'(t),$$

ahora bien teniendo en cuenta que $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ y $\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_i = 0$, tendremos que

$$\begin{array}{l} w_1 = \mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3'\mathbf{e}_2, \\ w_2 = \mathbf{e}_3'\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_3, \\ w_3 = \mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_1, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_1' = w_3\mathbf{e}_2 - w_2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2' = -w_3\mathbf{e}_1 + w_1\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3' = w_2\mathbf{e}_1 - w_1\mathbf{e}_2 \end{array} \right.$$

y podemos definir

$$\mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3,$$

el cual no depende del punto $\mathbf{r}_i$ considerado, para el que se tiene

$$\mathbf{r}_i'(t) = [z_iw_2 - y_iw_3]\mathbf{e}_1 + [x_iw_3 - z_iw_1]\mathbf{e}_2 + [y_iw_1 - x_iw_2]\mathbf{e}_3 = \mathbf{w} \times \mathbf{r}_i,$$

por tanto en cada instante de tiempo t existe un vector $\mathbf{w}(t)$, que define un eje alrededor del cual gira el sólido, pues en ese instante todos los puntos del cuerpo se mueven con un vector velocidad $\mathbf{r}_i' = \mathbf{w} \times \mathbf{r}_i$, que está en planos perpendiculares a $\mathbf{w}$, por esta razón a $\mathbf{w}$ se la llama *velocidad angular* del cuerpo. En este caso el momento angular vale

$$\mathbf{\Omega} = \sum_i m_i\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_i' = \sum_i m_i\mathbf{r}_i \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}_i),$$

esto nos induce a considerar la siguiente aplicación lineal

$$\Phi(\mathbf{w}) = \mathbf{\Omega} = \sum_i m_i\mathbf{r}_i \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}_i),$$

la cual nos permite definir el tensor simétrico y covariante

$$\begin{aligned} I_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= \sum m_i[\mathbf{r}_i \times (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i)] \cdot \mathbf{v} \\ &= \sum m_i(\mathbf{v} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \sum m_i[(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{u})(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v})], \end{aligned}$$

que es el llamado *Tensor de inercia*. Observemos que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores fijos al cuerpo, es decir sus componentes en la base $\mathbf{e}_i$ son constantes, $I_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es constante. Por tanto este tensor está ligado al cuerpo y al punto fijo de este y podemos representarlo en $\mathbb{R}^3$ en términos del producto escalar g de $\mathbb{R}^3$ y las 1–formas $\lambda_i = x_i dx + y_i dy + z_i dz$, como

$$I_2 = \sum_i m_i[(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)g - \lambda_i \otimes \lambda_i].$$

Llamamos *momento de inercia* del sólido respecto de un eje pasando por 0 a la suma del producto de cada masa por el cuadrado de su distancia al eje. En tal caso el tensor de inercia del sólido tiene la propiedad de que para cada vector unitario $\mathbf{e}$,

$$I_2(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \sum m_i \|\mathbf{e} \times \mathbf{r}_i\|^2,$$

es el momento de inercia del sólido respecto del eje definido por $\mathbf{e}$.

Llamamos *elipsoide de inercia* al conjunto de vectores $\mathbf{u}$ fijos al sólido, tales que $I_2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$, el cual es un elipsoide fijo al sólido y centrado en 0 y que nos da toda la información del movimiento del sólido.

La energía cinética del sólido es una forma cuadrática en la velocidad angular

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \|\mathbf{r}_i'\|^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \|(\mathbf{w} \times \mathbf{r}_i)\|^2 = \frac{1}{2} I_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}),$$

2.- Movimiento del sólido en general.- Consideremos ahora el caso general en el que se mueven todos los puntos. Consideremos un sistema de coordenadas externo fijo centrado en un punto fijo C y un punto cualquiera del sólido, 0. Estudiemos el movimiento del sólido en esta referencia a lo largo del tiempo. Para ello consideremos una base ortonormal $\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)$ ligada al cuerpo y centrada en 0, de modo que las coordenadas (x, y, z) de cualquier punto P del cuerpo, en esta base, son constantes en el tiempo

$$OP = p(t) = x\mathbf{e}_1(t) + y\mathbf{e}_2(t) + z\mathbf{e}_3(t),$$

si denotamos con $O(t)$ la posición en el instante t de 0 respecto del sistema de coordenadas externo, la velocidad de P en la referencia ambiental será

$$O'(t) + p'(t) = O'(t) + x\mathbf{e}_1'(t) + y\mathbf{e}_2'(t) + z\mathbf{e}_3'(t),$$

ahora bien si definimos (ver el caso 1)

$$\begin{aligned} w_1 &= \mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3'\mathbf{e}_2, \\ w_2 &= \mathbf{e}_3'\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_3, \\ w_3 &= \mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{w}(t) &= w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

el cual no depende del punto P considerado, y puesto que $\mathbf{e}_i'\mathbf{e}_i = 0$,

$$p'(t) = [zw_2 - yw_3]\mathbf{e}_1 + [xw_3 - zw_1]\mathbf{e}_2 + [yw_1 - xw_2]\mathbf{e}_3 = \mathbf{w} \times p,$$

por tanto en cada instante de tiempo t existe una dirección dada por el vector $\mathbf{w}(t)$, tal que todos los puntos P del cuerpo se mueven con un vector velocidad, que es una composición de una traslación O', y un giro de eje $\mathbf{w}$, en O.

Como $\mathbf{w} \times \mathbf{w} = 0$, se sigue que los puntos ligados al sólido (en él o fuera de él), $P' = P + \lambda\mathbf{w}$, de la recta con dirección $\mathbf{w}$ pasando por P, se mueven con la misma velocidad $O' + \mathbf{w} \times OP' = O' + \mathbf{w} \times OP$ y en cada instante de tiempo t hay una recta $O(t) + I(t)$ ligada al sólido (en él o fuera de él) con velocidad mínima.

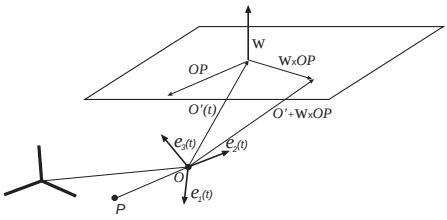


Figura 3.5.

Aquella de dirección $\mathbf{w}$ y formada por los puntos P para los que $O' + \mathbf{w} \times OP$ es proporcional a $\mathbf{w}$, y si OP es perpendicular a $\mathbf{w}$

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}|^2 OP &= -\mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times OP) \\ &= \mathbf{w} \times 0' \quad \Rightarrow \\ OP &= \frac{\mathbf{w} \times O'}{|\mathbf{w}|^2}. \end{aligned}$$

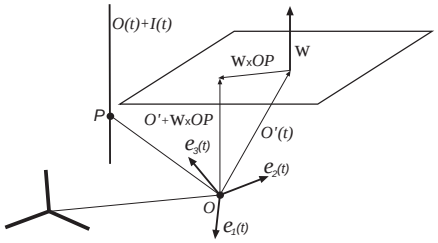


Figura 3.6. Recta de velocidad mínima

la familia de estas rectas en el espacio parametrizada por t, $O(t) + I(t)$, forma una superficie reglada y en cada instante t, la familia parametrizada por s, $O(t) + I(s)$ de estas rectas ligadas rígidamente al sólido forma otra superficie reglada. En cada instante t ambas tienen una recta común, $O(t) + I(t)$ y la segunda rueda sobre la primera sin deslizarse.

En el caso particular de que el sólido se mueva en un plano (y todos sus puntos se mantengan en planos paralelos a este), $\mathbf{w}$ es perpendicular al plano y O' es paralelo al plano, por tanto perpendicular a $\mathbf{w}$, en cuyo caso las rectas $O(t) + I(s)$ son perpendiculares al plano y las dos superficies regladas consideradas anteriormente son perpendiculares al plano; una fija en el espacio y la otra gira con el sólido sobre la primera sin deslizarse.

Movimiento de una rueda cuadrada

Vamos a estudiar un ejemplo especial de sólido rígido: una rueda cuadrada; nos interesa encontrar la sección longitudinal de un camino por el que esa rueda cuadrada gire sin deslizarse, de modo que su centro se mantenga a altura constante.

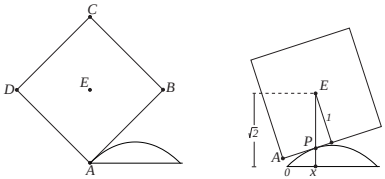


Figura 3.7.

Consideremos inicialmente el cuadrado (de lado 2) con un vértice A en el origen, con la diagonal AC en el eje y y los otros dos vértices B y D simétricos respecto de este eje y con B en el primer cuadrante ($x > 0$, $y > 0$). Giremos el cuadrado sobre la hipotética curva y en un instante t sea P el punto del cuadrado en el lado AB en el que el segmento AB es tangente a la curva en un punto $(x, y(x)) = P$, instante en el que P que está fijo en el cuadrado tiene velocidad nula, siendo el centro instantáneo de rotación del cuadrado; eso implica que en ese instante el centro E del cuadrado se mueve[3] en dirección perpendicular a $r = EP$, por tanto como E se mueve horizontalmente, EP es vertical, es decir que en cada instante el centro del cuadrado está sobre el punto de contacto del cuadrado y la curva sobre la que gira. Además como se mueve sin deslizarse, el arco de curva entre el origen y P es igual a $AP = AQ - PQ = 1 - y'$, para Q el punto medio de AB ya que la

[3]Observemos que $r = EP$ es de módulo constante, pues E y P son puntos del cuadrado, por tanto $r \cdot r' = 0$ y como $P = r + E$ y $P' = 0$ en el instante en el que P está en contacto con la curva, tendremos que en ese instante $0 = P' = r' + E'$ y multiplicando por r, $0 = r \cdot r' + r \cdot E' = r \cdot E'$.

tangente del ángulo QEP es y'. Por otra parte la altura del centro E del cuadrado es constante $= \sqrt{2}$, es decir se tiene que

$$\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = 1-y', \qquad y+\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{2},$$

de donde se sigue que

$$1-y' = \int_0^x (\sqrt{2}-y)\,dx \quad \Rightarrow \quad -y'' = \sqrt{2}-y,$$

y la solución general es

$$y = c_1\,\mathrm{e}^{x} + c_2\,\mathrm{e}^{-x} + \sqrt{2},$$

y como $y(0)=0$ y por la primera ecuación $y'(0)=1$, tendremos que

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + \sqrt{2} = 0, \\ y'(0) = c_1 - c_2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} \\ c_2 = -\dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

y $c_1 c_2 = 1/4$ y si llamamos

$$\mathrm{e}^{c} = -2c_1 = -\frac{1}{2c_2} = \sqrt{2}-1,$$

tendremos que la solución a nuestro problema es la catenaria invertida

$$y = \sqrt{2} - \frac{\mathrm{e}^{c+x}+\mathrm{e}^{-(c+x)}}{2} = \sqrt{2} - \cosh(c+x). \quad \blacksquare$$

3.8.8. La fuerza de coriolis.

Para algunos problemas sobre movimientos en la tierra, por ejemplo para estudiar la trayectoria de una bala, etc, podemos considerar un sistema de coordenadas ligado a la tierra como el proporcionado por una esquina de una habitación y considerarlo como un sistema inercial, aunque no lo es pues la tierra gira. En otros problemas en el que se necesita más precisión debemos considerar otro tipo de sistemas de referencia que se aproximen al ideal de sistema inercial, como por ejemplo el que nos proporcionan las estrellas.

Consideremos un sistema de coordenadas inercial centrado en la tierra y otro sistema centrado en la tierra y ligado a ella —de modo que gire

con ella— y estudiemos el movimiento de una partícula que está sobre la tierra. Para ello consideremos una base ortonormal $\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3$ ligada a la tierra, con $\mathbf{e}_3$ el eje de giro de la tierra, por tanto constante en el tiempo. Sean (x, y, z) las coordenadas de la partícula $\mathbf{r}(t)$ en esta base, que dependen del tiempo

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3,$$

por lo que su velocidad será, para $v = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3$ la velocidad aparente de la partícula para un observador de la tierra

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3 + x\mathbf{e}_1' + y\mathbf{e}_2' = v + e_3 \times r,$$

pues $e_1' = e_2$, $e_2' = -e_1$, $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$ y $e_3 \times e_1 = e_2$; y su aceleración es

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'' &= x''\mathbf{e}_1 + y''\mathbf{e}_2 + z''\mathbf{e}_3 + 2(x'\mathbf{e}_1' + y'\mathbf{e}_2') + x\mathbf{e}_1'' + y\mathbf{e}_2'' \\ &= a + 2e_3 \times v + e_3 \times (e_3 \times r),\end{aligned}$$

y si su masa es m la fuerza que actúa sobre la partícula es $F = mr''$, pero para un observador en la tierra es como si la partícula se moviera con una aceleración a, siguiendo las leyes de Newton bajo el influjo de una fuerza

$$F_e = ma = F + 2mv \times e_3 + m(e_3 \times r) \times e_3,$$

en la que el ultimo vector es perpendicular a e_3 y hacia fuera, es la fuerza centrífuga, mientras que el segundo es la *Fuerza de Coriolis*, que es nula si la partícula no se mueve respecto de la tierra.

3.8.9. El tensor de esfuerzos.

Consideremos un fluido en una región del espacio afín tridimensional. Para cada punto p y cada plano pasando por p, con vector unitario normal N, la parte de fluido que está en el semiespacio limitado por el plano y que no contiene a N, ejerce sobre el plano una fuerza por unidad de superficie $F = \phi(N)$. Y si el fluido está en equilibrio, la correspondiente a $-N$ (es decir considerando la parte del fluido del otro semiespacio) es $-F$. Si extendemos esta aplicación de forma $\phi(\lambda N) = \lambda F$, resulta que esta aplicación es lineal.

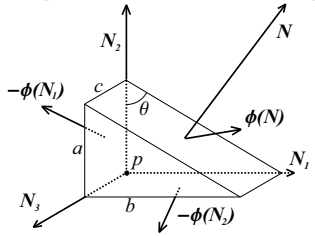


Figura 3.8.

Para verlo consideramos en p tres vectores unitarios N_i, ortogonales y bien orientados y un pequeño prisma triangular que sea la mitad del paralelepípedo recto de lados a, b, c, es decir con dos caras paralelas a distancia c y forma de triángulo rectángulo de lados a, b y $\sqrt{a^2+b^2}$ y vector normal N_3, dos caras ortogonales rectangulares de lados respectivos a, c y b, c y vectores normales N_1 y N_2, y la última cara con vector normal unitario $N = \cos\theta\, N_1 + \operatorname{sen}\theta\, N_2$ y lados c y $\sqrt{a^2+b^2}$, como indica la figura 3.8, para $\cos\theta = a/\sqrt{a^2+b^2}$ y $\operatorname{sen}\theta = b/\sqrt{a^2+b^2}$. En estos términos tendremos que las fuerzas que actúan sobre las caras paralelas son iguales y de sentido contrario y la suma de las que actúan sobre las otras tres caras, que tienen respectivamente áreas ca, cb y $c\sqrt{a^2+b^2}$, es nula si está en equilibrio, por lo que $c\sqrt{a^2+b^2}\phi(N) - ca\phi(N_1) - cb\phi(N_2) = 0$, lo cual implica

$$\phi(aN_1 + bN_2) = a\phi(N_1) + b\phi(N_2)$$

y de esto se deduce que para cualesquiera par de vectores $E_1 = a_{11}N_1 + a_{12}N_2$ y $E_2 = a_{21}N_1 + a_{22}N_2$,

$$\begin{aligned}\phi(E_1+E_2) &= \phi((a_{11}+a_{21})N_1 + (a_{12}+a_{22})N_2)\\ &= (a_{11}+a_{21})\phi(N_1) + (a_{12}+a_{22})\phi(N_2)\\ &= a_{11}\phi(N_1) + a_{12}\phi(N_2) + a_{21}\phi(N_1) + a_{22}\phi(N_2) = \phi(E_1) + \phi(E_2).\end{aligned}$$

Por otra parte la matriz que representa a ϕ es simétrica ó lo que es lo mismo $N_i \cdot \phi(N_j) = N_j \cdot \phi(N_i)$, pues en caso contrario un pequeño cubo de lado ϵ y lados paralelos a los N_i tendría un giro respecto del eje definido por N_k (para $k \neq i, j$) y en definitiva un momento externo total respecto del centro del cubo no nulo, siendo así que está en equilibrio, pues el momento es (para $\phi(N_i) = \sum a_{ij}N_j$)

$$0 = \epsilon \sum N_i \times \phi(N_i) = (a_{23} - a_{32})N_1 + (a_{31} - a_{13})N_2 + (a_{12} - a_{21})N_3.$$

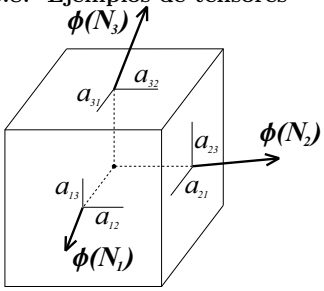


Figura 3.9. $a_{12} = a_{21}$, $a_{31} = a_{13}$ y $a_{23} = a_{32}$

Ahora por ser simétrico tiene tres autovectores ortonormales N_i con autovalores λ_i y una pequeña esfera centrada en p se transforma por ϕ en un elipsoide de ejes N_i y semiejes λ_i.

3.8.10. El tensor de deformación.

Consideremos un sólido, que ocupa una región $K \subset \mathbb{R}^3$, sometido a unas fuerzas que lo deforman. Denotemos con F la aplicación del espacio que corresponde a la transformación de K, es decir que $F(x)$ es la posición que ocupa, tras la deformación, el punto $x \in K$. Consideramos que $F = (f_i)$ es diferenciable, por lo que su Jacobiano[4]

$$J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right),$$

en un punto $x \in K$ satisface por definición

$$\lim_{\|y-x\| \to 0} \frac{\|F(y) - F(x) - J(y-x)\|}{\|y-x\|} = 0,$$

por lo que tomando y próximo a x y considerando el vector unitario $u = (y-x)/\|y-x\|$, tendremos que

$$F(y) - F(x) \simeq J(y-x), \qquad \frac{\|F(y) - F(x)\|}{\|y-x\|} \simeq \|Ju\| = \sqrt{u^t J^t J u},$$

lo cual nos permite dar una estimación del cambio de longitudes en el sólido. Podemos simplificar esta estimación si suponemos que la deformación es pequeña, en el sentido de que $J \simeq I$ sea *casi la identidad* es

[4]La matriz asociada a su aplicación lineal tangente F_* en x.

decir que si $F(x) = x + G(x)$, siendo $G(x) = (g_i(x))$ el desplazamiento del punto x, para el que

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) = I + \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right) = I + A,$$

las componentes del Jacobiano A de G, sean tan pequeñas que sus productos los podemos considerar nulos y para la simetrización de A

$$S = \frac{A + A^t}{2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial g_3}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial x_3}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} + \frac{\partial g_2}{\partial x_3}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial g_3}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial x_3}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} + \frac{\partial g_2}{\partial x_3}) & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

como hemos supuesto que $A^t A \simeq 0$, tendremos que

$$J^t J = (I + A^t)(I + A) = I + A + A^t + A^t A \simeq I + 2S,$$

por lo tanto para un punto y próximo a x, la proporción de distancias entre estos puntos, después y antes de la deformación es

$$\frac{\|F(y) - F(x)\|}{\|y - x\|} \simeq \sqrt{u^t J^t J u} \simeq \sqrt{u^t (I + 2S) u} = \sqrt{1 + 2u^t S u} \simeq 1 + u^t S u,$$

donde lo último se sigue del desarrollo por Taylor $\sqrt{1 + 2x} = 1 + x + o(x)$.

Esto nos induce a definir el **Tensor de deformación** como el que para cada x y los campos tangentes $D = \sum d_i \partial_i$, $E = \sum e_i \partial_i$, vale

$$T_x(D_x, E_x) = d^t \, S \, e,$$

el cual podemos obtener intrinsecamente, considerando la aplicación desplazamiento G como campo tangente $G = \sum g_i \partial_{x_i}$, derivando la métrica euclídea, pues

$$\begin{aligned} G^L g &= G^L(\sum dx_i \otimes dx_i) = \sum (dg_i \otimes dx_i + dx_i \otimes dg_i) \\ &= \sum \sum \frac{\partial g_i}{\partial x_j} dx_j \otimes dx_i + \sum \sum \frac{\partial g_i}{\partial x_j} dx_i \otimes dx_j = 2T. \end{aligned}$$

Observemos por otro lado que

$$\begin{aligned} F^*g - g &= \sum_{i=1}^{n}(df_i \otimes df_i - dx_i \otimes dx_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}dx_j \otimes dx_k) - \sum_{i=1}^{n} dx_i \otimes dx_i \\ &= \sum_{j,k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \delta_{jk})dx_j \otimes dx_k, \end{aligned}$$

cuyos coeficientes son los de la matriz $J^tJ - I \simeq 2S$, por lo que tenemos

$$F^*g - g \simeq 2T.$$

Con este tensor tenemos, como acabamos de ver, una estimación del *cambio de una longitud* L entre dos puntos $x, y = x + Lu$ de K (para u un vector unitario), que es por la fórmula anterior

$$L(1 + T(u, u)).$$

Del mismo modo podemos estimar el *cambio de un ángulo* α formado por los vectores e_1 y e_2 en x, pues si denotamos $y_i = x + e_i$, $e_i' = F(y_i) - F(x) \simeq Je_i$, y α' el ángulo que forman estos, tendremos que para $u_1 = e_1/|e_1|$ y $u_2 = e_2/|e_2|$ unitarios

$$\begin{aligned} \frac{|e_1'|}{|e_1|}\frac{|e_2'|}{|e_2|}\cos\alpha' = \frac{e_1' \cdot e_2'}{|e_1||e_2|} \simeq \frac{e_1^tJ^tJe_2}{|e_1||e_2|} \simeq u_1^t(I + 2S)u_2 = \\ = u_1^tu_2 + 2u_1^tSu_2 = \cos\alpha + 2T(u_1, u_2) \quad \Rightarrow \\ \cos\alpha' \simeq \frac{\cos\alpha + 2T(u_1, u_2)}{(1 + T(u_1, u_1))(1 + T(u_2, u_2))}. \end{aligned}$$

En particular si e_1 y e_2 son perpendiculares —en cuyo caso $\cos\alpha = 0$— y si consideramos (al ser la deformación pequeña) que la diferencia de ángulos $\alpha - \alpha' = \pi/2 - \alpha'$ es pequeña (y $x \simeq \operatorname{sen} x$ para x pequeño), tendremos que

$$\pi/2 - \alpha' \simeq \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha') = \cos\alpha' \simeq \frac{2T(u_1, u_2)}{(1 + T(u_1, u_1))(1 + T(u_2, u_2))},$$

(siendo u_1, u_2 ortonormales), es decir

$$\alpha' \simeq \pi/2 - \frac{2T(u_1, u_2)}{(1 + T(u_1, u_1))(1 + T(u_2, u_2))}.$$

Por último podemos estimar el cambio en el volumen de una región pequeña en torno a un punto x, pues el volumen del paralelepípedo que definen tres vectores orientados e_i en el punto x es

$$V = \det[e_1, e_2, e_3] = \det[B],$$

para B la matriz de columnas e_i. Ahora para $y_i = x + e_i$ tenemos que $e_i' = F(y_i) - F(x) \simeq Je_i$, por lo que la matriz B' con columnas e_i' vale aproximadamente $J \cdot B$, por lo que el nuevo volumen es[5]

$$\begin{aligned} V' &= \det[B'] \simeq \det[J]\det[B] = \det[I + A]\det[B] \\ &\simeq (1 + \operatorname{traz} A)V = (1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3})V = (1 + \operatorname{div} G)V, \end{aligned}$$

cálculo que podemos hacer a través de la forma de volumen ω, pues

$$F^*\omega = \det[J]\omega = \det[I + A]\omega \simeq (1 + \operatorname{traz} A)\omega.$$

[5] Teniendo en cuenta que $\det[I + A] \simeq 1 + \operatorname{traz} A$, lo cual se sigue de forma obvia desarrollando el determinate, llamando de forma genérica S a cualquier suma de productos de componentes a_{ij} de A que es $S \simeq 0$, pues suponemos que $A^t A \simeq 0$

$$\det[I+A] = (1+a_{11})(1+a_{22})(1+a_{33}) + S = 1 + a_{11} + a_{22} + a_{33} + S = 1 + \operatorname{traz} A + S.$$

3.9. Ejercicios resueltos

Ejercicio 3.6.1.- Demostrar que la 1–forma del plano $(y^2+h)dx+(x^2+h)dy$ es exacta sii $h=2xy+f(x+y)$.

Demostración. "⇒" si es exacta existe z, tal que $z_x=y^2+h$ y $z_y=x^2+h$, por tanto $(y^2+h)_y=z_{xy}=(x^2+h)_x$, por tanto $2y+h_y=2x+h_x$ y $Dh=2(y-x)$, para

$$D=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}=2\frac{\partial}{\partial v}$$

en las coordenadas $u=x+y$, $v=x-y$, pues $Du=0$ y $Dv=2$, por tanto $Dh=-2v$ es $h_v=-v$ es decir

$$\begin{aligned}h&=-\frac{v^2}{2}+\varphi(u)=-\frac{x^2-2xy+y^2}{2}+\varphi(x+y)\\&=xy-\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{(x+y)^2}{2}+f(x+y)=2xy+f(x+y).\end{aligned}$$

Ejercicio 3.7.1.- Demostrar que si $D_1,\dots,D_n\in\mathcal{D}$ son independientes en un abierto U de $\mathbb{R}^n$, entonces la condición necesaria y suficiente para que exista un sistema de coordenadas $(u_1,\dots,u_n)$, tal que en U, $D_i=\partial/\partial u_i$, es que $[D_i,D_j]=0$, para cualesquiera $i,j=1,\dots,n$.

Ind. Utilícese el Lema de Poincaré (3.22), pág.165 y **(3.20–v)**.

Ejercicio 3.7.2.- Encontrar la ecuación de las curvas que verifican que en cada punto la tangente y la normal cortan respectivamente al eje y y al eje x, en dos puntos que equidistan del origen (ver Fig.3.10).

Indicación. En cada punto (x_0,y_0) consideramos las dos rectas perpendiculares

$$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0,\qquad y=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)+y_0,$$

y la propiedad del enunciado es

$$-y'(x_0)x_0+y_0=y'(x_0)y_0+x_0,$$

por lo tanto la ecuación diferencial es $(y+x)y'=y-x$, que corresponde al campo

$$D=(x+y)\partial_x+(y-x)\partial_y,$$

el cual hemos resuelto en la pág.127, siendo sus soluciones las espirales

$$\rho\,\mathrm{e}^{\theta}=\text{cte}.$$

Como es homogéneo también podemos resolverlo considerando las coordenadas $(u=y/x, v=\log x)$,

$$\begin{aligned}Du&=D\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{xDy-yDx}{x^2}=\frac{x(y-x)-y(x+y)}{x^2}=-1-u^2\\Dv&=D(\log x)=\frac{Dx}{x}=1+u,\qquad\text{por tanto}\\D&=-(1+u^2)\partial_u+(1+u)\partial_v.\end{aligned}$$

Y para $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta = \arctan(y/x)$, tiene 1–forma incidente

$$\frac{1+u}{1+u^2}du + dv = d[\arctan u + \frac{1}{2}\log(1+u^2) + v] = d[\theta + \log(x\sqrt{1+u^2})] = d[\theta + \log\rho],$$

y las curvas solución son $\rho\, e^{\theta} = \text{cte}$. ∎

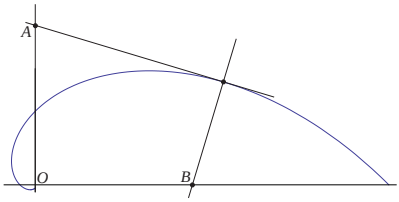


Figura 3.10. Curvas para las que $OA = OB$

Ejercicio 3.7.3.- Una cuerda flexible de 4 metros está perfectamente enrollada —en el sentido de que al tirar del extremo sólo se mueve la parte de la cuerda que sale del rollo—, en el borde de una mesa. Si en un instante dado, en el que cuelga un metro de cuerda, la soltamos y empieza a desenrollarse toda la cuerda por su peso, ¿cuanto tiempo tardará la cuerda en desenrollarse?

¿Y si la cuerda está estirada sobre la mesa de forma perpendicular al borde?

Solución.- Si $y(t)$ es la longitud de la cuerda suelta en el instante t, entonces suponemos que $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 0$. Además la masa de la cuerda $m(t)$, que cuelga en el instante t, es proporcional a $y(t)$.

Cuando una colección de masas m_i se mueven con velocidades v_i se ven sometidas a una fuerza que es la variación de su cantidad de movimiento, es decir

$$\frac{d(\sum_{i=1}^{n} m_i v_i)}{dt},$$

pues sobre cada partícula actúa la fuerza que es, por la SEGUNDA LEY DE NEWTON,

$$m_i \dot{v}_i = \frac{d(m_i v_i)}{dt},$$

ya que su masa es constante. Ahora bien si en la colección de partículas —la cuerda en nuestro caso— hay unas con velocidad nula —las que están sobre la mesa—, y otras —todas las que cuelgan—, con velocidad v, tendremos que la fuerza actuando sobre la cuerda debido a su movimiento es

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = \dot{m}v + m\dot{v},$$

siendo la gravitacional, mg, la única fuerza que actúa sobre la parte de cuerda que cuelga, por lo tanto igualando ambas

$$v^2 + y\dot{v} = yg,$$

y como $\dot{v} = dv/dt = (dv/dy)(dy/dt) = v'v$, tendremos que

$$\frac{dv}{dy} = \frac{yg - v^2}{yv},$$

que corresponde a la 1–forma

$$\omega = yvdv + (v^2 - yg)dy = -gdv + fdy,$$

la cual tiene un factor integrante, pues por el método 3.7, pág.166

$$\frac{g_y + f_v}{g} = \frac{-v + 2v}{-yv} = -\frac{1}{y} = r(y),$$

y si definimos $h(y) = \mathrm{e}^{-\int r(y)} = y$, se tiene que $h\omega$ es exacta

$$y^2vdv + y(v^2 - yg)dy = d(\frac{y^2v^2}{2} - g\frac{y^3}{3}),$$

por tanto la solución es para $y(0) = 1$, $v(0) = 0$,

$$\frac{y^2v^2}{2} = g\frac{y^3}{3} + k,$$

para k tal que $0 = \frac{g}{3} + k$, es decir

$$y^2v^2 = 2g\frac{y^3 - 1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g(y^3 - 1)}{3}}$$

por lo tanto el tiempo que tarda en salir de la mesa es

$$\sqrt{\frac{3}{2g}}\int_1^4 \frac{y\,dy}{\sqrt{y^3 - 1}} = 0{,}978095\text{seg.}$$

En el segundo caso la ecuación es $4y'' = yg$. ∎

Ejercicio 3.7.5.- a) Encontrar la forma de un espejo curvo en $\mathbb{R}^2$, tal que la luz de una fuente en el origen se refleje en un haz de rayos paralelos.

b) Encontrar la forma de una curva plana que tenga la propiedad de que el sonido emitido desde un punto A pase, después de reflejarse en la curva, por otro punto fijo B.

Solución.-Supongamos que los rayos reflejados son paralelos al eje y, en cuyo caso para $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, el vector $(x, y) - (0, \rho)$ es normal a la curva, en el punto suyo (x, y) (pues la suma y la resta de dos vectores del mismo módulo dan las direcciones de sus bisectrices). Entonces en cada punto $p = (x, y)$ la ecuación de la recta tangente a la curva viene dada por la anulación de la 1–forma

$$xdx + (y - \rho)dy = d\left(\frac{\rho^2}{2}\right) - \rho dy = \rho\,d\rho - \rho\,dy$$

y un factor integrante obvio es $1/\rho$, por tanto nuestras curvas son para cada constante k las parabolas

$$\rho = y + k \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2yk + k^2.$$

Además de obtener de forma natural un sistema de coordenadas (y, ρ), en el que la parábola se escribe con una ecuación lineal $\rho = y + k$ (para la que además $\rho = y + k$ es la homotecia de razón k de $\rho = y + 1$); tenemos otra importante propiedad de ella, pues la parábola se corta con el eje y en el vértice $v = (0, -k/2)$, por tanto $k = 2\rho(v)$, y si consideramos la recta paralela al eje x, $y = -k$, tendremos que los punto de la parábola son los que equidistan del foco (que es el origen) y la recta.

b) Hagámoslo tomando $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ y el vector normal en cada $P = (x,y)$, que es suma de los vectores normalizados de las direcciones $AP = (x,y)$ y $BP = (x-1,y)$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}\right) dy =$$
$$= d\left(\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+y^2}\right),$$

por lo tanto las curvas solución son las elipses con focos en A y B. ∎

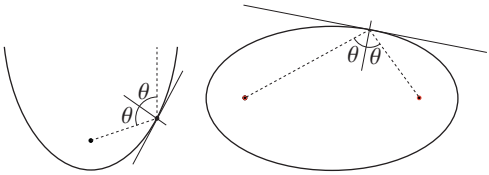


Figura 3.11. Parábola y elipse.

Ejercicio 3.7.6.- Encontrar la curva que describe una canoa que sale de una orilla en un río y se dirige a un punto de la otra orilla a velocidad constante, siendo arrastrada por el río que baja también a velocidad constante.

Solución.- Sea b la velocidad de la canoa, a la del rio y supongamos que la canoa se dirige al origen de coordenadas y que el rio fluye en el sentido contrario del eje y. Tendremos que en cada instante t, sobre la canoa —que está en la posición $(x(t), y(t))$— actúan dos velocidades por una parte la del remero y por otra la del rio que son respectivamente

$$-\frac{b}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)\ , \qquad (0,-a),$$

tendremos que resolver el sistema

$$x'(t) = -\frac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}}\ , \qquad y'(t) = -a - \frac{by}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

ó en términos de x e y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sqrt{x^2+y^2}+by}{bx},$$

que siendo homogénea sabemos resolverla y da para $k = a/b$

$$c[y + \sqrt{x^2+y^2}] = x^{k+1}. \quad ∎$$

Ejercicio 3.7.7.- Un pescador en una barca ve salir un pez en un lugar del mar. Si suponemos que el pez sale del lugar en línea recta a un tercio de la velocidad del pescador, ¿qué trayecto debe realizar el pescador para pasar con seguridad por encima del pez, sea cual sea la dirección que este tome?

Solución.- Pongamos el origen de coordenadas en el punto donde sale el pez, y pongamos al pescador en el punto $(4,0)$, cuando eso ocurre.

El pescador puede considerar la siguiente ruta:

Primero se va, en línea recta, al punto $(1,0)$, por lo que el pez estará en algún punto de la circunferencia de radio 1 y centro el origen. Desde aquí describe el pescador una curva que en coordenadas polares denotamos con $r(\theta)$. Se tiene que el espacio recorrido por él entre 0 y t es, para

$$x(\theta) = r(\theta)\cos\theta, \qquad y(\theta) = r(\theta)\operatorname{sen}\theta,$$
$$a = \int_0^t \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\, d\theta = \int_0^t \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}\, d\theta.$$

Tendremos entonces que

$$3(r(t)-1) = \int_0^t \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}\, d\theta,$$

y por tanto

$$3r'(t) = \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{8}r' = r \qquad \Leftrightarrow \qquad r(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{8}},$$

pues $r(0) = 1$. ∎

Ejercicio 3.8.1.- Demostrar que para (x,y) las coordenadas cartesianas y (ρ,θ) las coordenadas polares en el plano

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

Ind. $dx = \cos\theta d\rho - \rho\operatorname{sen}\theta\, d\theta$ y $dy = \operatorname{sen}\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\theta$, por tanto

$$dx^2 + dy^2 = \cos^2\theta\, d\rho^2 + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\rho^2 + \rho^2\cos^2\theta\, d\theta^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2. \quad ∎$$

Ejercicio 3.8.3.- (1) Demostrar que el rotacional de un campo D existe y encontrar sus componentes en función de las de D.

(2) Demostrar que para cada función f y cada campo D

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0\ , \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} D = 0, \quad \operatorname{rot}(fD) = \operatorname{grad} f \times D + f \operatorname{rot} D.$$

(3) Demostrar que si R es un campo tal que $\operatorname{div} R = 0$, entonces localmente existe un campo D tal que $R = \operatorname{rot} D$.

Solución.- (1) Sea $R = \operatorname{rot} D = \sum r_i\partial_i$ y $D = f\partial_1 + g\partial_2 + h\partial_3$, entonces

$$i_R\omega_3 = r_1 dy\wedge dz - r_2 dx\wedge dz + r_3 dy\wedge dz = d(f dx + g dy + h dz)$$
$$= (h_y - g_z)dy\wedge dz + (h_x - f_z)dx\wedge dz + (h_y - g_z)dy\wedge dz,$$

por lo tanto si $D = f\partial_x + g\partial_y + h\partial_z$

$$R = (h_y - g_z)\partial_x + (f_z - h_x)\partial_y + (h_y - g_z)\partial_z.$$

(3)

$$(\operatorname{div} R)\omega = R^L\omega = i_R d\omega + d(i_R\omega) = d(i_R\omega),$$

por tanto

$$\begin{aligned}\operatorname{div} R = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad d(i_R\omega) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \text{localmente} \quad i_R\omega = d\gamma \quad \text{(por el Lema de Poincaré (3.22))}\\ &\Leftrightarrow \quad \text{localmente} \quad i_R\omega = d(i_D g)\\ &\Leftrightarrow \quad \text{localmente} \quad R = \operatorname{rot} D.\end{aligned}$$

Ejercicio 3.8.4.- Demostrar las siguientes propiedades:

(1) $D_1 \times D_2 = -D_2 \times D_1$.

(2) $D_1 \times (D_2 + D_3) = D_1 \times D_2 + D_1 \times D_3$.

(3) $(D_1 \times D_2) \cdot D_3 = (D_2 \times D_3) \cdot D_1 = (D_3 \times D_1) \cdot D_2$.

(4)

$$\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \times \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \times \frac{\partial}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \times \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \times \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}.$$

(5) $i_{D_1 \times D_2}\omega = i_{D_1} g \wedge i_{D_2} g$.

(6) $D_1 \times (D_2 \times D_3) = (D_1 \cdot D_3)D_2 - (D_1 \cdot D_2)D_3$.

(7) $(D_1 \times D_2) \times D_3 + (D_2 \times D_3) \times D_1 + (D_3 \times D_1) \times D_2 = 0$.

(8) $\operatorname{div}(D_1 \times D_2) = D_2 \cdot \operatorname{rot} D_1 - D_1 \cdot \operatorname{rot} D_2$.

(9) $(D_1 \times D_2) \cdot (D_3 \times D_4) = (D_1 \cdot D_3)(D_2 \cdot D_4) - (D_1 \cdot D_4)(D_2 \cdot D_3)$.

Ind.- (6) Veamos como conjeturar esta igualdad: Por una parte $D_1 \times (D_2 \times D_3)$ está en el plano ortogonal a $D_2 \times D_3$ que esta generado por D_2 y D_3, por tanto $D_1 \times (D_2 \times D_3) = \lambda D_2 + \mu D_3$, ahora bien también es ortogonal a D_1, por lo que $\lambda(D_1 \cdot D_2) + \mu(D_1 \cdot D_3) = 0$, por tanto (λ, μ) es proporcional a $(D_1 \cdot D_3, -D_1 \cdot D_2)$ y

$$D_1 \times (D_2 \times D_3) = k[(D_1 \cdot D_3)D_2 - (D_1 \cdot D_2)D_3],$$

ahora veamos que k es constante y vale 1. Como $T(D_1, D_2, D_3) = D_1 \times (D_2 \times D_3)$ y $Q(D_1, D_2, D_3) = (D_1 \cdot D_3)D_2 - (D_1 \cdot D_2)D_3$ son tensores (ambos hemisimétricos en las dos últimas), basta observar que coinciden en cualesquiera $\partial_{x_i}, \partial_{x_j}, \partial_{x_k}$.

(8) Sean $D = (D_1 \times D_2)$, $i_{R_1}\omega = d(i_{D_1} g)$, $i_{R_2}\omega = d(i_{D_2} g)$, $\omega_1 = i_{D_1} g$, $\omega_2 = i_{D_2} g$ e $i_D\omega = \omega_1 \wedge \omega_2$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(D)\omega = D^L\omega &= d(i_D\omega) = d(\omega_1 \wedge \omega_2)\\ &= d(\omega_1) \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge d(\omega_2) = i_{R_1}\omega \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge i_{R_2}\omega\\ &= \omega \wedge i_{R_1}\omega_2 - i_{R_2}\omega_1 \wedge \omega = (D_2 \cdot R_1 - D_1 \cdot R_2)\omega. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Ejercicio 3.8.5.- Demostrar el siguiente Teorema de Caratheodory : Dado un triángulo ABC y un punto interior suyo O, demostrar que

$$\operatorname{area}(OAB) \cdot \vec{OC} + \operatorname{area}(OAC) \cdot \vec{OB} + \operatorname{area}(OBC) \cdot \vec{OA} = 0.$$

Indicación.- Aplíquese el apartado (7) del ejercicio anterior a $D_1 = OA$, $D_2 = OB$ y $D_3 = OC$. $\blacksquare$

Ejercicio 3.8.6.- Demostrar que la métrica en el disco unidad

$$\frac{(1-x^2-y^2)(dx\oplus dx+dy\oplus dy)+(xdx+ydy)\oplus(xdx+ydy)}{(1-x^2-y^2)^2}$$

tiene curvatura constante negativa $K=-1$.

Indicación. Para $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$, tendremos que

$$dx=\cos\theta d\rho-\rho\operatorname{sen}\theta d\theta,\qquad dy=\operatorname{sen}\theta d\rho+\rho\cos\theta d\theta,$$

y viendo simultaneamente este ejercicio y el siguiente (3.8.7), las métricas, en coordenadas polares, son

$$\begin{aligned}&\frac{(1-\rho^2)(dx\otimes dx+dy\otimes dy)+(xdx+ydy)\otimes(xdx+ydy)}{(1-\rho^2)^2}=\\ =&\frac{(1-\rho^2)(d\rho\otimes d\rho+\rho^2d\theta\otimes d\theta)+(\rho d\rho)\otimes(\rho d\rho)}{(1-\rho^2)^2}=\\ =&\frac{d\rho\otimes d\rho+(1-\rho^2)\rho^2d\theta\otimes d\theta}{(1-\rho^2)^2}=\frac{1}{g^2}d\rho\otimes d\rho+\frac{\rho^2}{g}d\theta\otimes d\theta,\\ &\frac{(1+\rho^2)(dx\otimes dx+dy\otimes dy)-(xdx+ydy)\otimes(xdx+ydy)}{(1+\rho^2)^2}=\\ =&\frac{(1+\rho^2)(d\rho\otimes d\rho+\rho^2d\theta\otimes d\theta)-(\rho d\rho)\otimes(\rho d\rho)}{(1+\rho^2)^2}=\\ =&\frac{d\rho\otimes d\rho+(1+\rho^2)\rho^2d\theta\otimes d\theta}{(1+\rho^2)^2}=\frac{1}{g^2}d\rho\otimes d\rho+\frac{\rho^2}{g}d\theta\otimes d\theta,\end{aligned}$$

donde en el primer caso $g=1-\rho^2$ y en el segundo $g=1+\rho^2$, por tanto en cualquier caso

$$E=\frac{1}{g^2},\quad F=0,\quad G=\frac{\rho^2}{g},$$

y $D_1=g\partial_\rho$, $D_2=h\partial_\theta$, para $h=\sqrt{g}/\rho$, son ortonormales y como g,h sólo dependen de ρ, $D_i^L\partial_\theta=-\partial_\theta^L D_i=0$, por tanto como en cualquiera de los dos casos $gh'/h=-1/\rho$

$$D_1^\nabla D_2-D_2^\nabla D_1=[D_1,D_2]=D_1^L(h\partial_\theta)=(D_1h)\partial_\theta=gh'\partial_\theta=-\frac{D_2}{\rho^2},$$

además $0=D_i(D_j\cdot D_j)=2D_i^\nabla D_j\cdot D_j$, por tanto

$$D_1^\nabla D_1=\alpha D_2,\ D_2^\nabla D_2=\beta D_1,\ D_1^\nabla D_2=\lambda D_1,\ D_2^\nabla D_1=\mu D_2,$$

y comparando con lo anterior

$$\lambda D_1-\mu D_2=D_1^\nabla D_2-D_2^\nabla D_1=-\frac{D_2}{\rho},$$

y sabiendo que $D_i^\nabla D_i\cdot D_j=-D_i\cdot D_i^\nabla D_j$, pues $D_i(D_i\cdot D_j)=0$, tendremos que

$$\begin{aligned}&\alpha=-\lambda=0,\quad \beta=-\mu=-\frac{1}{\rho},\quad \text{por tanto}\\ &D_1^\nabla D_2=D_1^\nabla D_1=0,\quad D_2^\nabla D_2=-\frac{D_1}{\rho},\quad [D_1,D_2]=-\frac{D_2}{\rho},\end{aligned}$$

y podemos calcular la curvatura

$$\begin{aligned} K &= R(D_1, D_2, D_1, D_2) \\ &= D_1 \cdot (D_1^\nabla (D_2^\nabla D_2) - D_2^\nabla (D_1^\nabla D_2) - [D_1, D_2]^\nabla D_2) \\ &= D_1 \cdot (D_1^\nabla (\beta D_1) + \frac{1}{\rho} D_2^\nabla D_2) = D_1 \cdot ((D_1\beta) D_1 - \frac{D_1}{\rho^2}) \\ &= \frac{D_1\rho}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} = \frac{g-1}{\rho^2} = \pm 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 3.8.7.- Demostrar que la métrica en el plano

$$\frac{(1+x^2+y^2)(dx \oplus dx + dy \oplus dy) - (xdx + ydy) \oplus (xdx + ydy)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

tiene curvatura constante positiva $K = 1$.

Indicación. Ver el ejercicio anterior (3.8.6). $\blacksquare$

3.10. Bibliografía y comentarios

En la composición del tema hemos utilizado los siguientes libros:

Abraham, Ralph and Mardsen, Jerrold E.: "*Foundations of Mechanics*". Ed. Addison–Wesley, 1978.

Boothby, W,M.: "*An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*". Ac Press, 1975.

Crampin,M. and Pirani,F.A.E.: "*Applicable Differential Geometry*". Cambridge University Press, 1988.

Choquet–Bruhat, Y.: "*Geometrie differentielle et systemes exterieurs*". Edit. Dunod, 1968.

Feynmann, R., Leigthton, R.B. and Sands, M.: "*Phisica*". Vol.I y III, Addison–Wesley Iberoamericana, 1987.

Goldstein, H.: "*Classical Mechanics*". Addison–Wesley Pub. Co., 1980.

Muñoz Diaz, Jesus: "*Ecuaciones diferenciales (I)*". Ed. Univ. Salamanca, 1982.

Santaló, L.A.: "*Vectores y tensores con sus aplicaciones*". Ed. Universitaria de Buenos Aires, 1977.

Simmons, F.: "*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*". Ed. McGraw–Hill, 1977.

Spiegel, M.R.: "*Mecánica teórica*". McGraw–Hill, 1967.

Spivak, M.: "*A comprehensive introduction to differential geometry*". 5 vols., Publish or Perish, Inc., 1979.

El análisis tensorial nació con J.L. Lagrange (*1736–1813*), que fue el primero en hacer un tratamiento general de un sistema dinámico y con Georg Friedrich Bernhard Riemann (*1826–1866*), que fue el primero en pensar en una geometría en un número arbitrario de dimensiones.

Sin embargo el cálculo de tensores no empezará a desarrollarse realmente hasta el año *1884* en el que se publicó la obra fundamental del italiano G. Ricci (*1853–1925*)

Ricci–Curbastro, G.: "*Principii di una theoria delle forme differenziale quadratiche*". Milan, 1884.

en la que define los tensores —él los llama sistemas—, covariantes y contravariantes de todos los órdenes.

El mismo Ricci siguió haciendo desarrollos posteriores del cálculo tensorial junto con su discípulo Tullio Levi–Civita (*1873–1941*). Y lo continuó Elie Cartan (*1869–1951*) entre otros. El término *vector* fue introducido por W.R.Hamilton (*1805–1865*) y H.G.Grasmann (*1809–1877*). Por su parte el término *tensor* —en vez de *sistema de Ricci*, como era conocido—, fue propuesto por Albert Einstein (*1879–1955*), extendiendo el término de *"tensor elástico"*, que es un tensor que surge de forma natural en el estudio de la *elasticidad*.

Fin del Tema 3

Tema 4

Campos tangentes lineales

4.1. Ecuaciones diferenciales lineales

Definición. Sea $\mathcal{E}$ un espacio vectorial real de dimensión finita n. Llamaremos *función afín* f en $\mathcal{E}$ a la suma $f = g + a$ de una función lineal $g \in \mathcal{E}^*$ y una función constante $a \in \mathbb{R}$.

Llamaremos *campo tangente lineal* —respectivamente *afín*— en $\mathcal{E}$ a las derivaciones

$$D\colon \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}),$$

tales que Df es lineal (afín) para cada f lineal (afín).

Sea D un campo afín y veamos como se expresa en un sistema de coordenadas lineales x_i de $\mathcal{E}$.

Como Dx_i es afín, existen $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, tales que $Dx_i = \sum a_{ij}x_j + b_i$, por tanto

$$D = \left[\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i + b_1\right] \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \left[\sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i + b_n\right] \frac{\partial}{\partial x_n},$$

y sus curvas integrales satisfacen el *sistema de ecuaciones diferenciales lineales* —o, como a menudo la llamaremos ED lineal—

$$\begin{aligned} x_1' &= \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i + b_1, \\ &\vdots \\ x_n' &= \sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i + b_n, \end{aligned}$$

o en forma vectorial para $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y $b = (b_i)$

$$X'(t) = \mathbf{A} \cdot X(t) + b. \tag{4.1}$$

Todo campo afín n–dimensional, puede considerarse como la restricción a un hiperplano $(x_{n+1} = 1)$ de un campo lineal D,

$$D = \left[\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i + b_1x_{n+1}\right]\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \left[\sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i + b_nx_{n+1}\right]\frac{\partial}{\partial x_n},$$

(n+1)–dimensional, tangente a los hiperplanos $\{x_{n+1} = \text{cte}\}$.

Todo campo tangente lineal D define por restricción, una aplicación lineal

$$D\colon \mathcal{E}^* \to \mathcal{E}^*,$$

pues la imagen de una función lineal es una función lineal.

Definición. Dado un campo tangente lineal D, llamaremos *endomorfismo asociado a* D a la aplicación lineal dual de $D\colon \mathcal{E}^* \to \mathcal{E}^*$,

$$A\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}.$$

Si $Dx_i = \sum a_{ij}x_j$, en un sistema de coordenadas lineales x_i, entonces la matriz asociada a la aplicación lineal A es $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y la de D es $\mathbf{A}^t$.

Definición. Llamaremos *autovalores de un campo tangente lineal* D a los autovalores de su endomorfismo asociado A.

Consideremos ahora un intervalo abierto real I y la función

$$x_0\colon I \times \mathcal{E} \to I\ , \quad x_0(t,p) = t.$$

Definición. Diremos que una función $f \in \mathcal{C}^\infty(I \times \mathcal{E})$ es *lineal relativa a* x_0 —respectivamente *afín relativa a* x_0—, si para cada $t \in I$, la función

$$f(t,\cdot)\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R},$$

es lineal (afín). Diremos que un campo $E \in \mathcal{D}(I \times \mathcal{E})$ es *lineal (afín) relativo a* x_0 si:

a) $Ex_0 = 1$, es decir es un campo subido de $\partial/\partial t \in \mathcal{D}(I)$, a $I \times \mathcal{E}$ mediante x_0.

b) Para cada función f lineal (afín) relativa a x_0, Ef es lineal (afín) relativa a x_0.

Consideremos un sistema de coordenadas lineales $x_1, \ldots, x_n$ en $\mathcal{E}$ y subámoslas, junto con x_0, a $I \times \mathcal{E}$ para definir el sistema de coordenadas $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Una función f es afín relativa a x_0 si y sólo si para cada $t \in I$,

$$f(t,\cdot) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)x_i + b_i(t),$$

por tanto quitando la t

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i[x_0]x_i + b_i[x_0].$$

En estos términos tenemos que si $E \in \mathcal{D}(I \times \mathcal{E})$ es afín relativo a x_0, existen funciones a_{ij}, $b_i\colon I \to \mathbb{R}$ tales que

$$E = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_0)x_j + b_i(x_0) \right] \frac{\partial}{\partial x_i},$$

y si $X\colon J \to I \times \mathcal{E}$

$$X(t) = (x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

es una curva integral de E, entonces satisface el sistema de ecuaciones diferenciales en $I \times \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} x_0' &= 1 \\ x_1' &= \sum a_{ij}(x_0)x_j + b_1(x_0) \\ &\vdots \quad \vdots \\ x_n' &= \sum a_{nj}(x_0)x_j + b_n(x_0). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Además se tiene que si esta solución satisface las condiciones iniciales

$$X(t_0) = (t_0, p) \in I \times \mathcal{E},$$

entonces $x_0(t) = t$, $J \subset I$ y la aplicación

$$\phi\colon J \to \mathcal{E}, \qquad \phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

satisface el *sistema de ecuaciones diferenciales lineales*[1] *no autónomo*

$$\begin{aligned} x_1' &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + b_1(t), \\ &\vdots \quad \vdots \\ x_n' &= \sum_{i=1}^{n} a_{nj}(t)x_j + b_n(t), \end{aligned}$$

o en forma matricial para $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$ y $b(t) = (b_i(t))$

$$\phi'(t) = \mathbf{A}(t)\phi(t) + b(t). \tag{4.3}$$

Recíprocamente si $J \subset I$ y $\phi\colon J \to \mathcal{E}$ es una solución de (4.3) satisfaciendo $\phi(t_0) = p$, entonces $X\colon J \to I \times \mathcal{E}$, definida por $X(t) = (t, \phi(t))$ es solución de (4.2) satisfaciendo $X(t_0) = (t_0, p)$.

En este tema estudiaremos las ecuaciones diferenciales no autónomas del tipo (4.3) y las del tipo (4.1), que consideraremos como un caso particular en el que $\mathbf{A}$ y b son constantes.

Si las a_{ij} y las b_i son continuas entonces E es localmente lipchiciano en $\mathcal{E}$ uniformemente en I, por tanto como consecuencia del teorema de continuidad del grupo uniparamétrico de E —ver el tema II—, tendremos que el grupo uniparamétrico local asociado τ, es continuo. Se sigue entonces que para cada $\lambda = (t_0, p) \in I \times \mathcal{E}$, existe una única curva integral máxima de E

$$X(t) = \tau(t - t_0, \lambda),$$

que verifica

$$X(t_0) = \lambda = (t_0, p),$$

[1] Con absoluto rigor aquí debería decir afín y no lineal, pero es habitual encontrar este abuso del lenguaje en los textos. En general llamaremos ecuación diferencial lineal (EDL), a cualquier sistema de este tipo autónomo o no.

y cuyo dominio de definición es $J = I(\tau(t_0, \lambda) = I(\lambda) - t_0$. Por lo tanto hay una única solución

$$\phi\colon J \to \mathcal{E},$$

de (4.3) satisfaciendo $\phi(t_0) = p$, y viene dada por las n últimas componentes de

$$(t, \phi(t)) = X(t) = \tau(t, \tau(t_0, \lambda)).$$

Además si las a_{ij} y las b_i son de clase k, entonces ϕ es de clase $k+1$ en J. No obstante vamos a dar una demostración alternativa, que aunque básicamente repite los mismos argumentos que vimos en el tema II, nos permitirá ofrecer una interpretación mas general del resultado, al mismo tiempo que demostramos que $J = I$, cosa que hasta ahora no se ha justificado.

4.2. Existencia y unicidad de solución

Hagamos antes un inciso para dar algunas definiciones y resultados relativos a la derivación e integración de curvas en un espacio de Banach.

Definición. Sea $\mathcal{B}$ un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Llamaremos *curva* en $\mathcal{B}$ a toda aplicación

$$\phi\colon I \to \mathcal{B},$$

donde I es un intervalo abierto real.

Diremos que una curva ϕ es *diferenciable* en $t \in I$ si existe el

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h},$$

que denotaremos $\phi'(t) \in \mathcal{B}$.

Es fácil ver que si ϕ es diferenciable en t, entonces es continua en t.

Diremos que una curva ϕ tiene *primitiva* si existe otra $\psi\colon I \to \mathcal{B}$ tal que $\psi' = \phi$.

Proposición 4.1 *Toda curva continua tiene primitiva y dos primitivas de la misma curva difieren en un elemento de $\mathcal{B}$.*

Definición. Sea ϕ continua y ψ una primitiva suya. Definimos la *integral* de ϕ, entre los extremos $c, d \in I$, como

$$\int_c^d \phi(t)dt = \psi(d) - \psi(c).$$

Las propiedades básicas de la integración son las siguientes.

Proposición 4.2 *Dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, $c, d \in I$ y ϕ_n, ϕ curvas continuas en I, se tiene:*

a) linealidad,

$$\int_c^d [\alpha_1\phi_1(s) + \alpha_2\phi_2(s)]ds = \alpha_1 \int_c^d \phi_1(s)ds + \alpha_2 \int_c^d \phi_2(s)ds.$$

b) Para $c < d$,

$$\| \int_c^d \phi(t)dt \| \leq \int_c^d \| \phi(t) \| dt.$$

c) Si $\phi_n \to \phi$ uniformemente en $[c, d]$, entonces

$$\int_c^d \phi_n(t)dt \to \int_c^d \phi(t)dt.$$

Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y consideremos los $\mathbb{K}$–espacios vectoriales $\mathcal{A}^n$ y $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ —anillo de las matrices de orden n, con términos en $\mathcal{A}$—. Cada $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ define un endomorfismo

$$\mathbf{A}\colon \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n, \qquad x \to \mathbf{A} \cdot x,$$

con el producto habitual entendiendo x como vector columna. Podemos definir las normas en $\mathcal{A}^n$ y $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$

$$\| (x_1, \ldots, x_n) \| = \sum_{i=1}^n \| x_i \| \qquad \| \mathbf{A} \| = \sup\{\| \mathbf{A}x \| : \| x \| = 1\},$$

para las que se tiene, si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ y $x \in \mathcal{A}^n$, que

$$\| \mathbf{A} \cdot x \| \leq \| \mathbf{A} \| \cdot \| x \| .$$

De esta forma y sabiendo que tanto $\mathcal{A}$ como $\mathcal{A}^n$ como $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ son espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3 *Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, y sean $\mathbf{A}\colon I \to \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ y $b\colon I \to \mathcal{A}^n$ continuas. Entonces para cada $t_0 \in I$ y $a \in \mathcal{A}^n$, existe una única curva*

$$\phi\colon I \to \mathcal{A}^n,$$

verificando

$$\phi(t_0) = a, \qquad \phi'(t) = \mathbf{A}(t)\phi(t) + b(t).$$

Demostración. Definamos la sucesión $\phi_m\colon I \to \mathcal{A}^n$ recurrentemente, de la forma siguiente. Tomamos $\phi_0(t) = a$ y

$$\phi_{m+1}(t) = a + \int_{t_0}^{t} [\mathbf{A}(s) \cdot \phi_m(s) + b(s)]ds. \tag{4.4}$$

Consideremos ahora un intervalo compacto $J \subset I$, con $t_0 \in J$. Entonces existe $k > 0$ tal que en J, $\| \mathbf{A}(s) \| \leq k$. Por tanto en J (para $t \geq t_0$)

$$\| \phi_{m+1}(t) - \phi_m(t) \| \leq k \int_{t_0}^{t} \| \phi_m(s) - \phi_{m-1}(s) \| \, ds,$$

y si llamamos

$$b = \text{máx}\{\|t - t_0\| : \ t \in J\}, \quad c = \text{máx}\{\| \phi_1(t) - a \|\colon \ t \in J\},$$

tendremos que en J

$$\begin{aligned}
&\| \phi_1(t) - \phi_0(t) \| \leq c, \\
&\| \phi_2(t) - \phi_1(t) \| \leq kc|t - t_0| \leq c(kb), \\
&\| \phi_3(t) - \phi_2(t) \| \leq k^2 c \frac{|t - t_0|^2}{2} \leq c\frac{(kb)^2}{2}, \\
&\qquad\vdots \\
&\| \phi_{m+1}(t) - \phi_m(t) \| \leq k^m c \frac{|t - t_0|^m}{m!} \leq c\frac{(kb)^m}{m!}.
\end{aligned}$$

Por tanto existe el $\lim \phi_m = \phi$, uniforme en cada compacto, por tanto ϕ es continua. Además de (4.4) se sigue que ϕ es la solución buscada, pues

$$\phi(t) = a + \int_{t_0}^{t} [\mathbf{A}(s) \cdot \phi(s) + b(s)]ds.$$

Veamos ahora la unicidad. Si existiese otra solución ψ, tendríamos que para $Z = \phi - \psi$,

$$Z(t) = \int_{t_0}^{t} [\mathbf{A}(s) \cdot Z(s)] ds,$$

y para $f(t) = \| Z(t) \|$, se tendría que en cada compacto J de I, con $t_0 \in J$,

$$f(t) \leq k \int_{t_0}^{t} f(s) ds,$$

y tomando t tal que $(t - t_0)k < 1$ y $t_1 \in [t_0, t]$, tal que $f(t_1) = \max\{f(s) : s \in [t_0, t]\}$, tendríamos que

$$f(t_1) \leq k \int_{t_0}^{t_1} f(s) ds \leq k(t_1 - t_0) f(t_1).$$

De esta forma, demostrando que la frontera del conjunto $\{t \in I : f(t) = 0\}$ es vacía, se concluye que $Z = 0$. ∎

Un caso particular importante, que utilizaremos en las próximas lecciones, lo tenemos cuando $\mathcal{A} = \mathbb{C}$.

Otro caso particular interesante es $\mathcal{A} = \mathcal{C}^r(K)$, para K compacto de $\mathbb{R}^m$, con la norma de la convergencia uniforme de la función y todas sus derivadas

$$\| f \| = 2^r \sup\{|D^a f(x)| : \ x \in K, \ |a| \leq r\}.$$

En estos términos tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.4 *Sea K un compacto de $\mathbb{R}^m$ e I un intervalo abierto real. Sean $t_0 \in I$, $f_i \in \mathcal{C}^r(K)$ y $h_{ij}, g_i \colon I \times K \to \mathbb{R}$, funciones de clase r. Entonces existe una única aplicación*

$$X = (x_1, \ldots, x_n) \colon I \times K \to \mathbb{R}^n,$$

solución de

$$x_i'(t, p) = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t, p) x_j(t, p) + g_i(t, p), \tag{4.5}$$

para $i = 1, \ldots, n$, satisfaciendo $x_i(t_0, \cdot) = f_i$. Además

$$X \in \mathcal{C}^r(I \times K).$$

Demostración. Basta considerar

$$a_{ij}, b_i \colon I \to \mathcal{C}^r(K),$$

definidas por

$$b_i(t) = g_i(t, \cdot), \quad a_{ij}(t) = h_{ij}(t, \cdot),$$

y aplicar **(4.3)** para $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y $b = (b_i)$. Que X es de $\mathcal{C}^r(I \times K)$ es consecuencia de que

$$\phi \colon t \in I \to F(t, \cdot) \in \mathcal{C}(K),$$

es continua si y sólo si

$$F : I \times K \to \mathbb{R},$$

es continua. ∎

Observemos que si las funciones son de $\mathcal{C}^\infty$, entonces son de $\mathcal{C}^r$ para todo r, por tanto X es de $\mathcal{C}^r$ para todo r y consecuentemente de $\mathcal{C}^\infty$.

Por último observemos que si las $f_i \in \mathcal{C}^r(U)$ con U abierto de $\mathbb{R}^n$ y las

$$h_{ij}, g_i \colon I \times U \to \mathbb{R},$$

son de $\mathcal{C}^r$, entonces existe una única

$$X \colon I \times U \to \mathbb{R}^n,$$

solución de (4.5) satisfaciendo $x_i(t_0, \cdot) = f_i$. Para ello basta considerar un recubrimiento por compactos de U y en cada compacto considerar la solución de **(4.4)**. Tales soluciones definen, por la unicidad, una en $I \times U$.

4.3. Estructura de las soluciones

A lo largo de esta lección I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, por $\mathbb{K}$ entenderemos $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ indistintamente y $\mathbf{A} \colon I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $b \colon I \to \mathbb{K}^n$ son continuas.

4.3.1. El sistema homogéneo.

Consideremos ahora el caso particular de sistema lineal de ecuaciones diferenciales —que llamaremos *homogéneo*— para el que $b = 0$. Es decir vamos a analizar las soluciones $\phi\colon I \to \mathbb{K}^n$ que verifican

$$\phi'(t) = \mathbf{A}(t)\phi(t). \tag{4.6}$$

Denotemos con $\mathcal{E}[\mathbf{A}]$ el conjunto de las soluciones ϕ de (4.6). Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.5 *$\mathcal{E}[\mathbf{A}]$ es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial n–dimensional.*

Demostración. Que es un espacio vectorial es obvio. Veamos entonces que es de dimensión n.

Consideremos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}^n$ independientes. Entonces para cada $t_0 \in I$ existen $\phi_1, \ldots, \phi_n$ soluciones de (4.6) tales que $\phi_i(t_0) = \alpha_i$. Veamos que las ϕ_i son base de $\mathcal{E}[\mathbf{A}]$.

Si $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ son tales que $\sum c_i\phi_i = 0$, entonces en t_0 tendremos que $\sum c_i\alpha_i = 0$ de donde se sigue que los $c_i = 0$. Por tanto las soluciones ϕ_i son independientes.

Consideremos ϕ una solución de (4.6) y sea $\alpha = \phi(t_0)$. Como existen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ tales que $\alpha = \sum c_i\alpha_i$, tendremos que ϕ y $\sum c_i\phi_i$ coinciden en t_0, pero por la unicidad de solución se tendrá que $\phi = \sum c_i\phi_i$. ∎

Definición. Llamaremos *sistema fundamental de soluciones de* la ecuación (4.6), a cualquier base de $\mathcal{E}[\mathbf{A}]$, como la $\phi_1, \ldots, \phi_n$ del teorema anterior.

Llamaremos *matriz fundamental* de (4.6) a cualquier matriz de funciones en I, cuyas columnas sean una base de $\mathcal{E}[\mathbf{A}]$. La denotaremos con $\mathbf{\Phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$.

Ejercicio 4.3.1 Supongamos que $\mathbf{A}(t)$ es real. Demostrar que:

a) $\phi = X + iY$ es una solución compleja de (4.6) si y sólo si $X = Re[\phi]$ e $Y = Im[\phi]$ son soluciones reales.

b) Si $\phi_1, \ldots, \phi_n$ es un sistema fundamental complejo para (4.6), entonces en

$$Re[\phi_1], Im[\phi_1], \ldots, Re[\phi_n], Im[\phi_n],$$

hay un sistema fundamental real.

Ejercicio 4.3.2 Sean $\mathbf{\Phi}$ y $\mathbf{\Psi}$ matrices de funciones continuas en I. Demostrar:

a) $\mathbf{\Phi} = (\varphi_{ij})$ es diferenciable en $t \in I$ si y sólo si cada φ_{ij} lo es, y

$$\mathbf{\Phi}'(t) = (\varphi'_{ij}(t)).$$

b) Si $\mathbf{\Phi}$ y $\mathbf{\Psi}$ son diferenciables en $t \in I$, entonces

$$(\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{\Psi})'(t) = \mathbf{\Phi}'(t) \cdot \mathbf{\Psi}(t) + \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{\Psi}'(t).$$

c) Si $\mathbf{\Phi}$ es diferenciable en t y $\mathbf{\Phi}(t)$ es no singular, entonces $\mathbf{\Phi}^{-1}$ es diferenciable en t y su derivada es

$$(\mathbf{\Phi}^{-1})'(t) = -\mathbf{\Phi}^{-1}(t) \cdot \mathbf{\Phi}'(t) \cdot \mathbf{\Phi}^{-1}(t).$$

Definición. Llamaremos *ecuación diferencial matricial asociada* a (4.6) a

$$\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{\Phi}(t). \tag{4.7}$$

Obviamente toda matriz fundamental de (4.6) es solución de (4.7) y como a nosotros nos interesan las matrices fundamentales, pues dada una tendremos todas las soluciones de (4.6), nos interesará caracterizar las soluciones de (4.7) que sean fundamentales.

Proposición 4.6 *Sean $\phi_1, \ldots, \phi_n$ soluciones de (4.6). Entonces son equivalentes:*

1. *$\phi_1, \ldots, \phi_n$ es una base de $\mathcal{E}[\mathbf{A}]$.*
2. *Para cada $t \in I$, $\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)$ es una base de $\mathbb{K}^n$.*
3. *Existe un $t \in I$, para el que $\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)$ es una base de $\mathbb{K}^n$.*

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii) Basta demostrar que para cada $t \in I$,

$$\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t),$$

son independientes.

Sea $t \in I$ y supongamos que existen $c_i \in \mathbb{K}$ tales que $\sum c_i \phi_i(t) = 0$, entonces $\sum c_i \phi_i$ y la curva constante 0 son soluciones de (4.6) que coinciden en t, se sigue de la unicidad de solución que $\sum c_i \phi_i = 0$. Pero como las ϕ_i son independientes se sigue que las $c_i = 0$.

iii) $\Rightarrow$ i) Basta demostrar que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son independientes.

Supongamos que existen $c_i \in \mathbb{K}$ tales que $\sum c_i \phi_i = 0$, entonces $\sum c_i \phi_i(t) = 0$. Pero como las $\phi_i(t)$ son independientes se sigue que las $c_i = 0$. ∎

Corolario 4.7 *Una solución* $\mathbf{\Phi}$ *de (4.7) es una matriz fundamental de (4.6) si y sólo si para cada* $t \in I$, $\det \mathbf{\Phi}(t) \neq 0$ *y si y sólo si existe un* $t \in I$ *para el que* $\det \mathbf{\Phi}(t) \neq 0$.

Observemos que si $\mathbf{\Phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ es fundamental, y $\mathbf{B}$ es una matriz de orden n, constante y no singular, entonces

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{B},$$

también es fundamental, pues $\mathbf{\Psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$, siendo las $\psi_i = \sum b_{ij}\phi_j$ base de $\mathcal{E}[\mathbf{A}]$. Además toda matriz fundamental es de esta forma para alguna $\mathbf{B}$ constante no singular —la matriz cambio de base—. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Proposición 4.8 *Si* $\mathbf{\Phi}$ *es una matriz fundamental y* $\mathbf{B}$ *es constante y no singular, entonces* $\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{B}$ *también es fundamental. Además fijada una matriz fundamental* $\mathbf{\Phi}$*, cualquier otra es de la forma* $\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{B}$*, para alguna* $\mathbf{B}$ *constante no singular. La solución de (4.6) que satisface* $\phi(t_0) = p$*, para un* $t_0 \in I$ *y* $p \in \mathbb{K}^n$ *es*

$$\phi(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{\Phi}^{-1}(t_0) \cdot p,$$

entendiendo p *como vector columna.*

Ejercicio 4.3.3 Demostrar que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbf{\Phi}$ es una matriz fundamental real de (4.6), entonces el grupo uniparamétrico del campo E asociado a (4.6) es

$$X[t, (r, p)] = (t + r, \mathbf{\Phi}(t + r) \cdot \mathbf{\Phi}^{-1}(r) \cdot p).$$

Proposición 4.9 *Si* $\mathbf{\Phi}$ *es una solución de (4.7) y* $t \in I$

$$[\det \mathbf{\Phi}(t)]' = \operatorname{traz} \mathbf{A}(t) \cdot \det \mathbf{\Phi}(t).$$

Demostración. Si $\mathbf{\Phi} = (\varphi_{ij})$, entonces se demuestra por inducción que

$$[\det \mathbf{\Phi}]' = \begin{vmatrix} \varphi'_{11} & \varphi'_{12} & \cdots & \varphi'_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi'_{n1} & \varphi'_{n2} & \cdots & \varphi'_{nn} \end{vmatrix}$$

ahora bien se sigue de (4.7) que

$$\varphi'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\varphi_{kj},$$

y por tanto para cada i

$$(\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\varphi_{k1}, \ldots, \varphi_{kn}),$$

por lo que tendremos que

$$[\det \mathbf{\Phi}]' = \begin{vmatrix} a_{11}\varphi_{11} & a_{11}\varphi_{12} & \cdots & a_{11}\varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+ \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}\varphi_{n1} & a_{nn}\varphi_{n2} & \cdots & a_{nn}\varphi_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \operatorname{traz} \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{\Phi}. \quad \blacksquare$$

Corolario 4.10 *Si* $\mathbf{A}$ *es real y* $\mathbf{\Phi}$ *es una solución de (4.6), tal que para* $t_0 \in I$, *el* $\det[\mathbf{\Phi}(t_0)] = a + bi$, *entonces*

$$\det[\mathbf{\Phi}(t)] = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{traz} \mathbf{A}(s)ds}(a + bi).$$

Nota 4.11 Una demostración alternativa de **(4.8)** es: Si $\mathbf{\Phi}$ es fundamental, entonces en I, $\mathbf{\Phi}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Phi}$, por tanto $(\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{B})' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{B}$, es decir que $\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{B}$ es solución de (4.7). Además como en I,

$$\det(\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{\Phi} \cdot \det \mathbf{B} \neq 0,$$

tenemos que $\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{B}$ es fundamental.

Sean ahora $\mathbf{\Phi}$ y $\mathbf{\Psi}$ fundamentales y definamos en I, $\mathbf{B} = \mathbf{\Phi}^{-1} \cdot \mathbf{\Psi}$. Entonces $\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{\Psi}$ y

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi}' &= (\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{B})' \\ &= \mathbf{\Phi}' \cdot \mathbf{B} + \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{B}' \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{B}' \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Psi} + \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{B}', \end{aligned}$$

por tanto $\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{B}' = 0$, y como las columnas de $\mathbf{\Phi}$ son independientes para cada t, tendremos que las columnas de $\mathbf{B}'$ son nulas para cada t, y por tanto $\mathbf{B}$ es constante.

Nota 4.12 Observemos que:

a) Si $\mathbf{\Phi}$ es fundamental y $\mathbf{B}$ es constante, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{\Phi}$ no es fundamental en general.

b) Dos sistemas homogéneos distintos no pueden tener una matriz fundamental común, pues esta lo determina ya que,

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Phi}' \cdot \mathbf{\Phi}^{-1}.$$

Recordemos que si $\mathbf{\Phi}$ es fundamental para (4.6), entonces

$$(\mathbf{\Phi}^{-1})' = -\mathbf{\Phi}^{-1} \cdot \mathbf{\Phi}' \cdot \mathbf{\Phi}^{-1} = -\mathbf{\Phi}^{-1} \cdot \mathbf{A},$$

por tanto si llamamos $\mathbf{\Psi} = (\mathbf{\Phi}^{-1})^*$, tendremos que

$$\mathbf{\Psi}' = -\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{\Psi}. \tag{4.8}$$

Definición. Esto nos sugiere definir el nuevo sistema lineal, que llamaremos *adjunto del sistema* (4.6) al sistema

$$\phi'(t) = -\mathbf{A}(t)^* \cdot \phi(t). \tag{4.9}$$

Obviamente el adjunto del adjunto de (4.6) es (4.6). Además de (4.8) se sigue que si $\mathbf{\Phi}$ es fundamental para (4.6), entonces $(\mathbf{\Phi}^{-1})^*$ es fundamental para (4.9). Veremos qué campo tangente hay detrás de esta ecuación en la lección (4.6).

Proposición 4.13 *Si $\mathbf{\Phi}$ es una matriz fundamental para (4.6), entonces $\mathbf{\Psi}$ lo es para (4.9) si y sólo si $\mathbf{\Phi}^* \cdot \mathbf{\Psi}$ es constante y no singular.*

Demostración. Como $\mathbf{\Phi}^{*-1}$ es fundamental para (4.9), se sigue de **(4.7)** que $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Phi}^{*-1} \cdot \mathbf{B}$, es fundamental para (4.9) si y sólo si $\mathbf{B}$ es constante no singular. ∎

Corolario 4.14 *Si $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$, entonces para cada matriz fundamental $\mathbf{\Phi}$ de (4.6) se tiene que $\mathbf{\Phi}^* \cdot \mathbf{\Phi}$ es constante, por tanto para cada solución ϕ de (4.6), $\| \phi(t) \|_2$ es constante.*

Ejemplo 4.3.1 Por ejemplo consideremos el sistema de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

el cual corresponde al campo de los giros

$$y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y},$$

que tiene a $x^2 + y^2$ como integral primera, por lo que para cualquier solución $(x(t), y(t))$

$$x^2(t) + y^2(t) = cte$$

Ejemplo 4.3.2 Consideremos el sistema de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

que corresponde al campo

$$(y+z)\frac{\partial}{\partial x} - (x+z)\frac{\partial}{\partial y} + (y-x)\frac{\partial}{\partial z},$$

que tiene a $x^2 + y^2 + z^2$ como integral primera.

4.3.2. El sistema no homogéneo.

Consideremos ahora el caso no homogéneo, es decir buscamos las soluciones de

$$\phi'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \phi(t) + b(t). \tag{4.10}$$

Si $\mathbf{\Phi}$ es una matriz fundamental para (4.6), nos preguntamos si habrá alguna solución de (4.10) de la forma

$$\phi = \mathbf{\Phi} \cdot Z,$$

en cuyo caso tendría que verificarse

$$\phi' = \begin{cases} \mathbf{A} \cdot \phi + b = \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Phi} \cdot Z + b \\ \mathbf{\Phi}' \cdot Z + \mathbf{\Phi} \cdot Z' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Phi} \cdot Z + \mathbf{\Phi} \cdot Z' \end{cases}$$

de donde se sigue que,

$$b = \mathbf{\Phi} \cdot Z',$$

por tanto fijado un $r \in I$ y definiendo

$$Z(t) = \int_r^t \mathbf{\Phi}^{-1}(s) \cdot b(s) ds,$$

tendremos que

$$\phi = \mathbf{\Phi} \cdot Z,$$

es la solución de (4.10) que verifica $\phi(r) = 0$. Y si lo que queremos es la solución que satisface la condición

$$\phi(r) = \alpha \in \mathbb{K}^n,$$

entonces basta considerar la solución ψ de (4.6), que satisface $\psi(r) = \alpha$ y definir

$$\phi(t) = \psi(t) + \mathbf{\Phi}(t) \int_r^t \mathbf{\Phi}^{-1}(s) \cdot b(s) ds.$$

Ejemplo 4.3.3 Vamos a resolver la ecuación $y' + 2y = 2x$, con la condición $y(0) = b$

Primero resolvemos $\varphi' + 2\varphi = 0$, es decir $(\log \varphi)' = -2$, que da $\varphi = \mathrm{e}^{-2x}$. La solución por tanto es $y = z\varphi$, para $z'\varphi = 2x$; es decir

$$z = \int 2x\, \mathrm{e}^{2x} = x\, \mathrm{e}^{2x} - (1/2)\, \mathrm{e}^{2x} + a,$$

pues $(x\, \mathrm{e}^{2x})' = \mathrm{e}^{2x} + 2x\, \mathrm{e}^{2x}$; y en definitiva la solución es

$$y = z\varphi = (x\, \mathrm{e}^{2x} - (1/2)\, \mathrm{e}^{2x} + a)\, \mathrm{e}^{-2x} = x + a\, \mathrm{e}^{-2x} - (1/2),$$

siendo $b = y(0) = a - 1/2$.

4.4. Reducción de una EDL

Supongamos ahora que conocemos m soluciones de (4.6),

$$\phi_1, \ldots, \phi_m \in \mathcal{E}[\mathbf{A}],$$

independientes, con $1 \leq m < n$. En tal caso podríamos reducir nuestro sistema lineal a uno de orden $n - m$ de la siguiente forma:

Pongamos $\phi_i = (\varphi_{ji})$ como vectores columna. Entonces como para cada $t \in I$, tenemos que $\operatorname{rang}(\varphi_{ji}(t)) = m$ —pues podemos extender $\phi_1, \dots, \phi_m$ a una base de $\mathcal{E}[\mathbf{A}]$ y aplicar **(4.7)**—, entonces existe un menor de orden m en la matriz $(\varphi_{ji}(t))$ —que por comodidad podemos suponer que es el formado por las m primeras filas— con determinante no nulo. Por continuidad se sigue que existe un entorno $J \subset I$, de t, para el que el mismo menor —que llamaremos $\mathbf{\Phi}_1$—, tiene determinante no nulo. Ahora nos olvidamos de I y nos quedamos con J.

Consideremos la matriz —por columnas—,

$$\begin{aligned}\Delta &= (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m, e_{m+1}, \dots, e_n)\\ &= \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{m+1,1} & \phi_{m+1,2} & \cdots & \phi_{m+1,m} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nm} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

donde las columnas e_i son constantes, con todo 0 salvo en el lugar i que tienen un 1. Consideremos

$$X(t) = \Delta(t) \cdot Y(t),$$

entonces X es solución de (4.6) si y sólo si

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \Delta \cdot Y = \mathbf{A} \cdot X &= X',\\ &= \Delta' \cdot Y + \Delta \cdot Y'.\end{aligned}$$

Llamemos por comodidad

$$\Delta = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_2 & \mathbf{E} \end{pmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix}, \ \phi = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_1 \\ \mathbf{\Phi}_2 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned}&\mathbf{A} \cdot \Delta \cdot Y = \mathbf{A} \cdot \phi \cdot Y_1 + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 \cdot Y_2 \\ \mathbf{A}_4 \cdot Y_2 \end{pmatrix}\\ &\Delta' \cdot Y = \phi' \cdot Y_1 = \mathbf{A} \cdot \phi \cdot Y_1 \ , \qquad \Delta \cdot Y' = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_1 \cdot Y_1' \\ \mathbf{\Phi}_2 \cdot Y_1' + Y_2' \end{pmatrix}\end{aligned}$$

por tanto $X = \Delta \cdot Y$ es solución de (4.6) si y sólo si

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 \cdot Y_2 \\ \mathbf{A}_4 \cdot Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_1 \cdot Y_1' \\ \mathbf{\Phi}_2 \cdot Y_1' + Y_2' \end{pmatrix}$$

es decir Y satisface el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} Y_1' &= \mathbf{\Phi}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \cdot Y_2, \\ Y_2' &= \mathbf{A}_4 \cdot Y_2 - \mathbf{\Phi}_2 \cdot Y_1' = \\ &= [\mathbf{A}_4 - \mathbf{\Phi}_2 \cdot \mathbf{\Phi}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2] \cdot Y_2. \end{aligned}$$

Es decir el primer sistema de ecuaciones nos permite despejar las y_j' —para $j = 1, \ldots, m$— en función de las φ_{ij} las a_{ij} y las y_k —para $k = m+1, \ldots, n$—. Por tanto el segundo sistema queda como un sistema lineal de la forma

$$\begin{aligned} y_{m+1}' &= \sum_{k=m+1}^{n} b_{m+1,k} y_k, \\ &\vdots \\ y_n' &= \sum_{k=m+1}^{n} b_{nk} y_k, \end{aligned}$$

que es un sistema lineal de orden $n - m$.

4.5. Exponencial de matrices

Para $n = 1$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la solución de $x' = \lambda x$, verificando $x(a) = b$, es

$$x(t) = b\mathrm{e}^{\int_a^t \lambda(s)ds},$$

en particular para λ constante es

$$x(t) = b\,\mathrm{e}^{(t-a)\lambda}.$$

Nos preguntamos ahora si para $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esto también es cierto. Pero antes necesitamos saber como definir la exponencial de una matriz compleja.

Por $\mathbf{E}$ entenderemos la matriz unidad. Y por una serie de matrices entenderemos el límite de sus sumas parciales, con la norma

$$\| \mathbf{A} \| = \sup\{\| \mathbf{A}x \|_2 : \| x \|_2 = 1\}.$$

Para esta norma se tiene que

$$\| \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \| \leq \| \mathbf{A} \| \cdot \| \mathbf{B} \|,$$

y $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es un álgebra de Banach —cualquier otra norma matricial vale para lo que estamos viendo—.

Recordando ahora que para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^x = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!},$$

podemos dar la siguiente definición.

Definición. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, definimos la *exponencial de* $\mathbf{A}$ como

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \exp[\mathbf{A}] = \mathbf{E} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^m}{m!}.$$

Se sigue que $\exp[\mathbf{A}]$ está bien definida pues las sumas parciales forman una sucesión de Cauchy, ya que

$$\| \sum_{m=p+1}^{p+q} \frac{\mathbf{A}^m}{m!} \| \leq \sum_{m=p+1}^{p+q} \frac{\| \mathbf{A} \|^m}{m!}.$$

Ejercicio 4.5.1 Demostrar que

$$\| e^{\mathbf{A}} \| \leq e^{\|\mathbf{A}\|}.$$

Ejercicio 4.5.2 Demostrar que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices que conmutan, entonces

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}} \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{B}},$$

aunque en general eso no es cierto. Y que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{e}^{t\mathbf{A}} - \mathbf{E}}{t} = \mathbf{A}.$$

Ejercicio 4.5.3 Dada una matriz $\mathbf{A}$, demostrar que:
a) $\exp[\mathbf{A}]$ es no singular.
b) $(\exp[\mathbf{A}])^{-1} = \mathrm{e}^{-\mathbf{A}}$.
c) Si $\mathbf{P}$ es no singular, entonces

$$\mathrm{e}^{\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{-1}} = \mathbf{P}\cdot\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{P}^{-1}.$$

En el siguiente resultado veremos que para ciertos sistemas lineales podemos dar una matriz fundamental a través de la exponencial.

Teorema 4.15 *Sea* $\mathbf{A}\colon I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, continua y* $t_0 \in I$*. Si la primitiva* $\mathbf{B}$ *de* $\mathbf{A}$ *para la que* $\mathbf{B}(t_0) = 0$*, satisface que* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ *en todo* I*, entonces* $\exp[\mathbf{B}(t)]$ *es diferenciable y satisface*

$$\exp[\mathbf{B}(t)]' = \mathbf{A}(t)\cdot\exp[\mathbf{B}(t)]\ , \qquad \exp[\mathbf{B}(t_0)] = \mathbf{E}.$$

Demostración. Consideremos la siguiente sucesión de curvas

$$\mathbf{\Phi}_0(t) = \mathbf{E},$$

y para $m \geq 1$

$$\mathbf{\Phi}_m(t) = \mathbf{E} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(s)\cdot\mathbf{\Phi}_{m-1}(s)ds.$$

Como vimos en **(4.3)**, se sigue que $\mathbf{\Phi}_m$ converge uniformemente en cada compacto a una $\mathbf{\Phi}$, para la que se tiene

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{E} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(s)\cdot\mathbf{\Phi}(s)ds.$$

Ahora como $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, se sigue fácilmente que que para $m \in \mathbf{N}$

$$[\mathbf{B}(t)^m]' = m\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{B}(t)^{m-1},$$

ó en forma integral que

$$\frac{\mathbf{B}(t)^m}{m} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(s)\cdot\mathbf{B}(s)^{m-1}ds.$$

Se sigue entonces que

$$\mathbf{\Phi}_0(t) = \mathbf{E},$$
$$\mathbf{\Phi}_1(t) = \mathbf{E} + \mathbf{B}(t),$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{\Phi}_m(t) = \mathbf{E} + \mathbf{B}(t) + \frac{\mathbf{B}(t)^2}{2} + \cdots + \frac{\mathbf{B}(t)^m}{m!},$$

por lo tanto $\mathbf{\Phi}(t) = \exp[\mathbf{B}(t)]$. ∎

Ejercicio 4.5.4 Si $\mathbf{\Phi}$ es una solución de (4.7), demostrar que para cada $r, t \in I$

$$\det[\mathbf{\Phi}(t)] = \det[\mathbf{\Phi}(r)] \cdot \exp[\int_r^t \operatorname{traz} \mathbf{A}(s) ds].$$

4.6. EDL con coeficientes constantes

En esta lección estudiaremos el grupo uniparamétrico de un campo lineal $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. En un sistema de coordenadas lineales x_i tendremos que

$$D = \left[\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i\right] \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \left[\sum_{i=1}^n a_{ni}x_i\right] \frac{\partial}{\partial x_n},$$

y sus curvas integrales satisfacen la ecuación diferencial lineal $\phi' = \mathbf{A} \cdot \phi$, que es (4.6) con $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matriz constante.

Teorema 4.16 *Dada una matriz constante* $\mathbf{A}$, *se tiene que* $\mathbf{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$ *es una matriz fundamental para el sistema lineal* $\phi' = \mathbf{A} \cdot \phi$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de **(4.15)**, pero en este caso la demostración se sigue sin dificultad del ejercicio (4.5.2), pues

$$\mathrm{e}^{(t+r)\mathbf{A}} = \mathrm{e}^{r\mathbf{A}} \cdot \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$$

y por tanto, cuando $r \to 0$

$$\frac{\mathbf{\Phi}(t+r) - \mathbf{\Phi}(t)}{r} = \frac{\mathrm{e}^{r\mathbf{A}} - \mathbf{E}}{r} \cdot \mathrm{e}^{t\mathbf{A}} \to \mathbf{A} \cdot \mathrm{e}^{t\mathbf{A}} = \mathbf{\Phi}'(t),$$

y como $\det \mathbf{\Phi}(0) = 1 \neq 0$, tenemos por **(4.7)** que $\mathbf{\Phi}$ es fundamental. ∎

Como consecuencia tenemos que el grupo uniparamétrico de D es

$$X\colon \mathbb{R} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \quad X(t,p) = \mathbf{\Phi}(t)\cdot p = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}\cdot p,$$

y es tal que los difeomorfismos

$$X_t = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}\colon\ \mathcal{E} \to \mathcal{E},$$

son isomorfismos lineales.

Ejercicio 4.6.1 Recíprocamente demostrar que si $X_t\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ es un grupo uniparamétrico de isomorfismos lineales, entonces su generador infinitesimal es un campo tangente lineal.

Nota 4.17 Todo campo tangente lineal D, con grupo uniparamétrico X_t, define un campo tangente lineal canónico E en $\mathcal{E}^*$ —realmente un campo lineal en cada espacio vectorial de tensores p,q, $\mathcal{T}^q_p(\mathcal{E})$—, cuyo grupo uniparamétrico Y_t está definido de la forma siguiente para cada $\omega \in \mathcal{E}^*$

$$Y_t\colon \mathcal{E}^* \to \mathcal{E}^*\ , \qquad Y_t[\omega]\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}\ , \qquad Y_t[\omega](x) = \omega[X_{-t}(x)],$$

para cada $\omega \in \mathcal{E}^*$.

Si consideramos una base e_i de $\mathcal{E}$ y su base dual x_i y escribimos D y E en los correspondientes sistemas de coordenadas x_i y v_i —para $e_i \in \mathcal{E} \to v_i \in \mathcal{E}^{**}$ el isomorfismo canónico—, tendremos que

$$D = \sum \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\ , \qquad E = \sum \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}v_j\right)\frac{\partial}{\partial v_i},$$

y para $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})$ se tiene que el coeficiente i,j de $\exp[t\mathbf{B}]$ es

$$Y_t[x_i](e_j) = x_i(X_{-t}[e_j]),$$

que es el coeficiente j,i de $\mathrm{e}^{-t\mathbf{A}}$, de donde se sigue derivando y tomando el valor en 1 que

$$\mathbf{B} = -\mathbf{A}^*,$$

es decir que la ecuación diferencial definida por E es la adjunta —ver (4.9)—, de la definida por D.

Ejercicio 4.6.2 a) Demostrar que

$$\det[\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}] = \mathrm{e}^{t(\operatorname{traz}\mathbf{A})}.$$

b) Calcular el volumen en el que se transforma el cubo definido por 0 y los vectores de la base

$$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),$$

por el flujo del sistema lineal

$$\phi' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & a & 10 \\ 8 & 0 & -a \end{pmatrix} \cdot \phi,$$

en el instante $t = 2$.

c) La divergencia de un campo $D = \sum f_i \partial_i$ es

$$\operatorname{div} D = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Demostrar el **Teorema de Liouville** para campos lineales:

"La velocidad de dilatación de un volumen B por el flujo X_t de un campo D en el instante 0, es la integral de la divergencia de D en el volumen".

Y demostrar que si la $\operatorname{div} D = 0$ entonces el flujo conserva volúmenes.

Ejercicio 4.6.3 Demostrar que si λ es un autovalor de $\mathbf{A}$ con autovector asociado v, entonces

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{t\lambda}\, v,$$

es solución de $\phi' = \mathbf{A} \cdot \phi$.

Nota 4.18 Debemos observar que, en el ejercicio anterior, aunque $\mathbf{A}$ sea real λ puede ser compleja, por tanto ϕ es una solución compleja en general, pero su parte real y su parte imaginaria son soluciones reales.

Nota 4.19 Si $\mathbf{J}$ es la matriz canónica de JORDAN (ver 5.1 de la pág.281) asociada a $\mathbf{A}$, entonces existe $\mathbf{P}$ no singular tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^{-1},$$

en tal caso tendremos que una matriz fundamental real $\mathbf{\Phi}$ de $\phi' = \mathbf{A} \cdot \phi$ es

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}} = \mathrm{e}^{t\mathbf{P}\cdot\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}^{-1}} = \mathbf{P} \cdot \mathrm{e}^{t\mathbf{J}} \cdot \mathbf{P}^{-1},$$

y por tanto también es fundamental —aunque en general compleja—

$$\mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{P} \cdot \mathrm{e}^{t\mathbf{J}}.$$

Ahora bien $\mathbf{J}$ es una matriz diagonal por cajas $\mathbf{J}_i = \lambda_i \mathbf{E} + \mathbf{D}$, para $i = 1, \ldots, r$, de orden m_i menor o igual que la multiplicidad de λ_i, donde $\mathbf{D} = (c_{ij})$ es de la forma $c_{i,i-1} = 1$ y $c_{ij} = 0$ en el resto. Y si $m_i = 1$, entonces $\mathbf{J}_i = \lambda_i$.

Se sigue que $\mathrm{e}^{t\mathbf{J}}$ es diagonal por cajas

$$\mathrm{e}^{t\mathbf{J}_i} = \mathrm{e}^{t\lambda i}\, \mathrm{e}^{t\mathbf{D}} = \mathrm{e}^{t\lambda i} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!} & \cdots & \frac{t^2}{2} & t & 1, \end{pmatrix}$$

y como consecuencia se tienen fácilmente los siguientes resultados.

Proposición 4.20 *X es solución de $\phi' = \mathbf{A} \cdot \phi$ si y sólo si es de la forma $X = \mathbf{P}Z$ con Z de la forma*

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\lambda_1}\, p_1^{(m_1-1)}(t) \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{t\lambda_1}\, p_1'(t) \\ \mathrm{e}^{t\lambda_1}\, p_1(t) \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{t\lambda_r}\, p_r^{(m_r-1)}(t) \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{t\lambda_r}\, p_r'(t) \\ \mathrm{e}^{t\lambda_r}\, p_r(t) \end{pmatrix}$$

donde los $p_i(t)$, para $i = 1, \ldots, r$, son polinomios en t de grado menor o igual que $m_i - 1$.

Proposición 4.21 *La matriz fundamental $\mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{P} \cdot \exp\{t\mathbf{J}\} = (\psi_{ij})$ de $\phi' = \mathbf{A}\phi$, es de la forma*

$$\psi_{ij}(t) = p_{ij}(t)\, \mathrm{e}^{t\lambda_k},$$

si $m_0 + \cdots + m_{k-1} < j \leq m_0 + \cdots + m_k$ para $k = 1, \ldots, r$, $m_0 = 0$ y donde los p_{ij} son polinomios de grado $\leq m_k - 1$.

A continuación daremos una importante aplicación de la proposición (4.20).

Corolario 4.22 *Si los autovalores de* $\mathbf{A}$ *tienen parte real negativa (positiva), entonces para toda solución* X *de* $\phi' = \mathbf{A}\phi$ *se tiene*

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = 0 \qquad (\lim_{t\to\infty} \| X(t) \| = \infty).$$

Demostración. Las soluciones de $\phi' = \mathbf{A}\phi$ son de la forma $X = \mathbf{P}Z$, con Z dada en **(4.20)**, por tanto como $\mathbf{P}$ es invertible

$$\| \mathbf{P}^{-1} \|^{-1} \cdot \| Z(t) \| \leq \| X(t) \| \leq \| \mathbf{P} \| \cdot \| Z(t) \| .$$

Ahora bien si los autovalores de $\mathbf{A}$ tienen parte real negativa entonces $Z(t) \to 0$ como consecuencia de **(4.20)** y de que $t^k \, \mathrm{e}^{at} \to 0$, para todo k y $a < 0$. Y si la tienen positiva $\| Z(t) \| \to \infty$, cuando $t \to \infty$, porque $\mathrm{e}^{at} \to \infty$ para $a > 0$. ∎

Recíprocamente se tiene.

Proposición 4.23 *Si las soluciones de* $\phi' = \mathbf{A}\phi$, *satisfacen* $X(t) \to 0$ *cuando* $t \to \infty$, *entonces los autovalores de* $\mathbf{A}$ *tienen parte real negativa. Y si para toda solución* X *se tiene que* $\| X(t) \| \to \infty$, *cuando* $t \to \infty$, *entonces las partes reales de todos los autovalores son positivas.*

Demostración. Supongamos que un autovalor de $\mathbf{A}$, $\lambda_i = a + ib$, es tal que $a \geq 0$ ($a \leq 0$). Entonces la solución $X = \mathbf{P}Z$ de $X' = \mathbf{A}X$, encontrada en **(4.20)**, para $p_i = 1$, $p_j = 0$ si $j \neq i$, es tal que

$$\| Z(t) \| = \| \mathrm{e}^{ta} \| \geq 1 \quad (\leq 1),$$

para $t > 0$. ∎

4.7. Clasificación de campos lineales

Definición. Diremos que dos campos lineales $D, E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ son *equivalentes*, si existe una biyección

$$h \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E},$$

que lleva el flujo de uno en el del otro, es decir para X_t e Y_t sus respectivos grupos uniparamétricos, si

$$h \circ X_t = Y_t \circ h.$$

Diremos que son *linealmente, diferenciablemente* ó *topológicamente equivalentes* si h es respectivamente un isomorfismo lineal, diferenciable o topológico.

Consideremos dos campos lineales $D, E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, con ecuaciones diferenciales asociadas en términos de un sistema de coordenadas lineales x_i

$$X' = \mathbf{A}X, \qquad Y' = \mathbf{B}Y,$$

es decir que para $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})$

$$D = \sum_{i=1}^{n} [\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j] \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$E = \sum_{i=1}^{n} [\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j] \frac{\partial}{\partial x_i}$$

en estos términos se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.24 *a) D y E son linealmente equivalentes por h si y sólo si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son semejantes. Además la matriz de semejanza la define h.*

b) D y E son diferenciablemente equivalentes si y sólo si lo son linealmente.

Demostración. Sabemos que D y E son diferenciablemente equivalentes si y sólo si h lleva D en E, es decir que para cada x $h_* D_x = E_{h(x)}$.

a) Si h es lineal y tiene matriz asociada $\mathbf{H}$, entonces h_* también tiene matriz asociada $\mathbf{H}$. Entonces como las componentes de D_x son $\mathbf{A}x$ y las de $E_{h(x)}$, $\mathbf{BH}x$, tendremos que para cada $x \in \mathbb{R}^n$

$$h_*(D_x) = E_{h(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{HA}x = \mathbf{BH}x,$$

lo cual equivale a que $\mathbf{HA} = \mathbf{BH}$.

b) Sea h difeomorfismo y consideremos que h_* en 0 tiene matriz asociada $\mathbf{H}$. Entonces como $X_t(0) = 0$, $h_* \circ X_{t*} = Y_{t*} \circ h_*$, $\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$ es la matriz asociada a X_t y a X_{t*} y $\mathrm{e}^{t\mathbf{B}}$ la de Y_t e Y_{t*}, tendremos que

$$\mathbf{H}\,\mathrm{e}^{t\mathbf{A}} = \mathrm{e}^{t\mathbf{B}}\,\mathbf{H},$$

y derivando en 0 obtenemos $\mathbf{HA} = \mathbf{BH}$. ∎

La clasificación topológica se sale del marco de lo explicado hasta ahora y no es elemental como las anteriores. Remitimos al lector al teorema (5.17), pág.301, donde demostraremos el siguiente resultado.

Proposición 4.25 *Si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *no tienen autovalores imaginarios puros, entonces* D *y* E *son topológicamente equivalentes si y sólo si el número de autovalores con parte real positiva (negativa) es el mismo en* $\mathbf{A}$ *que en* $\mathbf{B}$.

4.8. EDL con coeficientes periódicos

Consideremos ahora el caso en que la matriz $\mathbf{A}$ es periódica, es decir que existe $w \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{A}(t + w) = \mathbf{A}(t).$$

Veremos que en este caso la matriz fundamental, aunque no es periódica, se puede poner como el producto de una matriz $\mathbf{P}$ de período w, con una de la forma $\mathrm{e}^{t\mathbf{D}}$, con $\mathbf{D}$ constante. Para ello necesitamos probar la existencia de logaritmos de matrices no singulares.

Lema 4.26 *Dada una matriz* $\mathbf{B}$*, constante y no singular, existe otra* $\mathbf{A}$ *tal que* $\mathbf{B} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}}$.

Demostración. Basta probar que si $\mathbf{B} = \mathbf{PJP}^{-1}$, con $\mathbf{J}$ la matriz canónica de Jordan de $\mathbf{B}$, entonces existe $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{J} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}}$. $\mathbf{J}$ es una matriz diagonal por cajas $\mathbf{J}_1, \ldots, \mathbf{J}_r$, siendo $\mathbf{J}_i = \lambda_i$ si λ_i es de multiplicidad 1 y en general $\mathbf{J}_i = \lambda_i \mathbf{E} + \mathbf{Z}$, de orden m_i menor o igual que la multiplicidad de λ_i, donde $\mathbf{Z} = (z_{ij})$ es de la forma $z_{i,i+1} = 1$ y en el resto $z_{ij} = 0$, y siendo los λ_i los autovalores de $\mathbf{A}$.

Basta entonces encontrar $\mathbf{A}$ diagonal por cajas $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_r$, de tal forma que $\mathrm{e}^{\mathbf{A}_i} = \mathbf{J}_i$.

Tomamos $\mathbf{A}_i = \log \lambda_i$, si $m_i = 1$. Y para las $\mathbf{J}_i$ de la forma $\lambda\mathbf{E} + \mathbf{Z} = \lambda(\mathbf{E} + \mu\mathbf{Z})$, con $\mu = 1/\lambda$, basta encontrar $\mathbf{Q}$ tal que $\mathrm{e}^{\mathbf{Q}} = \mathbf{E} + \mu\mathbf{Z}$, pues

en ese caso podemos definir $\mathbf{A}_i = (\log\lambda)\mathbf{E} + \mathbf{Q}$ y habríamos terminado. Veamos que existe entonces $\mathbf{Q} = \log(\mathbf{E} + \mu\mathbf{Z})$.

Por analogía con

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \tag{4.11}$$

definimos

$$\mathbf{Q} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(\mu\mathbf{Z})^n}{n} = \sum_{n=1}^{k} a_n(\mu\mathbf{Z})^n,$$

y como la suma es finita, pues por las características de $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^n = 0$ para $n \geq m_i$ tendremos que está bien definida, siendo $a_n = (-1)^{n+1}/n$. Hay que demostrar ahora que $\mathrm{e}^{\mathbf{Q}} = \mathbf{E} + \mu\mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathbf{Q}} &= \mathbf{E} + \mathbf{Q} + \frac{\mathbf{Q}^2}{2} + \cdots + \frac{\mathbf{Q}^k}{k!} \\
&= \mathbf{E} + \sum_{n=1}^{k} a_n(\mu\mathbf{Z})^n + \sum_{n=1}^{k}\left(\sum_{n_1+n_2=n} a_{n_1}a_{n_2}\frac{(\mu\mathbf{Z})^n}{2}\right) + \\
&\quad + \cdots + \sum_{n=1}^{k}\left(\sum_{n_1+\cdots+n_k=n} a_{n_1}\cdots a_{n_k}\frac{(\mu\mathbf{Z})^n}{n!}\right) \\
&= \mathbf{E} + \sum_{n=1}^{k} d_n(\mu\mathbf{Z})^n,
\end{aligned}$$

siendo $d_1 = 1$ y $d_i = 0$ para $i \geq 2$ pues

$$\begin{aligned}
1 + x = \mathrm{e}^{\log(1+x)} &= 1 + [\log(1+x)] + \frac{[\log(1+x)]^2}{2} + \cdots \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n,
\end{aligned}$$

como se ve teniendo en cuenta (4.11) y reordenando la serie para ponerla en términos de las potencias de x —ver Apostol p.396—. ∎

Nota 4.27 Debemos observar que aunque $\mathbf{B}$ sea real $\mathbf{A}$ puede ser compleja. Sin embargo se puede probar que existe $\mathbf{A}$ real tal que $\mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \mathbf{B}^2$. (ver Coddington–Levinson, p.107).

Teorema 4.28 *Si* $\mathbf{A}$ *tiene período* w *y* Φ *es fundamental, entonces:*
i) $\Psi(t) = \Phi(t+w)$ *es fundamental.*
ii) *Si* X *es una solución de (4.6), entonces* $Y(t) = X(t+w)$ *también.*
iii *Existe* $\mathbf{P}$ *no singular con período* w *y* $\mathbf{D}$ *constante tales que*

$$\Phi(t) = P(t)\,\mathrm{e}^{t\mathbf{D}}\,.$$

Demostración. i)

$$\Psi'(t) = \Phi'(t+w) = \mathbf{A}(t+w)\Phi(t+w) = \mathbf{A}(t)\Psi(t),$$

y es fundamental pues $\det \Psi(t) = \det \Phi(t+w) \neq 0$.

iii) De **(4.7)** se sigue que existe $\mathbf{Q}$ constante no singular, tal que $\Psi = \Phi\mathbf{Q}$. Y de **(4.26)**, que existe $\mathbf{D}$ constante tal que $\mathbf{Q} = \mathrm{e}^{w\mathbf{D}}$. Basta definir

$$P(t) = \Phi(t)\,\mathrm{e}^{-t\mathbf{D}}\,. \quad \blacksquare$$

Nota 4.29 Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se sigue —ver la nota **(4.27)**—, que si Φ es fundamental existe $\mathbf{P}$ real de período $2w$ y $\mathbf{D}$ real constante, tales que $\Phi(t) = \mathbf{P}(t)\,\mathrm{e}^{t\mathbf{D}}$.

4.9. EDL de orden n con coeficientes constantes

En esta lección consideraremos la ecuación diferencial

$$f^{(n}(t) + a_{n-1}f^{(n-1}(t) + \cdots + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = g(t), \tag{4.12}$$

con los términos $a_0, \ldots, a_{n-1}$ constantes.

Observemos que para la matriz y el vector

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$$

es solución de

$$\phi'(t) = \mathbf{A} \cdot \phi(t) + b,$$

si y sólo si $f = \varphi_1$ es solución de (4.12)

4.9.1. Caso homogéneo.

Estudiemos en primer lugar las soluciones del caso $g = 0$, es decir

$$f^{(n}(t) + a_{n-1} f^{(n-1}(t) + \cdots + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = 0. \tag{4.13}$$

Consideremos el polinomio

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

entonces si por $\mathbf{D}$ entendemos el operador d/dt, tendremos que

$$p(\mathbf{D})f = f^{(n}(t) + a_{n-1} f^{(n-1}(t) + \cdots + a_1 f'(t) + a_0 f(t),$$

ahora bien si la descomposición de p en factores primos de $\mathbb{C}[x]$ es

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r},$$

con los λ_i distintos, está demostrado en los cursos de álgebra que

$$\ker[p(\mathbf{D})] = \ker[(\mathbf{D} - \lambda_1)^{m_1}] \oplus \cdots \oplus \ker[(\mathbf{D} - \lambda_r)^{m_r}],$$

por tanto si tenemos para cada i, una base de $\ker[(\mathbf{D} - \lambda_i)^{m_i}]$, tendremos una base de $\ker[p(\mathbf{D})]$ y por tanto de las soluciones de

$$f^{(n}(t) + a_{n-1} f^{(n-1}(t) + \cdots + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = 0.$$

Por inducción se demuestra fácilmente que

$$(\mathbf{D} - \lambda)^m [\mathrm{e}^{\lambda t}\, h] = \mathrm{e}^{\lambda t}\, \mathbf{D}^m h,$$

por tanto

$$(\mathbf{D} - \lambda)^m f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D}^m [\mathrm{e}^{-\lambda t}\, f] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = \mathrm{e}^{\lambda t}\, q(t),$$

para q polinomio de grado menor que m.

Entonces una base para cada

$$\ker[(\mathbf{D} - \lambda_i)^{m_i}],$$

viene dada por

$$\mathrm{e}^{\lambda_i t}, t\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}, \ldots, t^{m_i-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_i t},$$

y por tanto una base de soluciones de (4.13) es

$$\begin{array}{c} \mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ t\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{m_1-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \\ \mathrm{e}^{\lambda_2 t},\ t\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \ldots, t^{m_2-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \\ \cdots \\ \mathrm{e}^{\lambda_r t},\ t\,\mathrm{e}^{\lambda_r t}, \ldots, t^{m_r-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_r t}, \end{array} \tag{4.14}$$

donde

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r,$$

son las raíces de p con multiplicidades $m_1, \ldots, m_r$.

Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, basta tomar la parte real y la imaginaria de estas funciones. (Observemos que aunque aparentemente se duplica el número de funciones, no es así pues si λ es una raíz de p con parte imaginaria, su conjugada también es raíz de p.

Nota 4.30 Observemos que si las raíces λ_i de p son distintas, entonces toda solución de (4.13) es de la forma

$$f = c_1\,\mathrm{e}^{t\lambda_1} + \cdots + c_n\,\mathrm{e}^{t\lambda_n}.$$

Ejercicio 4.9.1 Resolver la ecuación

$$y'' + by = 0,$$

para $b \in \mathbb{R}$. ¿ Para qué valores de b existe una solución no trivial f satisfaciendo $f(0) = f(L) = 0$, con $L > 0$?

Ejercicio 4.9.2 Resolver la ecuación

$$y''' + 3y'' - 4y' = 0,$$

que satisface $y(1) = y'(1) = y''(1) = 1$.

4.9.2. Caso no homogéneo.

Si ahora lo que queremos es encontrar las soluciones de (4.12), tomamos las n funciones $f_1, \ldots, f_n$ de (4.14) y llamando

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \\ f_1'' \\ \vdots \\ f_1^{(n-1} \end{pmatrix}, \ldots, \phi_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_n' \\ f_1'' \\ \vdots \\ f_n^{(n-1} \end{pmatrix}$$

entonces como para $i = 1, \ldots, n$ las f_i son independientes, también lo son las ϕ_i, por lo que la matriz con columnas $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ es fundamental para $\phi' = \mathbf{A} \cdot \phi$.

En la lección **3** vimos que $\phi = \mathbf{\Phi} Z$ con

$$Z' = \mathbf{\Phi}^{-1} \cdot b = \mathbf{\Phi}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

es solución de $\phi' = \mathbf{A}\phi + b$, por tanto si

$$Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$$

tendremos que

$$f(t) = f_1(t)z_1(t) + \ldots + f_n(t)z_n(t),$$

es solución de (4.12).

Este método general precisa el cálculo de $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Phi}^{-1}$ e integrar $\mathbf{\Psi} b$, lo cual no es fácil en general. Sin embargo si la función g es sencilla, en el sentido de que sus derivadas son del "mismo tipo" que ella, hay una forma alternativa para resolver el problema.

Buscamos en primer lugar una solución general f_1 del sistema homogéneo (4.13), que satisfaga las condiciones iniciales que queramos, y una solución cualquiera f_2 del no homogéneo (4.12).

Nuestra solución será $f = f_1 + f_2$.

Por ejemplo si $g(t)$ es un polinomio, es natural buscar una f_2 entre los polinomios del mismo grado que g. Si es

$$g(t) = a\,\mathrm{sen}(kt) + b\cos(kt)$$

es natural buscar f_2 entre las funciones del mismo tipo, etc.

Ejercicio 4.9.3 a) Encontrar la solución de la ecuación

$$y'' + 3y' - 4y = 3x + 2,$$

que satisface las condiciones $y(1) = y'(1) = 1$.

b) Resolver la ecuación

$$y'' - 4y = 2\,\mathrm{e}^{3x},$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.

c) Resolver la ecuación

$$y'' + y = 2\cos(3x),$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.

4.10. EDL de orden n. Wronskiano

Dadas $a_0, \ldots, a_n \colon I \to \mathbb{K}$ y $g \colon I \to \mathbb{K}$ continuas, nos planteamos el problema de encontrar $f \colon I \to \mathbb{K}$ tal que

$$a_n(t)f^{(n}(t) + \cdots + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t) = g(t). \tag{4.15}$$

Si en un subintervalo $\mathbf{J}$ de I, $a_n(t) \neq 0$, podemos considerar la matriz $\mathbf{A}(t)$ y el vector $b(t)$ definidos de la forma

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & -a_2/a_n & \cdots & -a_{n-1}/a_n \end{pmatrix},$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & g/a_n \end{pmatrix}^t$$

y tendremos que si

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{pmatrix}^t$$

es solución de

$$\phi'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \phi(t) + b(t),$$

entonces $f = \varphi_1$ es solución de (4.15) y recíprocamente si f es solución de (4.15), entonces

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ \vdots \\ f^{(n-1}(t) \end{pmatrix}$$

es solución de $\phi'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \phi(t) + b(t)$.

Definición. Llamaremos *Wronskiano* de

$$f_1, \ldots, f_n \colon I \to \mathbb{K},$$

a la función

$$\mathcal{W}[f_1, \ldots, f_n](t) = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1} & f_2^{(n-1} & \cdots & f_n^{(n-1} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.10.1 Demostrar que el conjunto de las soluciones de la ecuación diferencial

$$a_n(t) f^{(n}(t) + \cdots + a_1(t) f'(t) + a_0(t) f(t) = 0,$$

—que denotaremos $\Lambda f = 0$—, forman un espacio vectorial de dimensión n.

Ejercicio 4.10.2 Dadas $f_1, \ldots, f_n \colon I \to \mathbb{K}$, demostrar que son equivalentes:

a) Las f_i son una base de soluciones de $\Lambda f = 0$.

b) Las

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \\ \vdots \\ f_1^{(n-1} \end{pmatrix}, \ldots, \phi_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_n' \\ \vdots \\ f_n^{(n-1} \end{pmatrix}$$

son una base de soluciones de $\phi' = \mathbf{A}\phi$.

c) $\Lambda f_i = 0$ y $\mathcal{W}[f_1, \ldots, f_n](t) \neq 0$ para algún $t \in I$.

Ejercicio 4.10.3 Consideremos la ecuación diferencial

$$x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

a) Demuestra que $f = x$, $g = x\log x$ y $h = x^2$ son soluciones en $x > 0$, independientes.

b) Encuentra la solución que satisface las condiciones $y(1) = 3$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = 1$.

Nota 4.31 Por otra parte dadas

$$f_1, \dots, f_n \colon I \to \mathbb{K},$$

con derivadas continuas hasta el orden n, verificando

$$\mathcal{W}[f_1, \dots, f_n](t) \neq 0,$$

en I, existe una única ecuación lineal (4.15), con $a_n = 1$,

$$(-1)^n \frac{\mathcal{W}[f, f_1, \dots, f_n](t)}{\mathcal{W}[f_1, \dots, f_n](t)} = 0,$$

que tiene a las f_i por solución.

4.10.1. Ecuación de Euler.

La *ecuación diferencial de Euler* es

$$a_0x^n y^{(n} + a_1x^{n-1}y^{(n-1} + \cdots + a_{n-1}xy' + a_ny = F(x),$$

La cual puede ser reducida —en $x > 0$—, a una lineal con coeficientes constantes, haciendo el cambio

$$x = \mathrm{e}^t,$$

pues se demuestra fácilmente que

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad \frac{dy^{(j-1}}{dt} = y^{(j}x,$$

así como

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y'x,\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dy'}{dt}x + y'x = y''x^2 + y'x,\\
\frac{d^3y}{dt^3} &= y'''x^3 + 3y''x^2 + y'x,
\end{aligned}$$

y por inducción se tiene que para cada $m \in \mathbf{N}$ existen $n_1, \ldots, n_m \in \mathbf{N}$ tales que $n_1 = n_m = 1$ y

$$\frac{d^m y}{dt^m} = y^{(m} x^m + n_{m-1} y^{(m-1} x^{m-1} + \cdots + n_2 y'' x^2 + y' x.$$

Ejercicio 4.10.4 Resolver las ecuaciones

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' + 6xy' = 0,$$
$$(2x+3)^2 y'' + (2x+3)y' + 4y = 1.$$

4.11. EDL de orden 2

Ejercicio 4.11.1 Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

a) Demostrar que si f y g son soluciones suyas, la función Wronskiano

$$\mathbf{W}(x) = \mathcal{W}[f,g](x) = fg' - gf',$$

satisface la ecuación

$$\mathbf{W}'(x) + p(x)\mathbf{W}(x) = 0,$$

y por tanto vale

$$\mathbf{W}(x) = \mathbf{W}(a) \cdot \mathrm{e}^{-\int_a^x p(t)dt}.$$

b) Demostrar que si f es una solución suya —que no se anula en un subintervalo $\mathbf{J}$ de I—, podemos encontrar otra solución g de la ecuación en $\mathbf{J}$, resolviendo la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} g(x) + \mathbf{W}(a) \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\int_a^x p(t)dt}}{f(x)}.$$

Resolver esta ecuación y dar la expresión general de las soluciones de la ecuación inicial.

Ejercicio 4.11.2 Dada la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + xy' - y = 0,$$

demostrar que $f(x) = x$ es una solución, encontrar otra solución g independiente de f y la solución general.

Ejercicio 4.11.3 Sean f y g soluciones independientes de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

demostrar que f tiene un cero entre cada dos ceros de g.

Teorema de comparación de Sturm 4.32 *Sean f y g soluciones no triviales respectivamente de*

$$y'' + p(x)y = 0\ , \qquad y'' + q(x)y = 0,$$

donde $p(x) \geq q(x)$, entonces:

a) f tiene un cero entre cada dos ceros de g, a menos que $p(x) = q(x)$ y f sea un múltiplo constante de g.

b) Si $q \leq 0$, entonces ninguna solución g de la segunda ecuación puede tener mas de un cero.

Demostración. a) Sea $g(x_1) = g(x_2) = 0$ y supongamos que f y g son positivas en (x_1, x_2) —si no es así las cambiamos de signo, pues $-f$ y $-g$ también son solución—, entonces

$$\mathcal{W}[f,g](x_1) = f(x_1)g'(x_1) \geq 0, \qquad \mathcal{W}[f,g](x_2) = f(x_2)g'(x_2) \leq 0,$$

pero esto es contradictorio con la hipótesis, ya que

$$\mathcal{W}[f,g]'(x) = f(x)g''(x) - g(x)f''(x) = (p(x) - q(x))g(x)f(x) \geq 0,$$

en (x_1, x_2), a menos que en este intervalo $p = q$ y

$$\mathcal{W}[f,g](x) = 0,$$

lo cual implica que f y g son soluciones de la misma ecuación y son dependientes, es decir que existe una constante k tal que $f = kg$.

b) Basta tomar $p = 0$ en (a) y observar que $f = 1$ es solución de la primera ecuación. ∎

Definición. Diremos que las funciones r, p y q definen una *ecuación diferencial*

$$r(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{4.16}$$

exacta si existen funciones $a(x)$ y $b(x)$ tales que para cualquier función f se verifica que

$$rf'' + pf' + qf = [af' + bf]',$$

y diremos que *admiten un factor integrante* $v(x)$ si vr, vp y vq definen una ecuación diferencial exacta. A menudo diremos, abusando del lenguaje, que es la ecuación la que es exacta o admite un factor integrante.

Nota 4.33 Observemos que si encontramos un factor integrante para (4.16), entonces resolverla se reduce a encontrar las soluciones de la ecuación lineal de primer orden

$$a(x)f' + b(x)f = cte,$$

por otra parte (4.16) es exacta si y sólo si

$$\begin{aligned} rf'' + pf' + qf = [af' + bf]' = af'' + (a' + b)f' + b'f \\ \Leftrightarrow \qquad r = a, \quad p = a' + b, \quad q = b' \\ \Leftrightarrow \qquad r'' - p' + q = 0, \end{aligned}$$

de donde se sigue que v es un factor integrante de (4.16) si y sólo si

$$\begin{aligned} (vr)'' - (vp)' + (vq) = 0 \qquad \Leftrightarrow \\ rv'' + (2r' - p)v' + (r'' - p' + q)v = 0, \end{aligned} \tag{4.17}$$

ecuación a la que llamaremos *adjunta* de (4.16). Obsérvese que una ecuación y la adjunta de su adjunta coinciden.

Así vemos que si encontramos una solución v de (4.17) podemos encontrar una solución de

$$r(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),$$

procediendo del siguiente modo: Primero buscamos $a(x)$ y $b(x)$ tales que

$$vry'' + vpy' + vqy = (ay' + by)',$$

y después resolvemos la ecuación lineal

$$a(x)y' + b(x)y = \int_{x_0}^{x} v(t)g(t)dt + A,$$

para cada constante A.

4.11.1. Ecuación de Riccati.

La *ecuación diferencial de Riccati* es

$$y' + R(x)y^2 + P(x)y + Q(x) = 0. \tag{4.18}$$

Consideremos el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$y'(x) = a_1(x)y + b_1(x)z,$$
$$z'(x) = a_2(x)y + b_2(x)z,$$

correspondiente al campo tangente

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + (a_1(x)y + b_1(x)z)\frac{\partial}{\partial y} + (a_2(x)y + b_2(x)z)\frac{\partial}{\partial z},$$

el cual es invariante por el campo

$$y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},$$

y por tanto se simplifica en el sistema de coordenadas

$$(x,\, u = z/y,\ \ v = \log y)$$
$$D = \frac{\partial}{\partial x} + (a_1 + b_1 u)\frac{\partial}{\partial v} - (-b_2u^2 + (b_1 - a_2)u + a_1)\frac{\partial}{\partial u},$$

con lo cual nuestra sistema lineal de ecuaciones diferenciales se transforma en el sistema formado por

$$v' = (a_1 + b_1u),$$
$$u' = -b_2u^2 + (b_1 - a_2)u + a_1,$$

si ahora encontramos una solución u de la segunda, que es de RICCATI, entonces podemos resolver la primera con una simple integración y por tanto habremos resuelto nuestra ecuación lineal inicial, pues su solución sería

$$y(x) = \mathrm{e}^{v(x)}\ , \qquad z(x) = u(x)\,\mathrm{e}^{v(x)}\ .$$

Ejercicio 4.11.4 Consideremos la ecuación de Riccati (4.18). Demuéstrese que:

a) Si y_1 es una solución, entonces y es cualquier otra solución si y sólo si $y - y_1 = 1/u$ donde u es solución de la ecuación diferencial lineal

$$u' = (2Ry_1 + P)u + R.$$

b) Si y_1 e y_2 son soluciones, entonces cualquier otra solución y satisface, para una constante c

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} = \mathrm{e}^{\int R(y_1 - y_2)} \cdot c.$$

c) Si y_1, y_2, y_3 son soluciones, entonces cualquier otra solución y está definida para cada constante k por

$$\frac{y-y_2}{y-y_1}\cdot\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=k.$$

Nota 4.34 Observemos que el resultado anterior nos dice que las soluciones de la ecuación de Riccati no son un espacio vectorial, como ocurre con las ecuaciones diferenciales lineales, sino que forman *una recta proyectiva*.

Además el grupo uniparamétrico τ_t asociado al campo

$$D=\frac{\partial}{\partial x}-(R(x)y^2+P(x)y+Q(x))\frac{\partial}{\partial y},$$

que lleva la recta $x=x_0$ en la recta $x=t+x_0$ —pues $Dx=1$ lo cual implica que para cada $p\in\mathbb{R}^2$, $1=Dx[\tau_p(t)]=(x\circ\tau_p)'(t)$ y por tanto $x[\tau_t(p)]=t+x_0$, para $x_0=x(p)$— define una proyectividad entre esas dos rectas, pues el apartado (c) del ejercicio anterior nos dice que las gráficas $(x,y(x))$, de las soluciones de la ecuación de Riccati, se intersecan con cualquier par de rectas $x=x_0$ y $x=t+x_0$ en pares de puntos correspondientes por una proyectividad y si y es la solución de la ecuación de Riccati que satisface $y(x_0)=y_0$, entonces para $p=(x_0,y_0)$ se tiene que

$$\tau_t[x_0,y(x_0)]=\tau_p(t)=(t+x_0,y(t+x_0)).$$

Por último vamos a dar la caracterización de la ecuación de Riccati en términos de su campo tangente asociado

$$D=\frac{\partial}{\partial x}+(R(x)y^2+P(x)y+Q(x))\frac{\partial}{\partial y}.$$

Es el único campo en $\mathcal{D}(I\times\mathbb{R})$ que verifica las siguientes propiedades:

a) $Dx=1$ para $x\colon I\times\mathbb{R}\to I$, $x(t,y)=t$.

b) D lleva funciones polinómicas en fibras de x en funciones polinómicas en fibras de x, es decir conserva las funciones de la forma

$$f_n(x)y^n+\cdots+f_1(x)y+f_0(x),$$

donde las f_i son funciones arbitrarias de x.

c) D se extiende a un campo tangente de $\mathcal{D}(I\times\mathbb{P}_1)$, donde $\mathbb{P}_1$ es la recta proyectiva (es decir, el espacio de las rectas del plano que pasan por el origen, $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$).

Sea

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + [f_n(x)y^n + \cdots + f_1(x)y + f_0(x)]\frac{\partial}{\partial y},$$

un campo satisfaciendo esas propiedades y consideremos la coordenada z en $\mathbb{P}_1 - \{0\}$, que coincide con $z = 1/y$ en el abierto

$$\mathbb{P}_1 - \{0, \infty\} = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Entonces Dz está definida en (x, ∞) y podemos calcularla pues en $I \times (\mathbb{P}_1 - \{0, \infty\})$

$$\begin{aligned} Dz = D\left(\frac{1}{y}\right) &= -\frac{Dy}{y^2} \\ &= -\frac{f_n(x)y^n + \cdots + f_1(x)y + f_0(x)}{y^2} \\ &= -\frac{f_n(x)}{z^{n-2}} - \cdots - \frac{f_3(x)}{z} - f_2(x) - f_1(x)z - f_0(x)z^2, \end{aligned}$$

y por continuidad tenemos que en el punto (x, ∞), en el que $z = 0$, podemos extender nuestro campo D si y sólo si

$$f_3 = \cdots = f_n = 0.$$

4.12. Otros métodos para resolver EDL

4.12.1. Método de las potencias.

Dada una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes polinomios o funciones analíticas

$$a_n(x)f^{(n} + \cdots + a_1(x)f' + a_0(x)f = g(x),$$

donde g es polinómica o analítica, buscamos una posible solución analítica en un cierto intervalo que contiene al origen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$
$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}, \dots$$

y se sigue que de ser f solución, sus coeficientes quedarían determinados al igualar los coeficientes de los dos desarrollos a los que da lugar la ecuación.

Ejercicio 4.12.1 Determinar las soluciones en series de potencias de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$y'' + xy' = -y\ , \quad (x^2+1)y'' + xy' + xy = 0\ , \quad y'' + 8xy' - 4y = 0.$$

4.12.2. Método de Frobenius de las potencias.

Hay ecuaciones como

$$y'' + \frac{2}{x} y' - y = 0,$$

que no se pueden resolver por el método anterior, pues sus coeficientes no son funciones analíticas en el origen, sin embargo observamos que tiene la solución

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x} = \frac{1}{x}(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots),$$

esto nos sugiere, y en esto consiste el MÉTODO DE FROBENIUS, que tratemos de buscar soluciones de la forma

$$f(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r},$$

con $r < 0$. Para un estudio mas detallado, remitimos al lector a la p.213 del DERRICK–GROSSMAN.

4.12.3. Método de la transformada de Laplace.

Definición. Llamamos *transformada de Laplace* de una función f continua de variable real a la función de variable compleja

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tz}\, f(t)dt.$$

Se demuestra que si existen $c, a \geq 0$ tales que, $|f(t)| < c\,\mathrm{e}^{at}$, para $t \geq 0$, entonces $\mathcal{L}(f)$ existe para todo $z \in \mathbb{C}$, con $\mathrm{Re}\, z > a$. Además en este caso recuperamos la función f mediante la *Fórmula de inversión*, para $F = \mathcal{L}(f)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(u+iv)\, \mathrm{e}^{(u+iv)t}\, dv,$$

siendo $u > a$ arbitrario. (Ver Kolmogorov–Fomin, p.492 ó Apostol, p.476).

Las propiedades más importantes para nosotros de esta transformada son, la linealidad:

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g),$$

y que transforma la derivación en una relación algebraica, es decir integrando por partes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f')(z) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tz}\, f'(t)dt \\ &= z\mathcal{L}(f)(z) - f(0), \\ \mathcal{L}(f'')(z) &= z\mathcal{L}(f')(z) - f'(0) \\ &= z^2\mathcal{L}(f)(z) - zf(0) - f'(0). \end{aligned} \tag{4.19}$$

y por inducción

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(z) = z^n\mathcal{L}(f)(z) - z^{n-1}f(0) - \cdots - zf^{(n-2}(0) - f^{(n-1}(0).$$

Esto nos permite utilizar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes,

$$a_n f^{(n} + \cdots + a_1 f' + a_0 f = g,$$

pues aplicando la transformada a ambos miembros,

$$a_n\mathcal{L}(f^{(n)}) + \cdots + a_1\mathcal{L}(f') + a_0\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g),$$

se obtienen polinomios en z, p de grado n y q de grado $\leq n-1$, donde

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,$$

tales que

$$q(z) + p(z)\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g),$$

por tanto basta con buscar la función f cuya transformada es

$$\mathcal{L}(f) = \frac{\mathcal{L}(g) - q}{p}. \tag{4.20}$$

Las propiedades de la transformada de Laplace permiten, mediante cálculos directos, encontrar la transformada de ciertas funciones elementales como las trigonométricas, exponenciales, potenciales y sus combinaciones lineales. Esto permite resolver nuestro problema si nuestra expresión (4.20), es alguna de ellas.

Remitimos al lector interesado al Derrick–Grossman, p.251 y ss. No obstante veamos un ejemplo.

Ejercicio 4.12.2 Resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 4y = 0,$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$, por el método de la transformada de Laplace.

4.13. La Ecuación de Bessel

La **Ecuación de Bessel** de orden p es

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0. \tag{4.21}$$

Vamos a utilizar el Método de Frobenius para resolverla.

Supongamos que hay una solución del tipo

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{r+n},$$

entonces como

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)c_n x^{r+n-1},$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)c_n x^{r+n-2},$$

tendremos que sustituyendo en la ecuación y definiendo $c_{-2} = c_{-1} = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)c_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)c_n x^{r+n} +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{r+n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 c_n x^{r+n} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}[(r+n)(r+n-1)c_n + (r+n)c_n + c_{n-2} - p^2 c_n]x^{r+n} = 0,$$

lo cual implica que para cada $n = 0, 1, \ldots$

$$(r+n)^2 c_n + c_{n-2} - p^2 c_n = 0,$$

y para $n = 0$

$$(r^2 - p^2)c_0 = -c_{-2} = 0,$$

por tanto $r = \pm p$. Vamos a analizar el caso $r = p$. En este caso tenemos que

$$(r^2 + 2rn + n^2)c_n + c_{n-2} = p^2 c_n \quad \Rightarrow$$
$$n(2p+n)c_n = -c_{n-2} \quad \Rightarrow$$
$$c_n = \frac{-c_{n-2}}{n(2p+n)},$$

de donde, al ser $c_{-1} = 0$, se sigue que todos los coeficientes impares son nulos y los coeficientes pares

$$c_{2n} = \frac{-c_{2n-2}}{2n(2p+2n)} = k_{2n}c_{2(n-1)} = \prod_{i=1}^{n} k_{2i}c_0,$$

para

$$k_{2i} = \frac{(-1)}{2i(2p+2i)} = \frac{(-1)}{4i(p+i)},$$

por tanto

$$c_{2n} = \prod_{i=1}^{n} k_{2i} c_0 = \frac{(-1)^n}{4^n n!(p+1)\cdots(p+n)} c_0.$$

Ahora introduciendo la *función Factorial* [1]

$$\Pi\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \Pi(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-x} x^t \, dm,$$

que es de clase infinito y verifica: $\Pi(0) = 1$, $\Pi(-1/2) = \sqrt{\pi}$ y que $\Pi(t) = t \cdot \Pi(t-1)$ para $t > -1$; por tanto $\Pi(n) = n!$, para $n \in \mathbb{N}$ (ver Apuntes de Teoría de la medida), tenemos que

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n \Pi(p)}{4^n n! \Pi(p+n)} c_0,$$

y nuestra función es

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{p+2n} = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Pi(p)}{4^n n! \Pi(p+n)} x^{p+2n},$$

y para el caso en que $p = m \in \mathbb{N}$ y tomando $c_0 = 1/2^m m!$, tenemos la **Función de Bessel** de *orden* $p = m$

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \frac{1}{2^m m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n m!}{2^{2n} n!(m+n)!} x^{m+2n} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \end{aligned}$$

que están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$, como se puede demostrar utilizando el criterio del cociente.

Las funciones de Bessel verifican la siguiente fórmula de recursión

$$x J_{n+1} = 2n J_n - x J_{n-1},$$

[1] Parece ser (ver Ivorra, pág.283) que el descubridor de esta función fue Euler, siendo de Gauss la notación Π para ella y que es de Legendre la *función Gamma*, $\Gamma(t) = \Pi(t-1)$,

$$\Gamma\colon (0,\infty) \to (0,\infty), \qquad \Gamma(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-x} x^{t-1} \, dm,$$

que es la mas habitual.

y las siguientes igualdades

$$(x^n J_n)' = x^n J_{n-1},$$
$$(x^{-n} J_n)' = -x^{-n} J_{n+1}.$$

Haciendo el cambio $u = y\sqrt{x}$, tenemos que y es solución de la ecuación de Bessel (4.21) si y sólo si u es solución de

$$y''(x) + \left(1 + \frac{1-4p^2}{4x^2}\right) y(x) = 0,$$

y comparándola con $y'' + y = 0$, tenemos por el **Teorema de comparación de Sturm** (4.32), pág.241, que en el caso

$$\frac{1}{2} < p \text{ ó } p < -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1-4p^2}{4x^2} < 1,$$

las funciones $A \operatorname{sen} x + B \cos x = C \cos(x + \alpha)$ —que son las soluciones de $y'' + y = 0$—, tienen una raíz entre cada dos raíces de u —y por tanto de la función J_p—, esto implica que en cada intervalo de longitud π, J_p tiene a lo sumo una raíz.

Por otra parte para

$$-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1-4p^2}{4x^2} > 1,$$

y el **Teorema de comparación** nos asegura que J_p tiene una raíz entre cada dos raíces de las funciones $A \operatorname{sen} x + B \cos x = A' \cos(\alpha + x)$, es decir en cada intervalo de longitud π.

Por último

$$p = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1-4p^2}{4x^2} = 1,$$

y se tiene que $J_{1/2}(x) = A \operatorname{sen} x + B \cos x$, por lo que tiene las raíces a distancia exactamente π. Ahora como $J_0' = -J_1$, tendremos que J_0 tiene una colección numerable de raíces, pues al ser $p = 1 > 1/2$, J_1 tiene a lo sumo una raíz en cada intervalo de longitud π. Denotaremos las raíces positivas de J_0, ordenadas de forma creciente por α_n, pues al ser J_0 par, las negativas son $-\alpha_n$.

Esto a su vez implica que $J_1 = -J_0'$ también tiene una colección numerable de raíces, pues J_0' se anula en cada intervalo (α_n, α_{n+1}). Y con la fórmula de recursión se demuestra que todas las J_n tienen una colección numerable de raíces.

Consideremos para cada n la función

$$y_n(x) = J_0(\alpha_n x),$$

la cual es solución de la ecuación

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \alpha_n^2 y = 0,$$

y son ortogonales para el producto interior

$$< f, g >= \int_0^1 x f g dx,$$

pues, para $n \neq m$, y_n e y_m satisfacen

$$\begin{aligned}
(\alpha_n^2 - \alpha_m^2)\int_0^1 x y_n y_m dx &= -\int_0^1 x y_n \alpha_m^2 y_m dx + \int_0^1 x\alpha_n^2 y_n y_m dx \\
&= \int_0^1 y_n(xy_m'' + y_m')dx - \int_0^1 (xy_n'' + y_n')y_m dx \\
&= \int_0^1 y_n(xy_m')'dx - \int_0^1 (xy_n')'y_m dx \\
&= \int_0^1 y_n(xy_m')'dx + \int_0^1 y_n' x y_m' dx - \\
&\quad - \int_0^1 x y_n' y_m' dx - \int_0^1 (xy_n')' y_m dx = \\
&= \int_0^1 (xy_m' y_n)' dx - \int_0^1 (xy_n' y_m)' dx \\
&= y_m'(1)y_n(1) - y_n'(1)y_m(1) = 0,
\end{aligned}$$

para mas propiedades de estas funciones remitimos al lector interesado al libro de Watson.

4.14. Algunas EDL de la Física

En esta lección proponemos algunos problemas extraídos del mundo cotidiano, que se plantean en términos de ecuaciones diferenciales

lineales. Para ello usaremos los conceptos que habitualmente aparecen en los libros elementales de física, y los aplicaremos para resolver problemas "reales". En particular estudiaremos problemas relacionados con la electricidad, y es por ello que hacemos una breve introducción sobre los fenómenos eléctricos antes de meternos en el problema de los circuitos eléctricos. Volveremos sobre el tema de la electricidad en la lección 10.4, pág.772 y siguientes en las que estudiaremos la Electrostática, en el contexto de la Ecuación de LaPlace y en el Tema 12, sobre Electromagnetismo, pág.919, en el contexto de la Ecuación de ondas.

4.14.1. Problemas de mezclas.

Sean **A** y **B** dos tanques interconectados, en los que tenemos siempre 100 litros de una mezcla de agua con sal (salmuera), en el proceso que describimos a continuación:

En el tanque **A** introducimos regularmente 6 litros de agua por minuto. De **A** extraemos regularmente 8 litros de salmuera por minuto que introducimos en **B**. De **B** extraemos regularmente 2 litros de salmuera por minuto que enviamos a **A** y extraemos también regularmente 6 litros de salmuera por minuto, que se envían a un embalse.

Si llamamos $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ respectivamente, a la cantidad de sal que hay en **A**, en **B** y en el embalse en el instante t, entonces se tiene el sistema

$$x_1'(t) = \frac{2x_2(t) - 8x_1(t)}{100}, \quad x_2'(t) = \frac{8x_1(t) - 8x_2(t)}{100}, \quad x_3'(t) = \frac{6x_2(t)}{100},$$

lo cual se sigue considerando que la cantidad de sal en el instante $t + \epsilon$, para un $\epsilon > 0$ pequeño, en cualquiera de los tres lugares es la que había en el instante t más la que entró durante el tiempo ϵ y menos la que salió durante ese tiempo y se hace tender $\epsilon \to 0$.

4.14.2. Problemas de muelles.

Consideremos una masa m unida a un muelle que se resiste tanto al estiramiento como a la compresión, sobre una superficie horizontal que no produce fricción en la masa cuando esta se desliza por ella y supongamos que la masa se mueve en los dos sentidos de una única dirección sobre

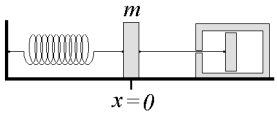


Figura 4.1. Muelle

un eje —que llamaremos x— y que en la posición de equilibrio la masa está en la posición $x = 0$. Denotaremos con $x(t)$ la posición de la masa sobre este eje, en el instante t.

De acuerdo con la LEY DE HOOKE si la masa se desplaza una distancia x de su posición de equilibrio, entonces el muelle ejerce sobre ella una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento, es decir que existe una constante $k > 0$, tal que

$$F_r = -kx.$$

Si suponemos que la masa está sujeta a un amortiguador, el cual produce una fuerza sobre la masa que es proporcional ($c > 0$) a la velocidad de esta, tendremos que sobre la masa actúa también una fuerza

$$F_a = -cx'.$$

Y si además tenemos un fuerza externa F que actúa sobre la masa tendremos que la fuerza total que actúa sobre ella es

$$F + F_r + F_a,$$

y que si denotamos con $x(t)$ la posición de la masa en el eje x, en el instante t, tendremos por la LEY DE NEWTON que

$$mx'' = F + F_r + F_a,$$

es decir

$$mx'' + cx' + kx = F.$$

Una situación aparentemente distinta surge cuando consideramos el muelle colgando de un techo, en ese caso habría que considerar también otra fuerza, la de gravedad y la ecuación sería

$$mx'' + cx' + kx - mg = F.$$

Ahora bien el muelle se estirará una cantidad $s > 0$ por la acción de la gravedad sobre la masa y como en esa posición el muelle está en equilibrio se sigue que

$$mg = -F_r = ks,$$

y por tanto para $x = s + f$, se tiene que f es solución de

$$mx'' + cx' + kx = F.$$

Observemos que además $f = 0$ sigue siendo la posición de equilibrio de la masa.

a) Movimiento libre sin amortiguación. Es el caso en que

$$m, k > 0, \quad \text{y} \quad c = F = 0,$$

por tanto x satisface la ecuación

$$x'' + \omega_0^2 x = 0, \qquad \text{para} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

en cuyo caso las soluciones son de la forma

$$x(t) = A \cdot \cos[\omega_0 t] + B \operatorname{sen}[\omega_0 t],$$

y tomando $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\cos(\alpha) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A}{C}\ , \quad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{-B}{C},$$

entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= C[\cos(\alpha)\cos(\omega_0 t) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\omega_0 t)] \\ &= C \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha), \end{aligned}$$

el cual es un movimiento periódico, con

$$\textbf{amplitud} = C, \quad \textbf{periodo} = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \textbf{frecuencia} = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

b) Movimiento libre amortiguado. Es el correspondiente a

$$m, c, k > 0 \quad \text{y} \quad F = 0, \quad \text{es decir} \qquad mx'' + cx' + kx = 0.$$

En este caso tenemos que las raíces del polinomio

$$\lambda^2 + 2p\lambda + \omega_0^2,$$

para $p = c/2m$ son

$$\lambda_1 = -p + \sqrt{p^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -p - \sqrt{p^2 - \omega_0^2},$$

y las soluciones dependen del signo de

$$p^2 - \omega_0^2 = \frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{c^2 - 4km}{4m^2},$$

es decir de $c^2 - 4km$.

Primer Caso: $c^2 > 4km$, es decir $p > \omega_0$. En este caso λ_1 y λ_2 son reales distintas y negativas, por tanto la solución es de la forma

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t},$$

para la que $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, presentando a lo sumo una oscilación.

Segundo caso: $c^2 = 4km$ es decir, $p = \omega_0$. Ahora $\lambda_1 = \lambda_2 = -p$ y las soluciones son

$$x(t) = (A + Bt)e^{-pt},$$

que como antes tiende a la posición de equilibrio cuando $t \to \infty$ con a lo sumo una oscilación.

Tercer caso: $c^2 < 4km$ es decir, $p < \omega_0$. En este caso λ_1 y λ_2 son complejas conjugadas

$$\lambda_1 = -p + i\omega_1 \ , \quad \lambda_2 = -p - i\omega_1, \quad \text{para} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2},$$

y las soluciones son

$$\begin{aligned} x(t) &= A\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{t\lambda_1}) + B\,\mathrm{Im}\,(\mathrm{e}^{t\lambda_1}), \\ &= \mathrm{e}^{-pt}[A\,\cos(t\omega_1) + B\,\mathrm{sen}(t\omega_1)], \\ &= C\ \mathrm{e}^{-pt}\cos(t\omega_1 + \alpha), \end{aligned}$$

para $A, B \in \mathbb{R}$, $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ y

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{-B}{C}\ , \qquad \cos\alpha = \frac{A}{C},$$

las cuales representan oscilaciones, amortiguadas exponencialmente, en torno al punto de equilibrio. Aunque no es un movimiento periódico tiene frecuencia —número de oscilaciones por segundo—, que vale

$$\frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - (c/2m)^2}}{2\pi},$$

que es menor que la frecuencia del mismo muelle sin el amortiguador

$$\frac{\omega_0}{2\pi},$$

y tiende a la posición de equilibrio cuando $t \to \infty$.

c) Movimiento forzado sin amortiguación. Es el correspondiente a

$$m, k > 0, \quad F \neq 0, \quad c = 0.$$

Nosotros estudiaremos el caso particular en que

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t),$$

por tanto nuestra ecuación es de la forma

$$mx'' + kx = F_0 \cos(\omega t),$$

cuyas soluciones son suma de una solución particular de esta ecuación y una de la ecuación homogénea, que ya sabemos es de la forma

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t) = C \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

para

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Para encontrar una solución particular distinguiremos dos casos:

Primer caso: Que $\omega \neq \omega_0$.
Buscamos $a \in \mathbb{R}$, para el que

$$z(t) = a \cdot \cos(\omega t),$$

sea solución de nuestra ecuación. Entonces

$$z' = -a \cdot \omega \operatorname{sen}(\omega t),$$
$$z'' = -a \cdot \omega^2 \cos(\omega t),$$

por tanto

$$-ma\omega^2 \cos(\omega t) + ka \cos(\omega t) = F_0 \cos(\omega t),$$

por lo tanto

$$-ma\omega^2 + ka = F_0 \qquad \Rightarrow \qquad a = a(\omega) = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

y nuestra solución general es

$$\begin{aligned} x(t) &= y(t) + z(t), \\ &= A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t) + a(\omega) \cdot \cos(\omega t), \\ &= C \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha) + a(\omega) \cdot \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Antes de analizar el otro caso abrimos un paréntesis para comentar dos curiosos fenómenos.

El fenómeno de la pulsación. Consideremos la solución particular $x(0) = 2a(\omega)$, $x'(0) = 0$. En este caso tenemos que $A = a(\omega)$ y $B = 0$ y aplicando que

$$2\cos\beta\cos\gamma = \cos(\beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma),$$

la solución es

$$\begin{aligned} x(t) &= a(\omega)[\cos(\omega t) + \cos(\omega_0 t)], \\ &= 2a(\omega)\cos\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \cdot \cos\frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}, \\ &= A(t)\cos\frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}, \end{aligned}$$

donde

$$A(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2},$$

y si $\omega_0 \simeq \omega$ y por tanto $\omega_0 - \omega$ es pequeño en comparación con $\omega_0 + \omega$, tendremos que en $x(t)$, $A(t)$ varía lentamente en comparación con

$$\cos\frac{(\omega_0 + \omega)t}{2},$$

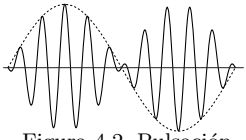


Figura 4.2. Pulsación

que varía rápidamente. Una oscilación como esta con una amplitud periódica que varía lentamente, presenta el *fenómeno de la pulsación*, que consiste en que el movimiento oscilatorio aparece y desaparece con una frecuencia de

$$\frac{\omega_0 - \omega}{2\pi}.$$

Nota 4.35 Cuando una onda sonora alcanza un oído, produce en el tímpano una variación de la presión del aire. Si

$$y_1(t) = A \cdot \cos(\omega_1 t) \ , \qquad y_2(t) = A \cdot \cos(\omega_2 t),$$

son las contribuciones respectivas a la presión que se produce en el tímpano por dos diapasones, entonces la presión total que el tímpano recibe viene dada por la superposición de ambas

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A \cdot [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)].$$

Si las frecuencias $f_1 = \omega_1/2\pi$ y $f_2 = \omega_2/2\pi$ de los diapasones difieren en mas de un 6 % de su valor promedio, entonces el oído distingue las dos notas con una pequeña diferencia de tono y "prefiere" la ecuación anterior.

Sin embargo si la diferencia es mas pequeña, entonces el oído no reconoce las dos notas y oye un sonido con una frecuencia media $f = (f_1 + f_2)/2$ cuya amplitud varía, no distinguiendo valores positivos de negativos en $y(t)$ (los físicos dicen que el oído actúa como un detector de *ley cuadrática*), aunque oye cómo el sonido desaparece y vuelve a aparecer a intervalos regulares de frecuencia $(\omega_1 - \omega_2)/2\pi$, llamada la *frecuencia de pulsación*. En este caso el oído "prefiere" la ecuación (aunque sea la misma)

$$y(t) = \left[2A \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right] \cdot \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}.$$

Remitimos al lector interesado en esto a la página 31 del tomo 3 del *Berkeley Phisics Course. Ed.Reverte.*

El fenómeno de la resonancia. Nuestra solución general es para $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = y(t) + z(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha) + a(\omega) \cdot \cos(\omega t),$$

para la cual se tiene otro curioso fenómeno. Cuanto mas próxima sea la frecuencia de la fuerza externa a la frecuencia natural del muelle, es decir ω de ω_0, mayores serán las oscilaciones de nuestra solución, pues estarán dominadas por $a(\omega)$ que se aproxima a ∞. En el caso en que $\omega = \omega_0$, decimos que la fuerza externa entra en *resonancia* con nuestro oscilador. A continuación analizamos este caso.

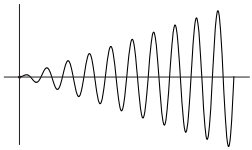


Figura 4.3. Resonancia

Segundo caso: Que $\omega = \omega_0$.

En este caso nuestra ecuación es

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_0 t),$$

y para encontrar una solución particular, como sabemos que no puede ser de la forma $a\cos(\omega_0 t)$, tendremos que buscar entre las de otro tipo mas general. Lo intentamos con $z(t) = at\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$ y hay solución para $a = F_0/2m\omega_0$, por lo que las soluciones son de la forma

$$x(t) = y(t) + z(t) = C\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t\,\mathrm{sen}(\omega_0 t),$$

y las oscilaciones se hacen cada vez mayores debido a que $z(t)$ tiene oscilaciones que crecen linealmente con el tiempo.

Este es el caso por ejemplo de un coche parado al que empujamos hacia abajo y arriba en un vaivén que va al mismo ritmo que el coche, en ese caso el coche sube y baja cada vez mas. También es el caso de un niño que está columpiándose y se ayuda a sí mismo —u otro le empuja— para balancearse mas. Para que sea efectivo el empujón debe estar en resonancia con la frecuencia natural del columpio (con el niño sentado).

En la práctica cualquier sistema mecánico con poca amortiguación puede ser destruido debido a vibraciones externas, si estas están en resonancia con el sistema. Por ejemplo hay cantantes de opera que han roto una copa de cristal al cantar, porque el sonido tenía la frecuencia natural de la copa. En 1831 en Broughton (Inglaterra), una columna de soldados que pasaba por un puente marcando el paso, hizo que este se desplomara, probablemente porque el ritmo de sus pisadas entró en resonancia con alguna de las frecuencias naturales de la estructura del puente. Por eso actualmente se tiene la costumbre de romper el ritmo cuando se cruza un puente.

Por esta razón una de las cosas mas importantes en el diseño de estructuras, es encontrar sus frecuencias naturales y eliminarlas o cambiarlas en función del uso que vaya a tener esa estructura, para que sea difícil entrar en resonancia con ellas.

d) Movimiento forzado con amortiguación. Corresponde a

$$m, k, c > 0, \quad F \neq 0,$$

nosotros estudiaremos el caso particular en que $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ por tanto nuestra ecuación es de la forma

$$mx'' + cx' + kx = F_0\cos(\omega t),$$

la cual tiene una solución general $x = y + z$, donde y es la solución general de la homogénea, que hemos estudiado en **b)**, y que dependía de la relación entre c y $\sqrt{4km}$. En cualquier caso $y(t) \to 0$, cuando $t \to \infty$ y por tanto el comportamiento de x con el tiempo, depende del de la solución particular z. Busquemos entonces esta solución particular intentándolo con

$$z(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t),$$

haciendo cuentas vemos que la solución es de la forma

$$z(t) = \frac{\omega_0^2 F_0}{k\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2}}\cos(\omega t + \alpha),$$

por tanto si nuestro muelle tiene amortiguación $c > 0$, las oscilaciones están acotadas por

$$g(\omega) = \frac{\omega_0^2 F_0}{k\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2}},$$

y la fuerza externa entra en resonancia con el sistema, cuando ω hace máxima a $g(\omega)$. Es fácil demostrar que este valor se alcanza en

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2},$$

siempre que $\omega_0^2 \geq 2p^2$, en cuyo caso la frecuencia de resonancia es

$$\frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{(k/m) - (c^2/2m^2}}{2\pi},$$

en caso contrario ($\omega_0^2 < 2p^2$), no existe frecuencia de resonancia.

Para un análisis de esta frecuencia de resonancia, que no siempre existe, remitimos al lector interesado a la página 207 del libro de Ross, S.L.

e) Movimiento de dos muelles. Por último vamos a considerar el problema del movimiento de dos muelles unidos:

Sobre una superficie horizontal y lisa tenemos dos masas m_1 y m_2 unidas con sendos muelles —de un punto fijo P a m_1 y de m_1 a m_2—, de tal forma que los centros de gravedad de las masas y P están en línea recta horizontal.

Sean k_1 y k_2, respectivamente, las constantes de los muelles.

Representemos con $x_1(t)$ el desplazamiento de m_1, respecto de su posición de equilibrio, en el instante t, y con $x_2(t)$ lo mismo pero de m_2.

En estas condiciones se plantea el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \\ m_2 x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

4.14.3. Problemas de circuitos eléctricos.

Una propiedad fundamental de la carga eléctrica es su existencia en dos variedades que por tradición se llaman positiva y negativa y que están caracterizadas por el hecho de atraerse las de distinta clase y repelerse las de la misma. Otra propiedad fundamental de la carga eléctrica es que se puede medir y sorprendentemente aparece únicamente en cantidades múltiplos de una determinada carga, a la que se llama electrón (**e**), el cual tiene carga negativa. Otras partículas elementales como el protón ó el positrón son positivas pero tienen la misma carga que el electrón. La unidad habitual para la carga eléctrica es el *culombio* que es aproximadamente $6,3 \times 10^{18}\mathbf{e}$. Nuestro universo parece una mezcla equilibrada de cargas eléctricas positivas y negativas y esto nos lleva a otra propiedad fundamental de la carga eléctrica, que suele enunciarse como Ley de la conservación de la carga:

"la carga total —suma de la positiva y la negativa—, de un sistema aislado —en el que la materia no puede atravesar sus límites—, es constante".

Cuando un alambre de cobre se mantiene aislado, sus electrones libres se desplazan por entre los átomos, sin salirse del material, pero si conectamos ese alambre a los polos de una batería, los electrones libres se desplazan hacia el polo positivo, "atraídos por una fuerza" que depende de la batería, que se llama *fuerza electromotriz*, que se mide en *voltios* (**V**) que denotaremos por E y que representa la cantidad de energía eléctrica por unidad de carga. Esta fuerza provoca el desplazamiento de los electrones, los cuales llevan una carga que denotaremos con Q, que se mide en *coulombios* (**C**). A la variación de carga por unidad de tiempo, $I = Q'$, en este desplazamiento, se llama *corriente eléctrica* y se mide en *amperios* (**A**).

Por un *dipolo* entenderemos un mecanismo eléctrico con dos polos (a) y (b). Por uno de los cuales llega la corriente y por el otro sale. En general

denotaremos un dipolo con (ab). Los dipolos que aquí consideramos son: *baterías, resistencias, inductancias* y *condensadores.*

Por un *circuito eléctrico* entenderemos una serie de dipolos unidos por sus polos, a los que llamaremos nudos del circuito. Puede ser simple si en cada nudo concurren dos dipolos, o compuesto en caso contrario.

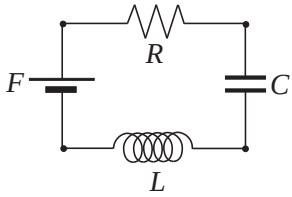


Figura 4.4. Circuito eléctrico

Durante el funcionamiento del circuito eléctrico circula una corriente eléctrica que pasa por todos los dipolos, producida por una fuerza electromotriz. El estado eléctrico de cada dipolo (ab) queda caracterizado en cada instante t por dos cantidades:

i.- La intensidad de corriente $I_{ab} = Q'_{ab}$ *que va del polo a al b.*
ii.- La caída de tensión (ó de voltaje) E_{ab}.

Si la corriente va de a hacia b, entonces I_{ab} es positiva, en caso contrario es negativa. Por su parte la caída de tensión está dada por $V_a(t) - V_b(t)$, la *diferencia de los potenciales* correspondientes a los polos a y b. Por tanto se tiene que

$$I_{ab} = -I_{ba} \ , \qquad E_{ab} = -E_{ba}.$$

Caídas de tensión e intensidad de corriente están relacionadas dependiendo del tipo de dipolo del que se trate:

Baterías.- Son dipolos que generan la fuerza electromotriz E y por tanto la corriente eléctrica que circula. Su caída de tensión es $-E$.

Resistencias.- Son dipolos que se oponen a la corriente y disipan energía en forma de calor. Existe una constante R, que se mide en *Ohmios* ($\mathbf{\Omega}$), de tal manera que la caída de tensión verifica la llamada Ley de Ohm

$$E(t) = RI(t).$$

Inductancias.- Son dipolos que se oponen a cualquier cambio en la corriente. Para ellos existe una constante L, que se mide en *Henris* (**H**), de tal manera que

$$E(t) = LI'(t).$$

En el caso de que dos inductancias $1 = (ab)$ y $2 = (cd)$ estén próximas, aunque no formen parte del mismo circuito, existe un coeficiente de

inducción M, tal que en vez de la ecuación anterior se tiene el siguiente sistema

$$E_1(t) = L_1 I_1'(t) + M I_2'(t),$$
$$E_2(t) = M I_1' + L_2 I_2'(t).$$

Condensadores.- Son dipolos que acumulan carga, al hacerlo se resisten al flujo de carga produciendo una caída de tensión proporcional a la carga

$$Q(t) = cE(t),$$

donde c es una constante que se mide en *Faradays* ($\mathbf{F}$).

A parte de estas relaciones se tiene que en un circuito eléctrico son válidas las dos leyes siguientes, llamadas:

Primera Ley de Kirchhoff.- *La suma de caídas de voltaje alrededor de cada circuito cerrado es cero.*

Es decir si en un circuito tenemos dipolos (a_i, a_{i+1}), para $i = 1, \ldots, n$, y $a_n = a_1$, entonces

$$E_{12} + E_{23} + \cdots + E_{n1} = 0,$$

lo cual es una consecuencia de ser la caída de tensión una diferencia de potencial.

Segunda Ley de Kirchhoff.- *La suma de las corrientes que entran en cualquier nodo del circuito es cero.*

Es decir que si en un circuito tenemos dipolos (a_i, a_0), para $i = 1, \ldots, n$, es decir con un nudo a_0 común, entonces

$$I_{10} = I_{02} + \cdots + I_{0n},$$

lo cual significa que la corriente que llega a un nudo es igual a la que sale.

Ejercicio 4.14.1 Consideremos un circuito con una fuente de alimentación que genera una fuerza electromotriz constante de $E = 1000$ voltios, una resistencia de $R = 100\mathbf{\Omega}$, una inductancia de $L = 1\mathbf{H}$ y un condensador de $C = 10^{-4}\mathbf{F}$. Suponiendo que en el condensador la carga y la intensidad de corriente fuesen nulas en el instante 0, hallar la intensidad de corriente en todo momento.

4.14.4. Las leyes de Kepler.

Consideremos una partícula de masa m en el plano con coordenadas (x, y), cuya posición viene determinada por

$$X(t) = r(t)e_1(t),$$

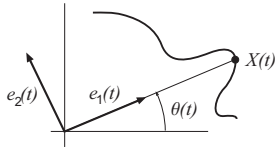


Figura 4.5. Partícula en movimiento

donde $e_1(t) = (\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t))$ y $\theta(t)$ es el ángulo (respecto del semieje $x > 0$), en el que se encuentra la partícula. Si definimos

$$e_2(t) = (-\operatorname{sen}\theta(t), \cos\theta(t)),$$

tendremos que e_1 y e_2 son ortogonales en todo instante y satisfacen las relaciones

$$e_1' = \theta' e_2 \ , \quad e_2' = -\theta' e_1.$$

La velocidad de la partícula m en cada instante t vendrá dada por

$$V(t) = X'(t) = r'(t)e_1(t) + r(t)\theta'(t)e_2(t),$$

y su aceleración por

$$\begin{aligned} A(t) &= V'(t) = X''(t), \\ &= [r'' - r(\theta')^2]e_1 + [2r'\theta' + r\theta'']e_2. \end{aligned}$$

Sea ahora $F = f_1 e_1 + f_2 e_2$ la fuerza que actúa sobre la partícula m, entonces por la *segunda ley de Newton* tendremos que $F = mA$, es decir

$$\begin{aligned} m[r'' - r(\theta')^2] &= f_1, \\ m[2r'\theta' + r\theta''] &= f_2. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Supongamos ahora que en el origen del plano hay otra partícula, que esta es la única que ejerce una fuerza sobre m y que esta fuerza tiene la dirección del segmento que las une. En tal caso tendremos que $f_2 = 0$ y por tanto

$$\begin{aligned} 2r'\theta' + r\theta'' = 0, \quad &\Rightarrow \quad 2rr'\theta' + r^2\theta'' = 0, \\ &\Rightarrow \quad [r^2\theta']' = 0 \\ &\Rightarrow \quad r^2\theta' = w, (=\text{cte.}) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Supongamos que $w > 0$, en tal caso θ es creciente y establece un difeomorfismo entre el tiempo y el ángulo que forma la partícula con el eje x en ese tiempo. Sea $a(t)$ el área recorrida por m desde $X(0)$ hasta $X(t)$, vista desde el origen, es decir

$$a(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\theta(t)} \rho^2(\theta)d\theta, \tag{4.24}$$

donde $\rho \circ \theta = r$, entonces se tiene por (4.23) que

$$a'(t) = \frac{1}{2}r^2\theta' = \frac{w}{2},$$

y se sigue que

$$a(t_1) - a(t_0) = \frac{w}{2}(t_1 - t_0), \tag{4.25}$$

Segunda ley de Kepler.- *"El radio vector del sol a un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales".*

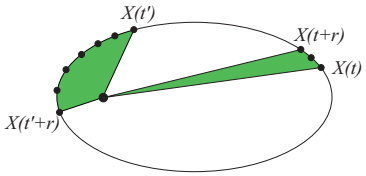


Figura 4.6. Segunda Ley de Kepler

Si ahora suponemos de acuerdo con la *ley de la gravedad de Newton*, que

$$F = -\frac{GMm}{r^2}e_1,$$

tendremos por (4.22) que para $k = GM$

$$r'' - r\theta'^2 = -\frac{k}{r^2}, \tag{4.26}$$

Definamos ahora $z = 1/r$, entonces por (4.23)

$$r' = \frac{dr}{dt} = -\frac{dz}{dt}\frac{1}{z^2} = -\frac{dz}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\frac{1}{z^2} = -w\frac{dz}{d\theta},$$
$$r'' = \frac{dr'}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -w\frac{d^2z}{d\theta^2}\theta' = -w^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2},$$

por lo que (4.26) queda de la forma

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{w^2},$$

que es lineal y cuya solución es

$$z = B_1 \operatorname{sen}\theta + B_2\cos\theta + \frac{k}{w^2},$$
$$= B\cos(\theta + \alpha) + \frac{k}{w^2},$$

donde $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$, $B_1/B = -\operatorname{sen}\alpha$ y $B_2/B = \cos\alpha$.

Ahora si giramos el plano para que $\alpha = 0$, tendremos que para $A = w^2/k$ y $e = Bw^2/k$

$$r = \rho(\theta) = \frac{A}{1 + e\cos\theta},$$

que es la ecuación polar de una cónica, la cual es una elipse una hipérbola ó una parábola según sea $e < 1$, $e > 1$ ó $e = 1$. Así, como los planetas se mantienen en el sistema solar —basta observar que el planeta vuelve a una posición dada después de un tiempo, que es el año del planeta—, se tiene la:

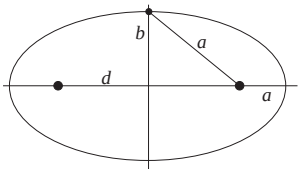


Figura 4.7. 1ª Ley de Kepler

Primera ley de Kepler.- *"Las órbitas de los planetas son elipses y el sol está en uno de sus focos".*

Se puede ver sin dificultad (ver la pag.131 del Simmons y nosotros lo veremos más adelante en la pág.**??**), que la excentricidad vale

$$e = \sqrt{1 + \frac{2w^2}{k^2}E},$$

donde E es la energía total del sistema, que es constante a lo largo de la órbita (ver la pág.404 y siguientes) —esto es el principio de la

conservación de la energía—, y por tanto la órbita de m es una elipse una parábola ó una hipérbola, según sea la energía negativa, nula ó positiva.

Consideremos ahora el caso en que la órbita es una elipse de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{(ver Fig.4.7)}$$

En tal caso como

$$\rho(0)=\frac{A}{1+e}\ , \qquad \rho(\pi)=\frac{A}{1-e},$$

tendremos que

$$a=\frac{\rho(\pi)+\rho(0)}{2}=\frac{A}{1-e^2},$$
$$d=\frac{\rho(\pi)-\rho(0)}{2}=\frac{Ae}{1-e^2}=ae,$$

por lo que

$$1-e^2=1-\frac{d^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

y por tanto

$$a=\frac{Aa^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad b^2=Aa.$$

De aquí se sigue que si T es el tiempo que m tarda en dar una vuelta a lo largo de su órbita, entonces como el área de la elipse es πab se sigue de (4.25) que

$$\pi ab=\frac{wT}{2} \quad \Rightarrow \quad T^2=\frac{4\pi^2Aa^3}{w^2}=\frac{4\pi^2}{k}a^3,$$

y puesto que $k=GM$, tendremos la

Tercera ley de Kepler.- *"Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias".*

Ejercicio 4.14.2 Demostrar que las tres leyes de Kepler, implican que m es atraída hacia el sol con una fuerza cuya magnitud es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre m y el sol. [2]

[2]Este fue el descubrimiento fundamental de Newton, porque a partir de él propuso su ley de la gravedad e investigó sus consecuencias.

Ejercicio 4.14.3 Demostrar que la velocidad V de un planeta en cualquier punto de su órbita está dada, en módulo, por

$$v^2 = k\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Ejercicio 4.14.4 Supongamos que la tierra explota en fragmentos que salen disparados a la misma velocidad (con respecto al sol) en diferentes direcciones y en órbitas propias. Demostrar que todos los fragmentos —sin contar los fragmentos que van hacia el sol— se reunirán posteriormente en el mismo punto si la velocidad no es muy alta. Calcular esa velocidad a partir de la cual todos los fragmentos se van para siempre...

4.15. Ejercicios resueltos

Ejercicio 4.6.2.- a) Demostrar que

$$\det[\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}] = \mathrm{e}^{t(\operatorname{traz}\mathbf{A})}.$$

b) Calcular el volumen en el que se transforma el cubo definido por 0 y los vectores de la base

$$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),$$

por el flujo del sistema lineal

$$\phi' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & a & 10 \\ 8 & 0 & -a \end{pmatrix} \cdot \phi,$$

en el instante $t = 2$.

c) La divergencia de un campo $D = \sum f_i \partial_i$ es

$$\operatorname{div} D = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Demostrar el **Teorema de Liouville** para campos lineales:

"*La velocidad de dilatación de un volumen B por el flujo X_t de un campo D en el instante* 0*, es la integral de la divergencia de D en el volumen*".

Y demostrar que si la $\operatorname{div} D = 0$ entonces el flujo conserva volúmenes.

Indicación.- c) La medida de *Lebesgue* m es la única medida definida en los borelianos del espacio, que es invariante por traslaciones, en el sentido de que cualquier otra es de la forma $\mu = cm$, para $c \geq 0$. Si nosotros tenemos una transformación lineal $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, entonces podemos definir la medida en los borelianos de este espacio $\mu(B) = m[F(B)]$, la cual es invariante por traslaciones, por tanto existe $c \geq 0$ tal que para todo boreliano B, $m[F(B)] = cm(B)$. En particular para Q el cubo unidad tendremos que $m(Q) = 1$ y $m[F(Q)] = \det(F) = c$, por lo que para todo B

$$m[F(B)] = \det(F)m(B),$$

y si la ecuación que define D es $\phi' = \mathbf{A}\phi$, entonces

$$\operatorname{div}(D) = \operatorname{traz}(\mathbf{A}),$$

y cada boreliano B se transforma —por la acción del grupo— en un boreliano con volumen

$$V(t) = m[X_t(B)] = \det(X_t) \cdot m(B) = \det(\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}) \cdot m(B) = \mathrm{e}^{t \operatorname{traz}\mathbf{A}} \cdot m(B)$$

y $V'(0) = \operatorname{traz}(\mathbf{A})m(B)$. ∎

Nota 4.36 En general el **teorema de Liouville** se sigue de que

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{X_t(B)} \omega = \int_B X_t^* \omega \\ V'(0) &= \lim \int_B \frac{X_t\omega - \omega}{t} = \int_B D^L\omega \\ &= \int_B \operatorname{div}(D)\omega. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.11.1.- Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

a) Demostrar que si f y g son soluciones suyas, la función Wronskiano

$$\mathbf{W}(x) = \mathcal{W}[f,g](x) = fg' - gf',$$

satisface la ecuación

$$\mathbf{W}'(x) + p(x)\mathbf{W}(x) = 0,$$

y por tanto vale

$$\mathbf{W}(x) = \mathbf{W}(a)\cdot \mathrm{e}^{-\int_a^x p(t)dt}.$$

b) Demostrar que si f es una solución suya —que no se anula en un subintervalo $\mathbf{J}$ de I—, podemos encontrar otra solución g de la ecuación en $\mathbf{J}$, resolviendo la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}g(x) + \mathbf{W}(a)\cdot \frac{\mathrm{e}^{-\int_a^x p(t)dt}}{f(x)}.$$

Resolver esta ecuación y dar la expresión general de las soluciones de la ecuación inicial.

Indicación.- La solución general es

$$Af(x) + Bf(x)\int_a^x \frac{dt}{f^2(t)\exp(\int_a^t p(s)ds)}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 4.11.3.- Sean f y g soluciones independientes de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

demostrar que f tiene un cero entre cada dos ceros de g.

Indicación.- Utilícese que $\mathcal{W}[f,g]$ no se anula en ningún punto y por tanto es constante en signo.

Ejercicio 4.11.4.- Consideremos la ecuación de Riccati $y' + R(x)y^2 + P(x)y + Q(x) = 0$. Demuéstrese que:

a) Si y_1 es una solución, entonces y es cualquier otra solución si y sólo si $y - y_1 = 1/u$ donde u es solución de la ecuación diferencial lineal

$$u' = (2Ry_1 + P)u + R.$$

b) Si y_1 e y_2 son soluciones, entonces cualquier otra solución y satisface, para una constante c

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} = \mathrm{e}^{\int R(y_1 - y_2)} \cdot c.$$

c) Si y_1, y_2, y_3 son soluciones, entonces cualquier otra solución y está definida para cada constante k por

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} \cdot \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = k.$$

Solución.- b) Si y_1 e y_2 son soluciones, entonces por (a) cualquier otra solución y define $u_1 = 1/(y - y_1)$ y $u_2 = 1/(y - y_2)$ soluciones respectivamente de,

$$u_1' = (2Ry_1 + P)u_1 + R\ , \qquad u_2' = (2Ry_2 + P)u_2 + R,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}\left(\frac{u_1}{u_2}\right)' &= \frac{u_1'u_2 - u_1u_2'}{u_2^2} \\ &= \frac{(2Ry_1 + P)u_1u_2 + Ru_2 - (2Ry_2 + P)u_1u_2 - Ru_1}{u_2^2} \\ &= 2R(y_1 - y_2)\frac{u_1}{u_2} + R\frac{u_1 - u_2}{u_2^2} = R(y_1 - y_2)\frac{u_1}{u_2},\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} = \frac{u_1}{u_2} = \mathrm{e}^{\int R(y_1 - y_2)} \cdot A. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 4.12.1.- Determinar las soluciones en series de potencias de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$y'' + xy' = -y\ , \quad (x^2 + 1)y'' + xy' + xy = 0\ , \quad y'' + 8xy' - 4y = 0.$$

Solución.- Ver las páginas $208 - 210$ del Derrick–Grossman. $\blacksquare$

Ejercicio 4.12.2.- Resolver la ecuación diferencial $y'' - 4y = 0$, con las condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$, por el método de la transformada de Laplace.

Solución.- Como en general se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f')(z) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tz} f'(t)dt = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0) \\ \mathcal{L}(f'')(z) &= z\mathcal{L}(f')(z) - f'(0) = z^2\mathcal{L}(f)(z) - zf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

en este caso tendremos que

$$4\mathcal{L}(y)(z) = [z^2\mathcal{L}(y)(z) - zy(0) - y'(0)]$$
$$\mathcal{L}(y)(z) = \frac{z+2}{z^2-4} = \frac{1}{z-2},$$

siendo esta la transformada de e^{2t}. Ahora se comprueba que esta es solución de nuestra ecuación. ∎

4.16. Bibliografía y comentarios

Los libros consultados en la elaboración de este tema han sido:

Apostol, T.M.: "*Análisis matemático*". Ed. Reverté, 1972.

Arnold, V.I.: "*Equations differentielles ordinaires*". Ed. Mir, Moscou, 1974.

Birkhoff, Garret and Rota, Gian–Carlo: "*Ordinary differential equations*". John Wiley and Sons, 1978.

Coddington and Levinson: "*Theory of ordinary Differential Equations*". McGraw–Hill, 1955.

Crawford, F.S.Jr.: "*Ondas. Berkeley Phisics course. Vol.3*". Ed. Reverté. 1979.

Derrick, W.R. and Grossman, S.J.: "*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*". Fondo Educativo Interamericano, 1984.

Edwards, C.H.Jr. and Penney,D.E.: "*Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*". Prentice–Hall Hispanoamericana, 1986.

Flett: "*Differential analysis*", Cambridge Univ. Press, 1980.

Hartman, Ph.: "*Ordinary differential equations*". Ed. Birkhauser. 1982.

Hurewicz, W.: "*Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias*". Ediciones RIALP, 1966.

Muñoz Diaz, J.: "*Ecuaciones diferenciales (I)*". Ed. Univ. Salamanca, 1982.

Ross, S.L.: "*Ecuaciones diferenciales*". Ed. Interamericana. 1982.

Simmons, F.: "*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*". Ed. McGraw–Hill, 1977.

Smale, S. and Hirsch, M.W.: "*Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*". Alianza Univ., 1983.

Spiegel, M.R.: "*Ecuaciones diferenciales aplicadas*". Ed. Prentice Hall internacional, 1983.

Watson,G.N.: "*A treatise on the Theory of Bessel Functions*". Cambridge Univ. Press, 1944.

La *Ecuación de Bessel* (ver la pág.248) es una de las mas importantes de la física matemática. Daniel Bernoulli (*1700–1782*) —el mas distinguido matemático de la segunda generación de la célebre familia suiza—, fue el primero en estudiar funciones de Bessel particulares, en relación con el movimiento oscilatorio de una cadena colgante. El físico–matemático suizo, Leonhard Euler también se encontró con ellas estudiando el movimiento de una membrana tensa (nosotros la estudiaremos en este contexto en la pág.889). Mas tarde en *1817*, las usó el astrónomo alemán Friedrich Wilhelm Bessel (*1784–1846*), en el estudio del movimiento de tres cuerpos que se mueven por mutua atracción. Desde

entonces las **funciones de Bessel** se han encontrado al estudiar problemas de elasticidad, del movimiento de fluidos, de la teoría del potencial, de la difusión y propagación de ondas, etc. Remitimos al lector a la lección de la Ecuación de ondas bidimensional 11.2, pág.886.

El siguiente comentario está extraído de la página 292 del libro de EDWARDS–PENNEY:

" Las transformadas de Laplace tienen una interesante historia. La integral que define la **transformada de Laplace** probablemente haya aparecido primero en un trabajo de EULER. Se acostumbra en Matemáticas dar a una técnica o teorema el nombre de la siguiente persona después de EULER que lo haya descubierto (de no ser así, habría varios centenares de ejemplos diferentes que se llamarían "**Teorema de Euler**"). En este caso la siguiente persona fue el matemático francés PIERRE SIMON DE LAPLACE (*1749–1827*) que empleo tales integrales en sus trabajos sobre Teoría de la probabilidad. La técnica operacional que lleva su nombre para la resolución de ecuaciones diferenciales y que se basa en la **transformada de Laplace** no fue explotada por el matemático francés. De hecho, esta fue descubierta y popularizada por ingenieros prácticos (en particular por el ingeniero electricista inglés OLIVER HEAVISIDE (*1850–1925*)). Estas técnicas fueron exitosa y ampliamente aplicadas antes de que fueran justificadas rigurosamente y alrededor del comienzo del presente siglo su validez fue objeto de considerables controversias".

El siguiente comentario está extraído de la página 128 del F. SIMMONS:

" Cuando el astrónomo danés TYCHO BRAHE murió en *1601*, su ayudante JOHANNES KEPLER heredó numerosos datos en bruto sobre las posiciones de los planetas en diferentes épocas. KEPLER trabajó incansablemente con ese material durante 20 años y, al fin, logró extraer sus tres leyes, hermosas y simples, de los movimientos planetarios, que eran el clímax de miles de años de astronomía observacional pura".

Fin del Tema 4

Tema 5

Estabilidad

5.1. Introducción

Dado un campo tangente completo $D \in \mathcal{D}_k(U)$, en un abierto U de $\mathcal{E}$, sabemos que su flujo $X\colon \mathbb{R} \times U \to U$ es de clase k, lo cual implica que la solución X_p, pasando por un punto $p \in U$, dista poco de X_q —la que pasa por q—, siempre que p y q estén próximos y para valores del tiempo próximos a 0.

La cuestión que ahora nos ocupa es: ¿Bajo qué condiciones dos soluciones que en un instante determinado estuvieron "próximas", se mantienen "próximas" a lo largo del tiempo?.

En este tema estudiaremos este problema ciñéndonos particularmente a dos aspectos del mismo: El primero corresponde al estudio de las soluciones que pasan cerca de una solución constante en el tiempo, es decir de un punto singular del campo tangente. Es el caso del péndulo —estudiado en la pág.48—, en la posición $\theta = 0$, $z = 0$. El segundo corresponde al estudio de las soluciones que pasan cerca de una solución periódica, como ocurre con el péndulo para casi todos los puntos (θ, z).

5.2. Linealización en un punto singular

Sea U abierto de $\mathcal{E}$ en el que consideramos una base e_i y su sistema de coordenadas lineales asociado x_i.

Consideremos un campo tangente $D \in \mathcal{D}(U)$,

$$D = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

y sea $X\colon W_D \to U$ el grupo uniparamétrico de D. En estos términos se tiene que para cada $p \in \mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ y $t \in I(p)$

$$X_i(t,p) = p_i + \int_0^t f_i[X(s,p)]ds,$$

y por tanto

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t,p) = \delta_{ij} + \int_0^t \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}[X(s,p)]\frac{\partial X_k}{\partial x_j}(s,p)ds. \tag{5.1}$$

Definición. Diremos que $p \in U$ es un punto *singular, crítico o de equilibrio* del campo D si $D_p = 0$.

Si $p \in U$ es singular para D, tendremos que $X_t(p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por tanto podemos definir los automorfismos lineales

$$Y_t = X_{t*}\colon T_p(\mathcal{E}) \to T_p(\mathcal{E}).$$

Pero además Y_t es un grupo uniparamétrico de isomorfismos lineales lo cual nos permite dar la siguiente definición, recordando que todos los espacios tangentes están canónicamente identificados con $\mathcal{E}$.

Definición. Llamaremos *linealización* del campo D en el punto singular p al campo tangente lineal canónico que denotaremos

$$L \in \mathcal{D}(\mathcal{E}),$$

que tiene como grupo uniparamétrico a Y_t.

Veamos cómo están definidos los automorfismos

$$Y_t\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E},$$

en términos de las componentes del campo D.

Para cada vector $e_i \in \mathcal{E}$ de la base, tendremos que las componentes $c_{ij}(t)$ del vector

$$Y_t(e_j) = X_{t*}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big),$$

son

$$\begin{aligned} c_{ij}(t) &= X_{t*}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_p x_i = \frac{\partial x_i \circ X_t}{\partial x_j}(p) \\ &= \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t,p), \end{aligned}$$

y por tanto se sigue de la ecuación (5.1) que para la matriz

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\Big),$$

se tiene que

$$c'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj}(t),$$

lo cual implica que la matriz $\mathbf{\Phi}(t) = (c_{ij}(t))$ asociada a Y_t satisface

$$\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Phi}(t),$$

y por tanto

$$Y_t = \mathbf{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}.$$

Como consecuencia el campo linealización de D en p vale

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right] \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Definición. Sea p un punto singular de D, llamaremos *exponentes característicos* de D en p, a los autovalores de la aplicación lineal asociada a la linealización de D en p (ver el tema de sistemas lineales), es decir en términos de un sistema de coordenadas lineales x_i, a los autovalores de la matriz

$$\mathbf{A} = \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\Big).$$

Y diremos que p es *hiperbólico* si los exponentes característicos de D en p no tienen parte real nula.

Ejercicio 5.2.1 Calcular la linealización y los exponentes característicos del campo que define la ecuación del péndulo

$$\theta'(t) = z(t),$$
$$z'(t) = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta(t),$$

en el (0,0).

Ejercicio 5.2.2 Soltamos una bola en un cuenco con superficie dada por $z = (ax^2 + by^2)/2$. Encontrar la EDO que rige su movimiento (suponemos que la gravedad es el vector $g = (0, 0, -1)$, demostrar que el origen con velocidad nula es un punto singular de la ecuación y encontrar su linealización en ese punto.

5.3. Estabilidad de puntos singulares

Definición. Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ con grupo uniparamétrico X y $p \in U$ un punto singular de D. Diremos que p es *estable* —en el sentido de Liapunov—, si para cada entorno U_p de p en U, existe otro $V_p \subset U_p$, tal que para todo $q \in V_p$ se tiene

a) $[0, \infty) \subset I(q)$,
b) $X_q(t) \in U_p$ para todo $t \geq 0$.

en caso contrario diremos que p es *inestable*.

Diremos que p es *asintóticamente estable* si es estable y $X_q(t) \to p$, cuando $t \to \infty$, para todo $q \in V_p$.

Ejercicio 5.3.1 Demostrar que si p es un punto estable, entonces para todo entorno U_p de p en U, existe otro $W_p \subset U_p$, tal que para todo $q \in W_p$ se tiene $[0, \infty) \subset I(q)$ y $X_q(t) \in W_p$ para todo $t \geq 0$.

Ejercicio 5.3.2 ¿En cual de los siguientes campos el origen es estable?

$$-x_2\partial x_1 + x_1\partial x_2 + x_4\partial x_3 - x_3\partial x_4,$$
$$-x_2\partial x_1 + x_1\partial x_2 + (x_2 + x_4)\partial x_3 - x_3\partial x_4,$$
$$(x_1 + 2x_2)\partial x_1 + (2x_1 - 2x_2)\partial x_2.$$

Ejercicio 5.3.3 Demostrar que el origen es un punto estable del campo en coordenadas polares

$$\frac{\partial}{\partial\theta} + \rho\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}.$$

En esta lección vamos a dar un primer criterio, debido a LIAPUNOV y que ya hemos demostrado para campos tangentes lineales, para encontrar puntos singulares asintóticamente estables de campos tangentes. Pero antes necesitamos dar una definición y unos resultados previos.

Definición. Dada una aplicación lineal $\mathbf{A}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ en un espacio vectorial real $\mathcal{E}$, de dimensión finita, llamaremos *radio espectral de* $\mathbf{A}$ al máximo de los módulos de los autovalores de $\mathbf{A}$, es decir al número positivo

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda| : \exists x \in \mathcal{E} - \{0\},\ \mathbf{A}(x) = \lambda x\}.$$

En el resultado que enunciamos a continuación —que se demuestra en los cursos de álgebra lineal—, se da la forma canónica de una matriz real.

Teorema de Jordan 5.1 *Sea $\mathbf{A}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ una aplicación lineal en un espacio vectorial real $\mathcal{E}$, de dimensión n. Entonces existe una base respecto de la que la matriz de $\mathbf{A}$ es diagonal por cajas $\mathbf{A}_i$, para $i = 1, \ldots, r$, de orden m_i, que son de una de las formas*

$$(1)\quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} \mathbf{D} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & \mathbf{D} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

donde λ es un autovalor real y $\alpha + i\beta$ complejo de $\mathbf{A}$ y

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5.3.4 Sea $\mathbf{A}$ una matriz, de orden n, con todos los autovalores con parte real nula. Demostrar que el origen de $\mathbb{R}^n$ es un punto estable del campo definido por la ecuación $X' = \mathbf{A}X$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es semisimple —es decir las cajas en su forma canónica de Jordan son de orden 1 para los autovalores reales y de orden 2 para los complejos.

Ejercicio 5.3.5 Demostrar que el origen de $\mathbb{R}^n$ es un punto estable del campo definido por la ecuación $X' = \mathbf{A}X$ si y sólo si los autovalores λ de $\mathbf{A}$, tienen $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ y $\mathbf{A}$ se expresa en una base como una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix},$$

donde los autovalores de $\mathbf{A}_1$ tienen parte real negativa y $\mathbf{A}_2$ es semisimple.

Lema 5.2 *Sea $\mathbf{A}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ una aplicación lineal en un espacio vectorial real $\mathcal{E}$, de dimensión n. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe una base respecto de la que la matriz de $\mathbf{A}$ es diagonal por cajas $\mathbf{A}_i(\epsilon)$, para $i = 1, \ldots, r$, de orden m_i, que son de una de las formas*

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \epsilon & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon & \lambda \end{pmatrix}, \qquad (2) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{D} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \epsilon\mathbf{I} & \mathbf{D} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon\mathbf{I} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

donde λ es un autovalor real y $\alpha + i\beta$ complejo de $\mathbf{A}$ y

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración.- Aplicando el **Teorema de Jordan** existe una base $e_1, \ldots, e_n$ en $\mathcal{E}$, en la que $\mathbf{A}$ se representa por una matriz diagonal por cajas $\mathbf{A}_i$, para $i = 1, \ldots, r$, de orden m_i, que son de una de las formas descritas en dicho teorema.

Obviamente el subespacio $\mathcal{E}_1$ de $\mathcal{E}$, generado por $e_1, \ldots, e_{n_1}$, correspondiente a la caja $\mathbf{A}_1$, es invariante por $\mathbf{A}$, ídem para los $\mathcal{E}_i$ para $i = 1, \ldots, m$. Basta demostrar el resultado para cada $\mathcal{E}_i$, es decir podemos suponer que $\mathbf{A}$ consta de una sola caja.

Supongamos que $\mathbf{A}$ es del tipo (1), es decir $\lambda\mathbf{I} + \mathbf{Z}$ es la matriz de $\mathbf{A}$ en la base $e_1, \ldots, e_n$, para λ autovalor real de $\mathbf{A}$. Ahora para cada $\epsilon > 0$ consideremos la base

$$v_1 = e_1, \; v_2 = \frac{e_2}{\epsilon}, \; \ldots, \; v_n = \frac{e_n}{\epsilon^{n-1}}.$$

en la que $\mathbf{A}$ es $\lambda\mathbf{I} + \epsilon\mathbf{Z}$.

Supongamos ahora que $\mathbf{A}$ es de la forma (2) en la base $e_1, \ldots, e_n$, con $n = 2r$. Entonces basta considerar la nueva base para $k = 1, \ldots, r$

$$v_{2k-1} = \frac{e_{2k-1}}{\epsilon^{k-1}}, \quad v_{2k} = \frac{e_{2k}}{\epsilon^{k-1}},$$

y el resultado se sigue. ∎

Lema 5.3 *Sea* $\mathbf{A}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *una aplicación lineal en un espacio vectorial real* $\mathcal{E}$*, de dimensión* n*.*

a) Si para todo autovalor λ *de* $\mathbf{A}$ *es* $a < \operatorname{Re}\lambda < b$*, entonces existe un producto interior* $<,>$ *en* $\mathcal{E}$*, tal que para todo* $x \in \mathcal{E} - \{0\}$

$$a <x, x> < <\mathbf{A}(x), x> < b <x, x> .$$

b) Para cada $r > \rho(\mathbf{A})$*, existe un producto interior con una norma asociada* $\| \cdot \|$*, tal que*

$$\| \mathbf{A} \| = \text{máx}\{\| \mathbf{A}(x) \| : \| x \| = 1\} < r.$$

Demostración. a) En los términos anteriores $\mathbf{A}(\mathcal{E}_i) \subset \mathcal{E}_i$, por tanto si para cada $\mathcal{E}_i$ encontramos una base cuyo producto interior asociado —para el que la base es ortonormal—, satisface el resultado, todas las bases juntas formarán una base en $\mathcal{E}$ que define un producto interior que satisface el resultado. Pues en tal caso todo $x \in \mathcal{E}$ se puede expresar de modo único como $\sum x_i$, con los $x_i \in \mathcal{E}_i$ y por tanto siendo ortogonales y verificando

$$<x, x> = \sum_{i=1}^{m} <x_i, x_i> .$$

y el resultado se seguiría sin dificultad.

En definitiva podemos suponer que $\mathbf{A}$ consta de una sola caja.

Supongamos que $\mathbf{A}$ es del tipo (1), entonces se sigue del resultado anterior que para cada $\epsilon > 0$ existe una la base v_i en la que la matriz de $\mathbf{A}$ es $\lambda\mathbf{I} + \epsilon\mathbf{Z}$, donde Z es la matriz con 1's debajo de la diagonal principal y el resto 0's.

Si consideramos el producto interior correspondiente, $< v_i, v_j >= \delta_{ij}$, tendremos que para cada $x \in \mathcal{E}$ y $x(\epsilon)$ el vector columna de $\mathbb{R}^n$ de componentes las de x en la base v_i, se tiene

$$\begin{aligned} <x, x> &= x(\epsilon)^t x(\epsilon), \\ <\mathbf{A}(x), x> &= x(\epsilon)^t (\lambda\mathbf{I} + \epsilon\mathbf{Z})^t x(\epsilon), \end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{<\mathbf{A}(x), x>}{<x, x>} = \lambda + \epsilon \frac{<\mathbf{Z}(x), x>}{<x, x>}$$

y el resultado se sigue tomando ϵ suficientemente pequeño pues por la DESIGUALDAD DE CAUCHY–SCHWARZ

$$\left| \frac{< \mathbf{Z}(x), x >}{< x, x >} \right| \leq \frac{\| \mathbf{Z}(x) \|_2}{\| x \|_2} \leq \| \mathbf{Z} \|_2 = 1.$$

Si $\mathbf{A}$ es de la forma (2) el resultado se sigue de forma similar al anterior.

b) Como en el caso anterior basta hacer la demostración para el caso de que $\mathbf{A}$ esté formada por una única caja. Si es del tipo (1), entonces

$$<\mathbf{A}(x), \mathbf{A}(x)>= [\lambda_i^2 + f(\epsilon, x)] <x, x>,$$

donde $|f(\epsilon, x)| \leq k\epsilon$, para un $k > 0$. Y si es del tipo (2), entonces

$$\begin{aligned} <\mathbf{A}(x), \mathbf{A}(x)> &= x(\epsilon)^t[\mathbf{\Lambda} + \epsilon\mathbf{Z}_2]^t[\mathbf{\Lambda} + \epsilon\mathbf{Z}_2]x(\epsilon) = \\ &= [\alpha^2 + \beta^2 + F(\epsilon, x)] <x, x>, \end{aligned}$$

donde tenemos que $|F(\epsilon, x)| \leq k\epsilon$, para un $k > 0$ y

$$\mathbf{\Lambda} = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{Z} - \beta\mathbf{Z}^t, \quad \mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z}^{t2} = 0, \quad \mathbf{I} = \mathbf{Z}^t\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\mathbf{Z}^t,$$

y el resultado se sigue sin dificultad. ∎

Nota 5.4 La utilidad del resultado anterior queda de manifiesto en la siguiente interpretación geométrica del mismo: Consideremos un campo lineal

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right] \frac{\partial}{\partial x_i},$$

es decir tal que en cada punto $x \in \mathcal{E}$, las componentes de L_x son $\mathbf{A}x$, para $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

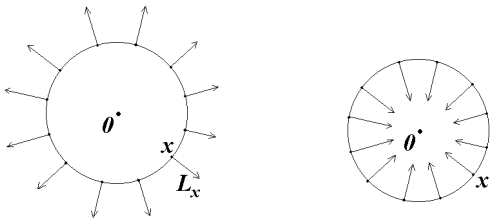


Figura 5.1. Casos $a > 0$ y $b < 0$

El resultado nos dice que existe una norma euclídea en $\mathcal{E}$, para la que si los autovalores de $\mathbf{A}$ tienen parte real positiva, es decir si $a > 0$, entonces el vector L_x (ver la Fig.5.1) apunta hacia fuera de la esfera

$$S = \{p \in \mathcal{E} : \| p \| = \| x \|\},$$

y si $b < 0$ entonces apunta hacia dentro de S, pues

$$0 < a < \frac{<\mathbf{A}(x), x>}{<x, x>} \quad \Rightarrow \quad 0 << L_x, x>,$$
$$\frac{<\mathbf{A}(x), x>}{<x, x>} < b < 0 \quad \Rightarrow \quad <L_x, x><0.$$

Esto explica desde un punto de vista geométrico el resultado visto en (4.22), pág.229, donde veíamos que si $b < 0$ entonces el 0 era un punto de equilibrio asintóticamente estable, de L. (Volveremos sobre esto en la lección de la clasificación topológica de los campos lineales.)

Esta idea es la que subyace en la demostración del resultado siguiente, en el que aplicaremos el argumento a la aproximación lineal del campo, es decir a su linealización.

Teorema 5.5 *Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ con un punto singular $p \in U$. Si sus exponentes característicos λ, verifican que $\mathrm{Re}\lambda < c < 0$, entonces existe una norma euclídea $\| \cdot \|_2$ y un entorno B_p, de p en U, tales que si $q \in B_p$, entonces para todo $t \geq 0$ se tiene que*

$$X_q(t) \in B_p \ , \quad \| X_q(t) - p \|_2 \leq \mathrm{e}^{tc} \| q - p \|_2.$$

Además para cualquier norma en $\mathcal{E}$, existe una constante $b > 0$ tal que

$$\| X_q(t) - p \| \leq b\, \mathrm{e}^{tc} \| q - p \| \ .$$

Demostración. Lo último es una simple consecuencia de ser todas las normas de un espacio vectorial finito–dimensional equivalentes.

Haciendo una traslación podemos considerar que $p = 0$.

Sea $D = \sum f_i \partial_i$, $f = (f_i) \colon U \to \mathbb{R}^n$ y

$$\mathbf{A} = \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)\Big).$$

Sea $k \in \mathbb{R}$ tal que para todo exponente característico λ de D en p sea $\mathrm{Re}\,(\lambda) < k < c$. Ahora por el lema anterior, existe un producto interior en $\mathbb{R}^n$, tal que

$$<Ax, x>< k\ <x, x> = k\ \|x\|^2 \ .$$

De la definición de derivada de f en 0, se sigue que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\| f(x) - Ax \|}{\| x \|} = 0,$$

y por la desigualdad de *Cauchy–Schwarz*,

$$-\|x\|\|y\| \leq <x, y> \leq \|x\|\|y\|,$$

se sigue que

$$\lim_{x\to 0} \frac{<f(x) - Ax, x>}{\| x \|^2} = 0.$$

Por tanto existe un $\delta > 0$ tal que $B_p = B[0, \delta] \subset U$, y para cada $x \in B_p$

$$\frac{<f(x), x>}{\| x \|^2} = \frac{<Ax, x>}{\| x \|^2} + \frac{<f(x) - Ax, x>}{\| x \|^2} < c. \tag{5.2}$$

Sea ahora $q \in B_p - \{p\}$ y $(\alpha, \beta) = I(q)$, entonces por la unicidad de solución, $X_q(t) \neq 0$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$ y por tanto es diferenciable la función

$$h(t) = \|X_q(t)\| = \sqrt{<X_q(t), X_q(t>)},$$

siendo por la ecuación (5.2), $h'(0) < 0$, pues

$$h'(t) = \frac{<X_q'(t), X_q(t>)}{\| X_q(t) \|} = \frac{<f[X_q(t)], X_q(t>)}{\| X_q(t) \|}, \tag{5.3}$$

por tanto existe $r > 0$ tal que para $0 \leq t \leq r$,

$$\|X_q(t)\| = h(t) \leq h(0) = \| q \|,$$

es decir $X_q(t) \in B_p$. Consideramos ahora

$$T = \sup\{r \in (0, \beta) : X_q(t) \in B_p, \forall t \in [0, r]\}.$$

Si $T < \beta$, entonces $X_q(t) \in B_p$ para todo $t \in [0, T]$ por ser B_p cerrado y X_q continua. Y tomando $z = X_q(T) \in B_p - \{p\}$ y repitiendo el argumento anterior existiría $\epsilon > 0$ tal que $X_z(t) = X_q(t + T) \in B_p$ para $0 \leq t \leq \epsilon$, en contra de la definición de T.

Por tanto $T = \beta$ y por ser B_p compacto $\beta = \infty$. Esto prueba la primera afirmación.

Ahora como $h(t) \neq 0$, tenemos como consecuencia de la ecuación (5.2) y (5.3) que

$$h'(t) \leq c \cdot h(t) \quad \Leftrightarrow \quad (\log h)'(t) \leq c,$$

e integrando entre 0 y t

$$\log h(t) \leq tc + \log h(0) \quad \Leftrightarrow \quad h(t) \leq \mathrm{e}^{tc}\, h(0). \quad \blacksquare$$

Corolario 5.6 *Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ con un punto singular $p \in U$. Si sus exponentes característicos λ, verifican que $\mathrm{Re}\lambda < 0$, entonces p es asintóticamente estable.*

Ejercicio 5.3.6 Considerar la ecuación del péndulo con rozamiento ($a > 0$)

$$\begin{aligned} x' &= v, \\ v' &= -av - \frac{g}{L} \operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

demostrar que el $(0, 0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Ejercicio 5.3.7 Demostrar que el $0 \in \mathbb{R}^2$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable del campo

$$(y + f_1)\frac{\partial}{\partial x} - (x + y + f_2)\frac{\partial}{\partial y},$$

para $F = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $F(0) = 0$ y su derivada en 0 es 0.

También se tiene el siguiente resultado que no demostraremos (ver la página 266 del Hirsch–Smale, aunque la demostración que aparece en el libro creo que es incorrecta).

Teorema 5.7 *Si $p \in U$ es un punto de equilibrio estable de $D \in \mathcal{D}(U)$, entonces ningún exponente característico de D en p, tiene parte real positiva.*

Como consecuencia se tiene el siguiente resultado.

Corolario 5.8 *Un punto singular hiperbólico es asintóticamente estable o inestable.*

5.4. Funciones de Liapunov

Hay otro medio ideado por LIAPUNOV (en su tesis doctoral de 1892), para saber si un punto singular es estable.

Si tenemos un campo lineal $L = \sum(\sum a_{ij}x_j)\partial_i$, es decir $L_x = \mathbf{A}x$, para $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y consideramos la norma euclídea que definimos en (5.3) de la pág.283, entonces la función

$$\ell(x) = <x, x>,$$

tiene las siguientes propiedades:

a) $\ell(0) = 0$, *y* $\ell(x) > 0$, *para* $x \neq 0$,

y si $\operatorname{Re}\lambda < b < 0$, para todo autovalor λ de $\mathbf{A}$, entonces

b) $L\ell < 0$,

pues como $X_t(q) = e^{t\mathbf{A}}q$, tendremos que

$$L\ell(q) = \lim_{t\to 0} \frac{<e^{t\mathbf{A}}q, e^{t\mathbf{A}}q> - <q, q>}{t} = 2 <\mathbf{A}q, q> \leq 2b <q, q>,$$

cosa que también podemos demostrar considerando una base ortonormal y su sistema de coordenadas lineales y_i correspondiente, pues en este sistema $\ell = \sum y_i^2$ y

$$L\ell(q) = 2\sum_{i=1}^{n} y_i(q)L_q y_i = 2 <L_q, q>= 2 <\mathbf{A}q, q> .$$

LIAPUNOV observó que para saber si un punto de equilibrio de un campo tangente era estable, bastaba con encontrar una función ℓ con esas propiedades.

Definición. Sea $p \in U$ un punto singular de $D \in \mathcal{D}(U)$. Llamaremos *función de Liapunov* de D en p, a cualquier función $\ell \in \mathcal{C}(U)$, tal que $\ell \in \mathcal{C}^1(U - \{p\})$, verificando las siguientes condiciones:

a) $\ell(p) = 0$ y $\ell(x) > 0$, para $x \neq p$.

b) $D\ell \leq 0$ en $U - \{p\}$.

Diremos que la función es *estricta* si en (b) es $D\ell < 0$.

Teorema 5.9 *Si existe una función de Liapunov de D en p, entonces p es estable y si es estricta entonces es asintóticamente estable.*

Demostración. Consideremos un entorno U_p de p en U y un $\epsilon > 0$ tal que $B[p,\epsilon] \subset U_p$ y sean

$$r = \min\{\ell(x) : \|x - p\| = \epsilon\},$$
$$V_p = \{x \in B(p,\epsilon) : \ell(x) < r\}.$$

Por (a) tenemos que $p \in V_p$, por tanto V_p es un abierto no vacío. Y por (b) tenemos que

$$(\ell \circ X_q)'(t) = D\ell[X_q(t)] \leq 0,$$

para cada $q \in U - \{p\}$, es decir que $\ell \circ X_q$ es decreciente. Esto implica que si $q \in V_p$ e $I(q) = (\alpha, \beta)$, entonces para $t \in [0, \beta)$,

$$\ell[X_q(t)] \leq \ell[X_q(0)] = \ell(q) < r \leq \ell(x), \qquad \text{para } \|x - p\| = \epsilon,$$

por lo tanto $X_q(t) \in V_p$, pues $X_q(t) \in B(p,\epsilon)$ ya que $X_q[0,\beta)$ es conexo, tiene puntos en la bola $B(p,\epsilon)$ y no puede atravesar la esfera de esta bola por la desigualdad anterior. Ahora por ser $B[p,\epsilon]$ compacta tendremos que $\beta = \infty$ y p es estable.

Supongamos ahora que $D\ell < 0$ en $U - \{p\}$, es decir $\ell \circ X_q$ es estrictamente decreciente. Por la compacidad de $B[p,\epsilon]$, basta demostrar que si $t_n \to \infty$ y $X_q(t_n) \to p'$, entonces $p' = p$.

Supongamos que $p' \neq p$ y consideremos la curva integral de p' —que no es constante pues $D_{p'} \neq 0$, ya que $D\ell < 0$—. Tendremos que para $s > 0$

$$\ell(p') = \ell[X_{p'}(0)] > \ell[X_{p'}(s)] = \ell[X_s(p')],$$

ahora bien $\ell \circ X_s$ es continua y existe un entorno de p', V, tal que para $x \in V$ se tiene

$$\ell(p') > \ell[X_s(x)] = \ell[X(s,x)],$$

y en particular para n grande, $x = X_q(t_n) \in V$ y

$$\ell(p') > \ell[X(s, X(t_n, q))] = \ell[X(s + t_n, q)] = \ell[X_q(s + t_n)]. \tag{5.4}$$

siendo así por otra parte, que para todo $t \in (0,\infty)$

$$\ell[X_q(t)] > \ell[X_q(t_n)],$$

para los $t_n > t$, y por la continuidad de ℓ,

$$\ell[X_q(t)] > \ell(p'),$$

para todo $t > 0$ lo cual contradice la ecuación (5.4). ∎

Ejercicio 5.4.1 Estudiar la estabilidad en el origen del campo

$$D = (-y - x^5)\frac{\partial}{\partial x} + (x - 2y^3)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Ejercicio 5.4.2 Consideremos en $\mathcal{E}$ un producto interior $<,>$ y sea D un campo gradiente, $D = \operatorname{grad} f$. Demostrar:

a) Un punto $x \in \mathcal{E}$ es singular para D si y sólo si $d_x f = 0$.

b) Si f tiene en x un máximo aislado, entonces x es un punto singular estable de D y si además es un punto singular aislado de D, es asintóticamente estable.

Por último podemos utilizar este tipo de funciones para detectar puntos de equilibrio inestables.

Teorema 5.10 *Sea $p \in U$ un punto singular de $D \in \mathcal{D}(U)$, y sea $\ell \in \mathcal{C}(U)$, $\ell \in \mathcal{C}^1(U - \{p\})$, tal que $\ell(p) = 0$ y $D\ell > 0$. Si existe una sucesión $p_n \to p$, tal que $\ell(p_n) > 0$, entonces p es inestable.*

Demostración. Tenemos que encontrar un entorno U_p de p, tal que para todo entorno V de p, hay un $q \in V$ para el que X_q deja en algún instante a U_p.

Sea $r > 0$, tal que $B[p, r] \subset U$ y sea

$$U_p = \{x \in B(p, r) : \ell(x) < 1\},$$

por la hipótesis sabemos que para cada entorno V de p existe un $q = p_n \in V$ tal que $\ell(q) > 0$. Vamos a ver que $X_q(t)$ sale de U_p para algún t. Podemos suponer que $X_q(t) \in B[p, r]$ para todo $t \in (0, \beta)$, con $I(q) = (\alpha, \beta)$, pues en caso contrario $X_q(t)$ deja a U_p en algún instante y ya habríamos terminado. Entonces $\beta = \infty$.

Ahora tenemos dos posibilidades:

Existe un $0 < \delta < r$, tal que para $0 \leq t < \infty$

$$X_q(t) \in K = \{x \in U : \delta \leq \|x - p\| \leq r\},$$

entonces como $p \notin K$, tendremos que

$$\lambda = \min\{D\ell(x) : x \in K\} > 0,$$

y para $t \in [0, \infty)$

$$\lambda \leq D\ell[X_q(t)] = (\ell \circ X_q)'(t) \quad \Rightarrow \quad t\lambda \leq \ell[X_q(t)] - \ell(q),$$

y para $t \geq 1/\lambda$, $\ell[X_q(t)] > 1$, por tanto $X_q(t) \notin U_p$.

Si no existe tal δ, existirá una sucesión $t_n \to \infty$, tal que $X_q(t_n) \to p$, pero como

$$\ell[X_q(t_n)] \geq \ell[X_q(0)] = \ell(q),$$

y $\ell[X_q(t_n)] \to \ell(p) = 0$, llegamos a un absurdo pues $\ell(q) > 0$. ∎

Ejercicio 5.4.3 Estudiar la estabilidad en el origen del campo

$$D = (-y + x^5)\frac{\partial}{\partial x} + (x + 2y^3)\frac{\partial}{\partial y}.$$

5.5. Aplicaciones

5.5.1. Sistemas tipo "depredador–presa".

El modelo matemático clásico para un problema tipo depredador–presa fue planteado inicialmente por VOLTERRA (1860–1940), en los años 20 para analizar las variaciones cíclicas que se observaban en las poblaciones de tiburones y los peces de los que se alimentaban en el mar Adriático.

En los modelos que a continuación consideramos denotaremos con $x(t)$ el número de presas y con $y(t)$ el de depredadores que hay en el instante de tiempo t.

Primer modelo.- Supongamos que el alimento de las presas es inagotable y que se reproducen regularmente en función del número de individuos. Por tanto en ausencia de depredadores las presas crecerían a una tasa natural

$$x'(t) = ax(t),$$

y en ausencia de presas, los depredadores decrecerían a una tasa natural

$$y'(t) = -cy(t),$$

sin embargo cuando ambas especies conviven, la población de presas decrece y la de depredadores aumenta en una proporción que depende del número de encuentros entre ambas especies. Supongamos que esta frecuencia de encuentros es proporcional a xy —si duplicamos una población se duplican los encuentros—, en estos términos tendríamos que las tasas de crecimiento (y de decrecimiento) de ambas poblaciones hay que modificarlas, obteniendo el sistema

$$\begin{aligned} x' &= ax - bxy, \\ y' &= -cy + exy, \end{aligned}$$

para $a, b, c, e > 0$. Ahora de estas ecuaciones sólo nos interesan las soluciones que están en el primer cuadrante

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, y \geq 0\},$$

pues son las únicas que tiene sentido interpretar en nuestro problema.

Los puntos de equilibrio de estas ecuaciones en C, son

$$p_1 = 0\ , \quad p_2 = \left(\frac{c}{e}, \frac{a}{b}\right),$$

de las cuales p_1 representa la desaparición de ambas especies, mientras que p_2 representa la coexistencia de ambas especies sin modificarse el número de sus individuos.

Estudiemos la estabilidad de p_1 y de p_2.

Las linealizaciones del sistema en p_1 y p_2 son respectivamente

$$X' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} X, \qquad X' = \begin{pmatrix} 0 & -bc/e \\ ea/b & 0 \end{pmatrix} X,$$

por tanto los exponentes característicos del sistema en p_1 son a y $-c$, por lo que se sigue que p_1 no es estable. Los de p_2 son imaginarios puros por lo que los resultados estudiados no nos dan información sobre su estabilidad. Sin embargo es fácil encontrar una integral primera del campo

$$\begin{aligned} D &= (ax - bxy)\frac{\partial}{\partial x} + (-cy + exy)\frac{\partial}{\partial y} = \\ &= x(a - by)\frac{\partial}{\partial x} + y(-c + ex)\frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

pues tiene una 1–forma incidente exacta

$$\frac{x(a-by)}{xy}dy + \frac{y(c-ex)}{xy}dx = \frac{a}{y}dy - bdy + \frac{c}{x}dx - edx$$
$$= d[a\log y - by + c\log x - ex] = dh.$$

Por tanto $Dh = 0$ y como $h(z) < h(p_2)$, para $z \neq p_2$, la función $\ell = h(p_2) - h$ es de LIAPUNOV, por lo que p_2 es estable. Veamos la desigualdad

$$\begin{aligned} h(z)-h(p_2) &= \\ &= a\log y - by + c\log x - ex - [a\log\frac{a}{b} - b\frac{a}{b} + c\log\frac{c}{e} - e\frac{c}{e}] \\ &= a[\log y - \log\frac{a}{b}] - by + a + c[\log x - \log\frac{c}{e}] - ex + c \\ &= a[\log\frac{yb}{a} - \frac{yb}{a} + 1] + c[\log\frac{xe}{c} - \frac{xe}{c} + 1] < 0, \end{aligned}$$

pues $\log x < x - 1$ para $x \neq 1$.

Segundo modelo.- Supongamos ahora que ambas poblaciones decrecen si hay demasiados individuos, por falta de alimento o por otros motivos. Por tanto en ausencia de depredadores las presas crecen a una tasa

$$x' = ax - \mu x^2,$$

y en ausencia de presas los depredadores crecen a una tasa

$$y' = cy - \lambda y^2,$$

y con presas y depredadores las tasas de crecimientos son

$$x' = ax - \mu x^2 - bxy,$$
$$y' = cy - \lambda y^2 + exy,$$

para $a, b, c, e, \mu, \lambda > 0$.

En este caso hay cuatro puntos de equilibrio, en los que tres representan la situación de que una de las poblaciones no tiene individuos y la cuarta es la correspondiente al punto p intersección de las rectas

$$a - \mu x - by = 0,$$
$$c - \lambda y + ex = 0,$$

que está en C y es distinto de los otros tres si y sólo si $c/\lambda < a/b$.

Ejercicio 5.5.1 Demostrar que el punto de equilibrio p del sistema anterior es asintóticamente estable.

5.5.2. Especies en competencia.

Consideremos el problema de dos poblaciones que compiten por la misma comida.

$$x' = ax - \mu x^2 - bxy,$$
$$y' = cy - \lambda y^2 - exy,$$

para $a, b, c, e, \lambda, \mu > 0$.

En este caso hay también cuatro puntos de equilibrio de los cuales a lo sumo uno es de interés. La intersección p de las rectas

$$a - \mu x - by = 0,$$
$$c - \lambda y - ex = 0.$$

Ejercicio 5.5.2 Demostrar que $p \in C$ si y sólo si a/c está entre μ/e y b/λ.

Demostrar que si $\mu\lambda > be$, entonces p es asintóticamente estable y que si $\mu\lambda < be$, entonces p es inestable.

5.5.3. Aplicación en Mecánica clásica.

Consideremos en $\mathcal{E}$ un producto interior $<,>$ y sea $U \subset \mathcal{E}$ un abierto.

Definición. Dado un campo tangente $D \in \mathcal{D}(U)$, llamaremos 1–forma del *trabajo* de D, a la 1–forma correspondiente por el isomorfismo canónico a D entre los módulos

$$\mathcal{D}(U) \to \Omega(U), \qquad D \to \omega =< D, \cdot > .$$

y llamaremos *trabajo de D a lo largo de una curva $\gamma \subset U$*, que une dos puntos $a, b \in U$, a la integral a lo largo de la curva, de ω, es decir si parametrizamos la curva con el parámetro longitud de arco,

$$\sigma\colon [0, L] \to U \ , \quad \sigma[0, L] = \gamma \ , \quad \sigma(0) = a \ , \ \sigma(L) = b,$$

y denotamos con $T = \sigma_*(\partial/\partial t)$, el vector tangente a la curva —que es unitario—, a la integral

$$\int_\gamma \omega = \int_0^L \sigma^*(\omega) = \int_0^L <D_{\sigma(s)}, T_{\sigma(s)}> ds,$$

de la componente tangencial del campo D.

Llamaremos *campo conservativo* a todo campo $D \in \mathcal{D}(U)$ con la propiedad de que el trabajo realizado a lo largo de una curva que une dos puntos, no depende de la curva.

Ejercicio 5.5.3 Demostrar que un campo es conservativo si y sólo si es un campo gradiente. (Observemos que f está determinada salvo una constante).

Definición. En mecánica clásica la expresión *"una partícula que se mueve en $\mathbb{R}^3$ bajo la influencia de un potencial U"*, significa que sobre ella actúa una fuerza definida por el campo tangente

$$F = -\operatorname{grad} U = -\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial U}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

El potencial en la mecánica celeste de dos cuerpos es[1] $U = -mMG/r$, donde $G = 6'673 \cdot 10^{-11}(N\,m^2/kg^2)$ es la constante gravitacional (ver la nota (1.9.4), pág.46) y r es la distancia de la masa m a la M —que está en el origen de coordenadas—. El módulo de la fuerza F es

$$\frac{mMG}{r^2},$$

y F es la fuerza de atracción que ejerce la masa M sobre la masa m, definida por la Ley de la Gravitación universal de Newton.

Para $\hat{U} = mgh$ el potencial en la superficie de la tierra, donde $g = MG/R^2$, M la masa de la tierra, R el radio y h la altura a la que está m sobre la superficie de la tierra, el módulo de F es constante

$$F = -\operatorname{grad} \hat{U} = -mg\frac{\partial}{\partial z}.$$

La relación entre estos dos potenciales es que su diferencia de potencial es aproximadamente la misma, es decir si q es un punto en la superficie de la tierra y p un punto en la vertical de q a distancia

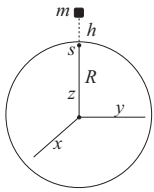


Figura 5.2

[1] Algunos autores ponen $U = mMG/r$ y $F = \operatorname{grad} U$, pero nosotros aquí preferimos tomarlo así pues la energía potencial es U que sumada a la cinética T veremos a continuación que es constante en las trayectorias que satisfacen la ley de Newton $F = mx''$.

h

$$U(p) - U(q) = U(R+h) - U(R) = -\frac{mMG}{R+h} + \frac{mMG}{R}$$
$$= \frac{mMGh}{R(R+h)} = \frac{mghR}{R+h} \sim mgh = \hat{U}(h) - \hat{U}(0) = \hat{U}(p) - \hat{U}(q).$$

Si $X(t)$ es la posición de la partícula en el instante t, la segunda Ley de Newton nos dice que

$$mX'' = F,$$

e introduciendo la velocidad tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$X' = Z,$$
$$Z' = \frac{F}{m},$$

correspondiente al campo

$$D = z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{F_1}{m} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{F_2}{m} \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{F_3}{m} \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Ahora es fácil encontrar una integral primera de D, pues tenemos la 1–forma incidente exacta

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i + m z_i dz_i \right) = d\left(U + \frac{mv^2}{2} \right),$$
$$\text{para } v = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2},$$

y por lo tanto "la *energía total del sistema*"

$$e = U + T = U + \frac{mv^2}{2},$$

satisface $De = 0$. Vamos a utilizar esta función e para definir una función de *Liapunov* en un punto de equilibrio $p = (x_0, z_0)$ de D.

Si $D_p = 0$ tendremos que

$$z_0 = 0\ , \qquad \frac{\partial U}{\partial x_i}(x_0) = 0,$$

ahora como $\ell(p) = \ell(x_0, 0)$ debe ser 0, definimos

$$\ell = e - e(x_0, 0) = \frac{1}{2}mv^2 + U - U(x_0),$$

en tal caso $D\ell = 0$ y si $U(x) > U(x_0)$ en un entorno de x_0, entonces ℓ es de *Liapunov* y se tiene el siguiente resultado.

Teorema de estabilidad de Lagrange 5.11 *Un punto de equilibrio* $(x_0, 0)$ *de las ecuaciones de Newton para una partícula que se mueve bajo la influencia de un potencial que tiene un mínimo absoluto local en* x_0*, es estable.*

5.6. Clasificación topol. de las ED lineales

Consideremos un campo tangente lineal

$$D = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{D}(\mathcal{E}),$$

con grupo uniparamétrico X. En esta lección veremos que si los autovalores de $\mathbf{A} = (a_{ij})$ tienen parte real positiva, entonces D es topológicamente equivalente —ver el tema IV—, al campo de las homotecias

$$H = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

y si la tienen negativa a $-H$, es decir que existe un homeomorfismo

$$h \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E},$$

que transforma las soluciones (parametrizadas) de la ecuación diferencial $X' = AX$ en las de $X' = X$, en el primer caso y en las de $X' = -X$ en el segundo.

Supongamos que para todo autovalor λ de $\mathbf{A} = (a_{ij})$,

$$a \leq \operatorname{Re} \lambda \leq b,$$

y consideremos en $\mathcal{E}$ el producto interior $<,>$ que satisface

$$a <x,x><<Ax,x><\ b <x,x>,$$

y elijamos un sistema de coordenadas lineales correspondiente a una base ortonormal. Denotaremos la esfera unidad correspondiente con $S = \{\|x\| = 1\}$.

Lema 5.12 *Para cada $q \in \mathcal{E} - \{0\}$, se tiene que*

$$\|q\|\, \mathrm{e}^{ta} \leq \|X_q(t)\| \leq \|q\|\, \mathrm{e}^{tb}, \qquad \textit{para } t \geq 0,$$
$$\|q\|\, \mathrm{e}^{tb} \leq \|X_q(t)\| \leq \|q\|\, \mathrm{e}^{ta}, \qquad \textit{para } t \leq 0.$$

además si $a > 0$ o $b < 0$, la aplicación

$$t \in \mathbb{R} \to \| X_q(t) \| \in (0, \infty),$$

es un difeomorfismo.

Demostración. Consideremos la función

$$g(t) = \log <X_q(t), X_q(t>),$$

entonces

$$2a \leq g'(t) = 2\frac{<X_q'(t), X_q(t>)}{<X_q(t), X_q(t>)} = 2\frac{<\mathbf{A}X_q(t), X_q(t>)}{<X_q(t), X_q(t>)} \leq 2b,$$

por tanto para $t \geq 0$ y $t \leq 0$ respectivamente tendremos que

$$2ta + g(0) \leq g(t) \leq 2tb + g(0),$$
$$2tb + g(0) \leq g(t) \leq 2ta + g(0),$$

y el enunciado se sigue pues

$$\| X_q(t) \| = \mathrm{e}^{g(t)/2}. \quad \blacksquare$$

Proposición 5.13 *Si $a > 0$ ó $b < 0$, entonces*

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} \times S & \to & \mathcal{E} - \{0\}, \\ (t,p) & \to & X(t,p) \end{array}$$

es un homeomorfismo.

Demostración. F es obviamente continua. Tiene inversa como consecuencia del lema anterior, pues para cada $q \in \mathcal{E} - \{0\}$, la aplicación

$$t \in \mathbb{R} \to \|X_q(t)\| \in (0, \infty),$$

es un difeomorfismo, por tanto existe un único $t = t(q) \in \mathbb{R}$ tal que $X_q(t) \in S$ y

$$F^{-1}(q) = (-t, X_q(t)).$$

Para ver que F^{-1} es continua, basta demostrar que la aplicación $t(q)$ es continua, es decir que si $q_n \to q$ entonces $t(q_n) = t_n \to t(q) = t$, es decir que si $q_n \to q$ y

$$X(t_n, q_n), X(t, q) \in S,$$

entonces $t_n \to t$.

Que t_n está acotada se sigue del lema, y si r es un punto límite de t_n, entonces por la continuidad de X, $X(r, q) \in S$ y $r = t$. ∎

Nota 5.14 Realmente F es un difeomorfismo, como puede comprobar el lector que haya estudiado variedades diferenciables, pues F es diferenciable, biyectiva y F_* es isomorfismo en todo punto, para lo cual basta ver que lo es en los puntos de la forma $(0, p)$, pues al ser $F_t(r, p) = (t + r, p)$ un difeomorfismo y tener el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times S & \xrightarrow{F} & \mathcal{E} \\ {\scriptstyle \mathrm{F_t}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{X_t}} \\ \mathbb{R} \times S & \xrightarrow{F} & \mathcal{E} \end{array}$$

tendremos que F es difeomorfismo local en (t, p) si y sólo si lo es en $(0, p)$ y en estos puntos lo es pues F_* es inyectiva, ya que lleva base en base. Veámoslo:

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(0,p)} = D_p,$$

y para una base $E_2, \ldots, E_n \in T_p(S)$, tendremos que para $i : S \hookrightarrow \mathcal{E}$ los $n - 1$ vectores $D_{ip} = i_* E_i \in T_p(\mathcal{E})$, son independientes y como $X_*(\partial x_i)_{(0,p)} = (\partial x_i)_p$, tendremos que

$$F_*(E_i) = X_*(D_i) = D_i,$$

y D_p es independiente de los D_i, pues $< D_i, p >= 0$, por ser los D_i tangentes a S, mientras que $< D_p, p >$ es positivo si $a > 0$ y negativo si $b < 0$.

Teorema 5.15 *Si $a > 0$ entonces D es topológicamente equivalente a H y si $b < 0$ a $-H$.*

Demostración. Haremos el caso $a > 0$, en cuyo caso el grupo uniparamétrico de H es $Y(t, x) = \mathrm{e}^t\, x$. Supongamos que existe tal homeomorfismo h tal que para todo $s \in \mathbb{R}$

$$h \circ X_s = Y_s \circ h,$$

entonces $h(0) = \mathrm{e}^s\, h(0)$, lo cual implica $h(0) = 0$. Sea $q \in \mathcal{E} - \{0\}$ y $q = X(t, p)$, con $p \in S$, entonces

$$\begin{aligned} h \circ X_s(q) &= h \circ X_s \circ X_t(p) = h \circ X_{s+t}(p) = h \circ F(s + t, p), \\ Y_s \circ h(q) &= Y(s, h[F(t, p)]), \end{aligned}$$

lo cual sugiere que $Y = h \circ F$, por lo que definimos

$$h : \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \qquad h(q) = \begin{cases} 0, & \text{si } q = 0, \\ Y[F^{-1}(q)], & \text{si } q \neq 0. \end{cases}$$

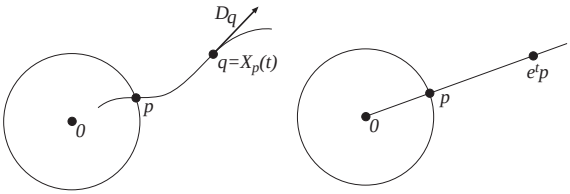


Figura 5.3.

Que es biyectiva y continua es evidente, falta demostrar la continuidad de h y la de h^{-1} en el 0, es decir que $x_n \to 0$ si y sólo si $h(x_n) \to 0$.

Como $h(x_n) = \mathrm{e}^{t_n}\, p_n$, con $p_n = X(-t_n, x_n) \in S$, tendremos que

$$\| h(x_n) \| = \mathrm{e}^{t_n},$$

y por el lema —para $q = p_n$ y $t = t_n$—,

$$\| h(x_n) \| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad t_n < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \| x_n \| < 1$$

por lo que en cualquier caso los $t_n < 0$ y tenemos la desigualdad

$$\mathrm{e}^{t_n b} \leq \| x_n \| \leq \mathrm{e}^{t_n a},$$

y $x_n \to 0$ si y sólo si $t_n \to -\infty$ si y sólo si $h(x_n) \to 0$. ∎

Nota 5.16 La h anterior es realmente de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}-\{0\})$, pero en el 0 sólo es continua. Es decir que conserva la incidencia de dos curvas que pasen por el origen, pero no su grado de tangencia, por ello puede llevar dos curvas tangentes en 0, en dos que se corten transversalmente y recíprocamente.

Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ un campo lineal, con matriz asociada $\mathbf{A}$ en un sistema de coordenadas lineales x_i. Supongamos que $\mathbf{A}$ no tiene autovalores imaginarios puros, que m es el número de autovalores con parte real positiva y que hemos elegido una base e_i en $\mathcal{E}$ tal que $\mathbf{A}$ se pone en forma de cajas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_2} \end{pmatrix}.$$

donde los autovalores de $\mathbf{A}_1$ tienen parte real positiva y los de $\mathbf{A}_2$ tienen parte real negativa.

Consideremos los subespacios de $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{E}_1 =< e_1, \ldots, e_m >, \quad \mathcal{E}_2 =< e_{m+1}, \ldots, e_n >,$$

de dimensiones m y $n-m$, para los que

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2, \qquad A : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_1, \qquad A : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2,$$

y la ecuación diferencial $X' = \mathbf{A}X$, en $\mathcal{E}$, es equivalente a las ecuaciones diferenciales $X_1' = \mathbf{A_1}X_1$ en $\mathcal{E}_1$ y $X_2' = \mathbf{A}_2X_2$ en $\mathcal{E}_2$, siendo $X = (X_1, X_2)$.

Además como

$$X_t = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\mathbf{A}_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t\mathbf{A}_2} \end{pmatrix}$$

entonces $X_t(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{E}_1$ y $X_t(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{E}_2$.

Ejercicio 5.6.1 Demostrar que $p \in \mathcal{E}_1$ si y sólo si $\|X_t(p)\| \to 0$, cuando $t \to -\infty$ y $p \in \mathcal{E}_2$ si y sólo si $\|X_t(p)\| \to 0$, cuando $t \to \infty$.

Definición. Al subespacio $\mathcal{E}_1$ lo llamamos *subespacio saliente* y a $\mathcal{E}_2$ *subespacio entrante* de D relativos al 0. A la dimensión $n-m$ de $\mathcal{E}_2$ la llamaremos *índice de estabilidad* en 0, del campo D.

Teorema 5.17 *Sean $D, E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ lineales, con ecuaciones $X' = \mathbf{A}X$ e $Y' = \mathbf{B}Y$, tales que ni $\mathbf{A}$ ni $\mathbf{B}$ tienen autovalores imaginarios puros. Entonces D es topológicamente equivalente a E si y sólo si tienen el*

mismo índice de estabilidad en 0*, es decir si y sólo si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *tienen el mismo número de autovalores con parte real negativa (y por tanto también positiva).*

Demostración.- "⇒" Tenemos que

$$h \circ \mathrm{e}^{t\mathbf{A}} = h \circ X_t = Y_t \circ h = \mathrm{e}^{t\mathbf{B}} \circ h,$$

por tanto $h(0) = 0$ pues $h(0) = \mathrm{e}^{t\mathbf{B}}\, h(0)$ y derivando en 0, $0 = \mathbf{B}h(0)$, y 0 no es autovalor de $\mathbf{B}$.

Si $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{F}_2$ son los subespacios entrantes de $X' = \mathbf{A}X$ y $X' = \mathbf{B}X$ respectivamente, basta demostrar que $\dim(\mathcal{E}_2) = \dim(\mathcal{F}_2)$.

Ahora bien $h(\mathcal{E}_2) = \mathcal{F}_2$, pues

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{E}_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \|X_t(p)\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \|h[X_t(p)]\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \|Y_t[h(p)]\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad h(p) \in \mathcal{F}_2, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue por el teorema de invariancia de dominios ya que un homeomorfismo conserva la dimensión de un espacio vectorial.

"⇐" Basta demostrar que $X' = \mathbf{A}X$ es topológicamente equivalente a $X' = \mathbf{J}X$, para $\mathbf{J} = (c_{ij})$ diagonal tal que

$$c_{1,1} = \cdots = c_{m,m} = 1\ , \quad c_{m+1,m+1} = \cdots = c_{n,n} = -1.$$

Eligiendo adecuadamente el sistema de coordenadas x_i, tenemos que para $X = (X_1, X_2)$

$$X' = \mathbf{A}X \quad \Leftrightarrow \quad X_1' = \mathbf{A}_1 X_1\ ,\ X_2' = \mathbf{A}_2 X_2,$$

para $\mathbf{A_1}$ de orden m con autovalores con parte real positiva y $\mathbf{A}_2$ de orden $n - m$ con autovalores con parte real negativa.

Ahora por el teorema anterior $X_1' = \mathbf{A}_1 X_1$ es topológicamente equivalente por un homeomorfismo $h_1 \colon \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_1$, a $X_1' = X_1$ y $X_2' = \mathbf{A}_2 X_2$, por un homeomorfismo $h_2 \colon \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$, a $X_2' = -X_2$. Por tanto $X' = \mathbf{A}X$ es topológicamente equivalente por

$$h(x + y) = h_1(x) + h_2(y),$$

con $x \in \mathcal{E}_1$ e $y \in \mathcal{E}_2$, a $X' = \mathbf{J}X$. ∎

5.7. Teorema de resonancia de Poincaré

En (2.25) de la página 96 clasificamos los campos tangentes en un entorno de un punto no singular —es decir en el que no se anulan—, viendo que todos eran diferenciablemente equivalentes al campo de las traslaciones

$$\frac{\partial}{\partial x}.$$

Nos falta dar una clasificación en un entorno de un punto singular, es decir en el que se anulen.

Para campos lineales —que siempre se anulan en el origen— hemos visto en la Proposición (4.24), pág.230, que la clasificación lineal y la diferenciable eran la misma y consistía en que dos campos eran equivalentes si y sólo si las matrices que definen sus ecuaciones en un sistema de coordenadas lineales eran semejantes.

En la lección anterior acabamos de hacer la clasificación desde un punto de vista topológico, de los campos lineales para los que el origen es un punto singular de tipo hiperbólico —los autovalores de la aplicación lineal que define el campo tienen parte real no nula—.

La cuestión es ¿qué podemos decir para un campo general en un punto singular hiperbólico?.

La teoría de Poincaré, de las formas normales de un campo, nos da —en el caso de autovalores que no están en "resonancia", un sistema de coordenadas en un entorno de un punto singular, en las que nuestro campo se hace tan "próximo" a su linealización en el punto como queramos, en el sentido de que las componentes del campo y las de su linealización difieren en una función cuyo desarrollo de Taylor es nulo hasta el orden que queramos.

Sea $L \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ lineal, tal que la aplicación lineal que define es diagonalizable, por tanto existe un sistema de coordenadas x_i en el que

$$Lx_i = \lambda_i x_i \ , \quad L = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

—supondremos que los λ_i son reales, aunque el resultado es igualmente válido si son complejos—.

Consideremos ahora el subespacio $\mathcal{P}_m$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$ de los polinomios homogéneos de grado $m \geq 2$, es decir el subespacio vectorial generado por las funciones

$$x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n},$$

con $m_i \geq 0$ y $\sum m_i = m$.

Ejercicio 5.7.1 Demostrar que en los términos anteriores para cada $f \in \mathcal{P}_m$, $Lf \in \mathcal{P}_m$, que $L\colon \mathcal{P}_m \to \mathcal{P}_m$ es diagonal y tiene autovalores $\sum m_i\lambda_i$, correspondientes a los autovectores $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$.

Definición. Diremos que un campo $H \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ es *polinómico de grado* m, si para cada función lineal f, $Hf \in \mathcal{P}_m$. Denotaremos el conjunto de estos campos por $\mathcal{D}(\mathcal{P}_m)$, el cual es un subespacio vectorial de $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, de dimensión finita generado por

$$x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{5.5}$$

para $m_1, \ldots, m_n \geq 0$, $m_1 + \cdots + m_n = m$ e $i = 1, \ldots, n$.

Lema 5.18 *Para el campo lineal L del principio se tiene que*

$$L^L\colon \mathcal{D}(\mathcal{P}_m) \to \mathcal{D}(\mathcal{P}_m)\ , \quad L^L H = [L, H],$$

es una aplicación lineal con autovectores los campos de (5.5) y autovalores asociados respectivamente

$$\sum_{j=1}^{n} m_j\lambda_j - \lambda_i.$$

Demostración. Es fácil demostrar que para cada $H \in \mathcal{D}(\mathcal{P}_m)$, $L^L H \in \mathcal{D}(\mathcal{P}_m)$ y que para cada monomio $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \in \mathcal{P}_m$

$$L(x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}) = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} (\sum_{j=1}^{n} m_j\lambda_j),$$

se sigue entonces que para cada

$$H = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{D}(\mathcal{P}_m),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} L^L H &= L(x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n})\frac{\partial}{\partial x_i} - x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}[\frac{\partial}{\partial x_i}, L] \\ &= (\sum_{j=1}^n m_j\lambda_j)x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}\frac{\partial}{\partial x_i} - \lambda_i x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}\frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= (\sum_{j=1}^n m_j\lambda_j - \lambda_i)H. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definición. Diremos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ están en *resonancia* si existen

$$i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{N},$$

para los que

$$\sum_{j=1}^n m_j \geq 2\ , \quad \lambda_i = \sum_{j=1}^n m_j\lambda_j.$$

Corolario 5.19 *Si los autovalores λ_i de nuestro campo lineal L no están en resonancia entonces*

$$L^L : \mathcal{D}(\mathcal{P}_m) \to \mathcal{D}(\mathcal{P}_m),$$

es un isomorfismo, para cada $m \geq 2$.

Demostración. Es una simple consecuencia del resultado anterior pues los campos de (5.5) son base de $\mathcal{D}(\mathcal{P}_m)$ y en esta base la aplicación lineal L^L es diagonal y todos sus autovalores son no nulos. $\blacksquare$

Consideremos ahora un campo cualquiera $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ con un punto singular $p \in \mathcal{E}$, cuyos exponentes característicos no estén en resonancia. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p = 0$.

Si consideramos la linealización L de D en p y un sistema de coordenadas lineales x_i,

$$D = \sum_{i=1}^n f_i\frac{\partial}{\partial x_i}\ , \quad L = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

y nuestra hipótesis significa que la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$, con $a_{ij} = \partial f_i(p)/\partial x_j$, tiene autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (supondremos que reales) sin resonancia.

En estos términos se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.20 *Para cada $k \in \mathbf{N}$ existe un sistema de coordenadas polinómico u_i en un entorno de p tal que (para $g_i = o(\|u\|^k)$)*

$$Du_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j + g_i.$$

Demostración. La demostración se hace recurrentemente eliminando en cada paso los términos del desarrollo de Taylor de menor orden, mayor que uno, de las componentes del campo D en p.

Consideremos la descomposición $D = L + G_2 + G$, donde $G_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{P}_2)$ y $G \in \mathcal{D}$ es tal que $Gx_i = o(\|x\|^2)$ —observemos que lo único que hemos hecho es desarrollar por Taylor cada función Dx_i hasta el orden 3, Lx_i es la parte lineal G_2x_i es la cuadrática y Gx_i es el resto que es de orden inferior a $\|x\|^2$—. Veamos cómo podemos hacer que la parte cuadrática desaparezca.

Por el corolario anterior (5.19) existe $H \in \mathcal{D}(\mathcal{P}_2)$, tal que $[L, H] = G_2$, consideremos $h_i = Hx_i \in \mathcal{P}_2$ y el sistema de coordenadas en un entorno de 0, $u_i = x_i - h_i$. Entonces

$$\begin{aligned}
Du_i &= Lu_i + G_2u_i + Gu_i \\
&= Lx_i - Lh_i + [L, H]x_i - [L, H]h_i + Gu_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - Lh_i + L(Hx_i) - H(Lx_i) - [L, H]h_i + Gu_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - H(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) - [L, H]h_j + Gu_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j - [L, H]h_i + Gu_i,
\end{aligned}$$

siendo $[L, H]h_i$ y Gu_i de orden inferior a $\|u\|^2$.

Ahora considerando las coordenadas u_i como lineales volvemos a repetir el razonamiento para eliminar los términos de grado 3 y así sucesivamente. ∎

La cuestión de si un campo con un punto singular hiperbólico es equivalente a su linealizado es bastante difícil. No obstante se sabe lo siguiente:

Cuando todos los autovalores tienen parte real con el mismo signo y no están en resonancia, POINCARÉ demostró en *1879* que si $D =$

$\sum f_i \partial x_i$, con las f_i analíticas, el campo es analíticamente equivalente (localmente) a su linealizado.

Cuando tiene autovalores de los dos signos, la equivalencia analítica depende de que los autovalores satisfagan condiciones diofánticas y fue resuelto por SIEGEL en *1952*.

La equivalencia diferenciable (de clase ∞) fue resuelta por STERNBERG en *1958*, también bajo condiciones de no resonancia de los autovalores. Por otra parte HARTMAN y GROBMAN probaron, independientemente en *1959*, que el campo siempre es topológicamente equivalente (localmente) a su linealización. Y si las f_i son de clase 2, HARTMAN probó en *1960* que el campo siempre es diferenciablemente equivalente (de clase 1) a su linealización, y aunque las f_i sean polinómicas no podemos asegurar que sea diferenciablemente equivalente de clase 2, a menos que los autovalores no estén en resonancia, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.7.1 Consideremos la EDO

$$x' = 2x, \qquad y' = x^2 + 4y,$$

cuya linealizada en el origen es $x' = 2x$, $y' = 4y$, y sus autovalores $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$ están en resonancia. Para ella no hay un difeomorfismo $H = (u, v)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de clase 2 que lleve el grupo uniparamétrico X_t de nuestra ecuación en el de la linealizada $\exp tA$, pues en caso contrario $\exp tA \circ H = H \circ X_t$, es decir

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\mathrm{e}^{2t}\, x, \mathrm{e}^{4t}(y + tx^2)) \\ v(\mathrm{e}^{2t}\, x, \mathrm{e}^{4t}(y + tx^2)) \end{pmatrix},$$

y tendríamos que en $t = 1$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^2\, u(x,y) &= u(\mathrm{e}^2\, x, \mathrm{e}^4(y + x^2)), \\ \mathrm{e}^4\, v(x,y) &= v(\mathrm{e}^2\, x, \mathrm{e}^4(y + x^2)), \end{aligned}$$

y derivando la primera ecuación respecto de y en $(0,0)$, tendríamos que $u_y = 0$ y derivando la segunda respecto de x dos veces (la segunda en el origen)

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^4\, v_x(x,y) &= \mathrm{e}^2\, v_x(\mathrm{e}^2\, x, \mathrm{e}^4(y + x^2)) + 2x\, \mathrm{e}^4\, v_y(\mathrm{e}^2\, x, \mathrm{e}^4(y + x^2)), \\ \mathrm{e}^4\, v_{xx} &= \mathrm{e}^4\, v_{xx} + 2\, \mathrm{e}^4\, v_y, \end{aligned}$$

lo cual implicaría que $v_y = 0$ y $H = (u, v)$ tendría jacobiano nulo en el origen y no sería difeomorfismo.

5.8. Cuenca de un sumidero

Definición. Sea $p \in U$ un punto singular de un campo $D \in \mathcal{D}(U)$, llamaremos *cuenca* de p al conjunto $\mathbf{C}(p)$ de todos los puntos cuyas trayectorias tienden a p cuando $t \to \infty$.

A menudo llamaremos *sumidero* a un punto singular asintóticamente estable de D.

Proposición 5.21 *Cuencas correspondientes a puntos singulares distintos son disjuntas y la cuenca de un sumidero es un abierto.*

Demostración. La primera afirmación es obvia, veamos la segunda. En primer lugar recordemos que si $p \in U$ es un punto asintóticamente estable de $D \in \mathcal{D}(U)$, entonces existe un abierto U_p, entorno de p, tal que toda trayectoria pasando por un punto de U_p, converge a p cuando $t \to \infty$, por tanto $\mathbf{C}(p)$ es el conjunto de todos los puntos cuyas trayectorias entran en U_p, por tanto si consideramos el flujo de D, $X\colon \mathcal{W}_D \to U$ y la proyección $\pi\colon (t,x) \in \mathcal{W}_D \to x \in U$, tendremos que

$$\mathbf{C}(p) = \pi[X^{-1}(U_p)]. \quad \blacksquare$$

La importancia de una cuenca estriba en que por una parte podemos identificar todos los estados de la cuenca de p, con el propio punto p, ya que cualquiera de ellos llegará, después de un tiempo, a estar tan cerca de este que no será posible distinguirlos. Por otra parte para ciertos campos, por ejemplo los gradientes de funciones acotadas superiormente, casi todo punto se encuentra en la cuenca de un sumidero, siendo los demás puntos "improbables". Para tales campos los sumideros representan, en definitiva, los distintos tipos de comportamiento del flujo a largo plazo.

El conocimiento del "tamaño"de una cuenca también es importante, pues nos da una estimación de la "perturbación" que puede sufrir el punto de equilibrio, con la seguridad de que el sistema regrese al (mismo) punto de equilibrio.

Durante mucho tiempo se pensó que si la cuenca de un punto singular era un entorno del punto, entonces el punto era estable y por tanto asintóticamente estable, sin embargo esto es falso.

Ejemplo 5.8.1 El siguiente campo tangente construido por VINOGRAD

$$\frac{x^2(y-x)+y^5}{(x^2+y^2)(1+(x^2+y^2)^2)}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y^2(y-2x)}{(x^2+y^2)(1+(x^2+y^2)^2)}\frac{\partial}{\partial y},$$

tiene el origen como un punto singular inestable, siendo su cuenca todo el plano. Remitimos al lector a la p.191 del libro de HAHN, donde lo estudia.

A continuación veremos como se pueden utilizar las funciones de *Liapunov* para estimar el tamaño de la cuenca de un sumidero.

Definición. Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ con grupo uniparamétrico $X\colon \mathcal{W}_D \to U$. Diremos que $P \subset U$ es *invariante* si $\mathbb{R} \times P \subset \mathcal{W}_D$ y para todo $t \in \mathbb{R}$

$$X_t(P) \subset P.$$

Diremos que es *positivamente invariante* (resp. *negativamente invariante*) si $X_t(P) \subset P$ es cierto para los $t \geq 0$, (resp. para los $t \leq 0$).

Diremos que P es *minimal* si es cerrado, no vacío, invariante y no contiene subconjuntos propios con estas propiedades.

Definición. Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ con grupo uniparamétrico X. Diremos que $x \in U$ es un *punto límite positivo* (resp. *negativo*) de $q \in U$ si $(0,\infty) \subset I(q)$ (resp. $(-\infty,0) \subset I(q)$) y existe una sucesión $t_n \to \infty$ (resp. $t_n \to -\infty$), tal que

$$X(t_n, q) \to x.$$

Denotaremos con α_q y Ω_q respectivamente los conjuntos de puntos límite negativo y positivo de q.

Proposición 5.22 *Sea $D \in \mathcal{D}(U)$, $q \in U$ e $I(q) = (\alpha, \beta)$. Entonces:*

a) Los conjuntos α_q y Ω_q son cerrados y verifican que dado $x \in \Omega_q$ ($x \in \alpha_q$) y $t \in I(x)$ entonces $X(t,x) \in \Omega_q$ ($\in \alpha_q$).

b) Si $X_q[0,\beta)$ está en un compacto, entonces $\beta = \infty$, Ω_q es no vacío, invariante, compacto, conexo y

$$\lim_{t\to\infty} d[X_q(t), \Omega_q] = 0,$$

para $d[A,B] = \inf\{\|z-x\| : z \in A,\, x \in B\}$.

c) Y si $X_q(\alpha, 0]$ está en un compacto, entonces $\alpha = -\infty$ y α_q es no vacío, invariante, compacto, conexo y

$$\lim_{t\to-\infty} d[X_q(t), \alpha_q] = 0.$$

Demostración. Haremos la demostración para Ω_q.

a) Si $x_n \to x$, con $x_n = \lim X(t_{n_m}, q)$, entonces existe una subsucesión r_n, de t_{n_m}, para la que $X(r_n, q) \to x$.

Sea $x \in \Omega_q$ y $t_n \to \infty$ tales que $X_q(t_n) \to x$, entonces para $t \in I(x)$, $t + t_n \in (0, \infty) \subset I(q)$ para n suficientemente grande y

$$X(t + t_n, q) = X_t[X_q(t_n)] \to X_t(x),$$

por tanto $X_t(x) \in \Omega_q$.

b) Que Ω_q es no vacío es obvio y es compacto pues $\Omega_q \subset K$. Que es invariante se sigue de (a) y de estar en un compacto, pues si $z \in \Omega_q$, como $X_t(z)$ está en un compacto, será $I(x) = \mathbb{R}$.

Veamos que es conexo. Supongamos que existen compactos disjuntos K_1 y K_2 tales que $\Omega_q = K_1 \cup K_2$ y sea

$$0 < \delta = d(K_1, K_2) = \min\{\|x - y\| : x \in K_1,\, y \in K_2\}.$$

Si $t_n \uparrow \infty$ es tal que para n impar y par respectivamente

$$d[X_q(t_n), K_1] < \frac{\delta}{4}\,, \quad d[X_q(t_n), K_2] < \frac{\delta}{4},$$

entonces por la continuidad de X_q, existirá $t_{2n-1} \le r_n \le t_{2n}$, tal que

$$d[X_q(r_n), K_1] = d[X_q(r_n), K_2] \ge \frac{\delta}{2}.$$

Sea $z \in \Omega_q$ un punto límite de $X_q(r_n)$, entonces

$$d(z, K_1) = d(z, K_2) \ge \delta/2, \quad \text{y} \quad d(z, \Omega_q) \ge \delta/2,$$

lo cual es absurdo.

Por último si existe $\epsilon > 0$ y $t_n \to \infty$, tal que $d[X_q(t_n), \Omega_q] \ge \epsilon$, llegamos a un absurdo, pues $X_q(t_n)$ tiene un punto límite que está en Ω_q. ∎

Teorema 5.23 *Sea $p \in U$ un punto singular de $D \in \mathcal{D}(U)$ y sea $\ell \in \mathcal{C}(U)$ una función de Liapunov para D en p. Si $K \subset U$ es compacto, entorno de p, positivamente invariante y tal que no contiene ninguna trayectoria completa de D —salvo la de p— en la que ℓ sea constante, entonces $K \subset \mathbf{C}(p)$.*

Demostración. Por ser K positivamente invariante tenemos que para cada $q \in K$ y $t \geq 0$, $X_q(t) \in K$, por tanto por el resultado anterior $\Omega_q \subset K$, es no vacío y dado $z \in \Omega_q$ y $t \in \mathbb{R}$, $X_z(t) \in \Omega_q$, además

$$\ell(z) = \text{ínf}\{\ell[X_q(t)] : t \in (0, \infty)\},$$

pues $D\ell \leq 0$, es decir $\ell \circ X_q$ es decreciente, y ℓ es continua, por tanto ℓ es constante en Ω_q en particular en la órbita de z y por la hipótesis $z = p$, por tanto $\Omega_q = \{p\}$ y del lema se sigue que $X_q(t) \to p$ cuando $t \to \infty$. ∎

Ejercicio 5.8.1 Consideremos las ecuaciones del péndulo con rozamiento ($a > 0$), es decir:

$$\theta'(t) = z(t),$$
$$z'(t) = az - \operatorname{sen}\theta(t),$$

y demostrar que para cada $k < 2$ y $\ell(\theta, z) = z^2/2 + 1 - \cos\theta$, el compacto

$$K = \{(\theta, z) : -\pi \leq \theta \leq \pi,\ \ell(\theta, z) \leq k\},$$

está en la cuenca del punto $p = (0, 0)$.

5.9. La aplicación de Poincaré

Consideremos el campo

$$D = [y + x(1 - x^2 - y^2)]\frac{\partial}{\partial x} + [-x + y(1 - x^2 - y^2)]\frac{\partial}{\partial y},$$

en coordenadas polares (ρ, θ) tenemos que

$$D = -\frac{\partial}{\partial \theta} + \rho(1 - \rho^2)\frac{\partial}{\partial \rho},$$

cuyas soluciones son (haciendo el cambio $z = \rho^{-2}$, y tomando $\theta(0) = 0$)

$$\left.\begin{aligned} \theta(t) &= -t \\ \rho(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + k\,\mathrm{e}^{-2t}}} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{\cos t}{\sqrt{1 + k\,\mathrm{e}^{-2t}}} \\ y(t) &= -\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1 + k\,\mathrm{e}^{-2t}}} \end{aligned}\right\}$$

Para $k = 0$, la solución es periódica, y su órbita es la circunferencia unidad. Para $k > 0$, la solución se aproxima por fuera en espiral al origen, cuando $t \to -\infty$, y a la circunferencia en espiral por dentro, cuando $t \to \infty$.

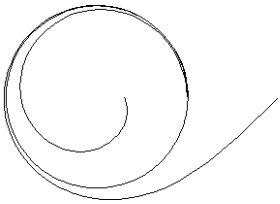


Figura 5.4.

Para $k < 0$, la solución tiende a ∞ cuando $t \to \log\sqrt{-k}$, y a la circunferencia unidad, en forma espiral y por fuera, cuando $t \to \infty$. Así pues existe una órbita periódica, a la que las demás tienden cuando $t \to \infty$. En esta lección estudiaremos este tipo de órbitas.

Definición. Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ y $p \in U$ un punto no singular de D. Diremos que la *órbita de* p, $\gamma = X_p[I(p)]$, es *cíclica ó perriódica* si $I(p) = \mathbb{R}$ y existe $T > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$X_p(t) = X_p(t + T).$$

Llamaremos *período* de γ al mínimo de los $T > 0$ verificando lo anterior.

Ejercicio 5.9.1 Demostrar que si $\mathcal{O}$ es la órbita de un punto no singular p de un campo $D \in \mathcal{D}(U)$, son equivalentes: (a) $\mathcal{O}$ es cíclica. (b) Existen $r \in I(p)$ y $T > 0$ tales que

$$X_p(r) = X_p(r + T).$$

(c) Con la topología inducida por U, $\mathcal{O}$ es homeomorfa a la circunferencia unidad $\mathcal{S}_1$.

Definición. Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ y $x \in U$. Una sección *local* de D en x, es un conexo cerrado S, entorno de x en un hiperplano afín que contiene a x,

$$H = \{z \in \mathcal{E} : h(z) = h(x)\},$$

para h lineal, tal que para cada $p \in S$, $D_p h \neq 0$.

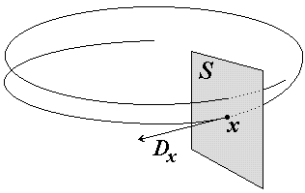


Figura 5.5. Sección local

Nota 5.24 Observemos que en particular $D_x \neq 0$, para cada $x \in S$.

Ejercicio 5.9.2 Demostrar que por todo punto no singular de D pasa una sección local y que esta sección es cortada por cada órbita de un lado al

otro del hiperplano y que todas las órbitas lo hacen en "el mismo sentido", entendiendo que un hiperplano divide el espacio en dos regiones A y B, de este modo hay dos posibles sentidos de atravesarlo, de A a B ó de B a A.

Proposición 5.25 *Sea $D \in \mathcal{D}(U)$, $p \in U$, $r \in I(p)$ y S una sección local de D pasando por $x = X_p(r)$. Entonces existe un abierto $U_p \subset U$, entorno de p, y una función $t\colon U_p \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $t(p) = r$ y $X[t(z), z] \in S$ para cada $z \in U_p$.*

Demostración. Sea $h\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}$, lineal tal que $S \subset \{h = h(x)\}$ y $Dh \neq 0$ en S y sea $G = h \circ X$, entonces

$$\frac{\partial G}{\partial t}(r, p) = Dh(x) \neq 0,$$

y por el teorema de la función implícita existe un abierto V, entorno de p y una única $t\colon V \to \mathbb{R}$ diferenciable, tal que $t(p) = r$ y para todo $z \in V$,

$$G[t(z), z] = G(r, p) = h(x),$$

es decir tal que para cada $z \in V$, $X[t(z), z] \in H$. Ahora por continuidad, existe U_p entorno de p, tal que $X[t(z), z] \in S$, para cada $z \in U_p$. ∎

Lema 5.26 *a) Sea $D \in \mathcal{D}(U)$, $p \in U$, $[a, b] \subset I(p)$ y S una sección local de D. Entonces existen a lo sumo un número finito de $t \in [a, b]$, tales que $X_p(t) \in S$.*

b) Sea $D \in \mathcal{D}(U)$, $q \in U$, $p \in \Omega_q$ un punto no singular de D y S una sección local de D en p. Entonces existe una sucesión creciente $s_n \to \infty$, tal que

$$\{X_q(s_n) : n \in \mathbf{N}\} = S \cap X_q[0, \infty).$$

Además p es un punto límite de $x_n = X_q(s_n)$.

Demostración. a) Supongamos que exista una sucesión de $t_n \in [a, b]$, tales que $X_p(t_n) \in S$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $t_n \to t \in [a, b]$.

Por ser S cerrado $x = X_p(t) \in S$, y si $S \subset \{z : h(z) = h(x)\}$, entonces $h[X_p(t_n)] = h(x)$, por tanto

$$D_x h = \lim_{t_n \to t} \frac{h[X_p(t_n)] - h(x)}{t_n - t} = 0,$$

en contra de la definición.

b) Aplicando **(5.25)** a $r = 0$ y $x = p$, tenemos que existe V entorno de p y $t\colon V \to \mathbb{R}$ diferenciable tales que $t(p) = 0$ y $X[t(z), z] \in S$ para todo $z \in V$. Ahora como $p \in \Omega_q$, existe $r_n \to \infty$, tal que $p_n = X_q(r_n) \to p$, y por tanto salvo para un número finito de n's, $p_n \in V$ y $X[t(p_n), p_n] = X_q[t(p_n) + r_n] \in S$. Además $X_q[t(p_n) + r_n] \to p$.

Por último se sigue de (a) que

$$S \cap X_q[0, \infty) = S \cap X_q[0, 1] \cup S \cap X_q[1, 2] \cup \dots$$

es a lo sumo numerable. ∎

Definición. Dado un campo $D \in \mathcal{D}(U)$, una órbita cíclica suya γ y una sección S de D en $x \in \gamma$, llamaremos *aplicación de Poincaré* en x a un difeomorfismo

$$\theta\colon S_{1x} \to S_{2x},$$

donde S_{1x} y S_{2x} son entornos abiertos de x en S, para la que existe una aplicación diferenciable $t\colon S_{1x} \to \mathbb{R}$ tal que $t(x) = T$ —el *período* de x— y para todo $z \in S_{1x}$

$$\theta(z) = X[t(z), z].$$

Teorema 5.27 *Dado un campo $D \in \mathcal{D}(U)$, una órbita cíclica suya γ y una sección local S de D en $x \in \gamma$, entonces:*

a) Existe una aplicación de Poincaré, $\theta\colon S_{1x} \to S_{2x}$ en x.

b) Los n autovalores de

$$X_{T*}\colon T_x(\mathcal{E}) \to T_x(\mathcal{E}),$$

son el 1 y los $n-1$ autovalores de $\theta_*\colon T_x(H) \to T_x(H)$.

Demostración. Con una traslación podemos considerar que $x = 0$. Ahora consideremos un sistema de coordenadas lineales x_i correspondientes a una base e_i de $\mathcal{E}$ donde $e_1, \dots, e_{n-1}$ son una base del hiperplano H que contiene a S y e_n es el vector cuya derivada direccional es D_x, es decir correspondiente a D_x por la identificación canónica entre $\mathcal{E}$ y $T_x(\mathcal{E})$.

Entonces $D_x = (\partial x_n)_x$ y $x_1, \dots, x_{n-1}$ son coordenadas en H, que por evitar confusiones denotaremos $z_1, \dots, z_{n-1}$.

Por **(5.25)** sabemos que existe U_x entorno de x en U, y $t\colon U_x \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $t(x) = T$ (el período de γ) y $X[t(z), z] \in S$, para cada $z \in U_x$. Definimos $S_x = U_x \cap \overset{\circ}{S}$ y la aplicación

$$\theta : S_x \to S\ , \quad \theta(z) = X[t(z), z].$$

Calculemos la matriz de $\theta_*\colon T_x(H) \to T_x(H)$ en términos de las coordenadas z_i. Para $i, j = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_i}{\partial z_j}(x) &= \frac{\partial X_i}{\partial t}(T,x)\frac{\partial t}{\partial z_j}(x) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_k}(T,x)\frac{\partial z_k}{\partial z_j}(x)\\ &= Dx_i(x)\frac{\partial t}{\partial z_j}(x) + \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(T,x)\\ &= \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(T,x) = \frac{\partial (X_T)_i}{\partial x_j}(x).\end{aligned}$$

pues $z_n = 0$.

Ahora bien X_T es un difeomorfismo y $X_{T*}\colon T_x(\mathcal{E}) \to T_x(\mathcal{E})$ es un isomorfismo, que tiene un autovalor $\lambda = 1$, pues

$$X_{T*}D_x = D_{X(T,x)} = D_x,$$

y tiene una matriz asociada para $i, j = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial (X_T)_i}{\partial x_j}(x)\right) & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

por tanto θ es un difeomorfismo local en x y se sigue (a) y (b). ∎

Nota 5.28 Observemos que los autovalores de $X_{T*}\colon T_x(\mathcal{E}) \to T_x(\mathcal{E})$ y los de $X_{T*}\colon T_y(\mathcal{E}) \to T_y(\mathcal{E})$ son los mismos para $x, y \in \gamma$. Pues existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $X(r,x) = y$ y $(X_{T*})_y \circ X_{r*} = X_{r*} \circ (X_{T*})_x$.

Definición. Llamaremos *multiplicadores característicos* de la órbita cíclica γ a los $n-1$ autovalores de X_{T*} —en cualquier punto $x \in \gamma$—, que quedan cuando quitamos el 1 que corresponde a $X_{T*}D_x = D_x$. Es decir a los autovalores de θ_*.

Ejercicio 5.9.3 Sea $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ con una curva integral γ cíclica con período T. Sea E un campo independiente de D en los puntos de γ. Demostrar que:

(a) Si $[D, E] = 0$, entonces el multiplicador característico de γ es 1.

(b) Si $[D, E] = gD$, entonces el multiplicador característico de γ es

$$\mathrm{e}^{\int_0^T g[\gamma(s)]\,ds}.$$

.

5.10. Estabilidad de órbitas cíclicas

Definición.
Sea $D \in \mathcal{D}(U)$ y $p \in U$. Diremos que *la órbita de p se aproxima a una órbita cíclica* γ *en* $x \in \gamma$, si $[0, \infty) \subset I(p)$ y para cada S sección local de D en x existe U_x entorno abierto de x en U, una aplicación diferenciable $t\colon U_x \to \mathbb{R}$, un $t_0 > 0$ y un entorno abierto S_x de x en S tales que:

i.- $t(x) = T$, el período de γ.
ii.- $p_1 = X[t_0, p] \in S_x$.
iii.- $p_{n+1} = X[t(p_n), p_n] \in S_x$.
iv.- $p_n \to x$.

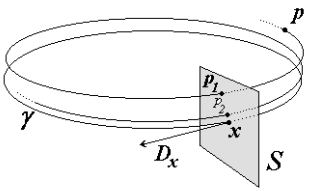


Figura 5.6. La órbita de p se aproxima a γ en x

Diremos que *la órbita de p se aproxima a* γ si lo hace en todo punto $x \in \gamma$.

Diremos que la órbita cíclica γ es *asintóticamente estable* si existe un entorno $U(\gamma)$ de γ, tal que para todo $p \in U(\gamma)$, la órbita de p se aproxima a γ.

Ejemplo 5.10.1 Consideremos de nuevo el campo con el que comenzamos la lección anterior

$$D = [y + x(1 - x^2 - y^2)]\frac{\partial}{\partial x} + [-x + y(1 - x^2 - y^2)]\frac{\partial}{\partial y},$$

cuyas soluciones son para cada k

$$\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + k\,\mathrm{e}^{-2t}}}(\cos t, -\operatorname{sen} t),$$

consideremos la sección local $S = \{(x, 0) : x > 0\}$, que corta a la circunferencia unidad —que es una órbita cíclica—, en el punto $(1, 0)$, y observemos que para todo $p \in S$, $X(2\pi, p) \in S$, por lo que la aplicación de Poincaré correspondiente

$$\theta : (0, \infty) \to (0, \infty),$$

es tal que

$$\sigma(0) = (x, 0), \qquad \sigma(2\pi) = (\theta(x), 0),$$

de donde se sigue que

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+k}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{x^2} - 1$$
$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \mathrm{e}^{-4\pi}}}$$

por lo tanto $\theta'(1) = \mathrm{e}^{-4\pi}$ es el multiplicador característico de la órbita cíclica, el cual es menor que 1. En esta lección veremos que esto implica que todas las trayectorias se aproximen a la circunferencia.

Lema 5.29 *Sea $\theta\colon V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, diferenciable tal que $\theta(0) = 0$ y*

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial z_j}(0)\right),$$

tiene todos sus autovalores en el disco unidad $\{\lambda : |\lambda| < 1\}$. Entonces existe V_0 entorno de 0 en V, tal que para todo $q \in V_0$, $\theta(q) \in V_0$ y $\theta^n(q) \to 0$.

Demostración. Como $\rho(\mathbf{A}) < 1$ podemos tomar $r \in \mathbb{R}$ tal que $\rho(\mathbf{A}) < r < 1$. Y por **(5.3)** existe una norma inducida por un producto interior en $\mathbb{R}^m$, para la que $\|\mathbf{A}\| < r$. Ahora para cada $\epsilon > 0$ existe una bola $V_0 \subset V$, centrada en 0, tal que si $q \in V_0$

$$\|\theta(q) - \mathbf{A}q\| \leq \epsilon \|q\|,$$

y eligiendo ϵ tal que $k = r + \epsilon < 1$

$$\|\theta(q)\| \leq \epsilon\|q\| + \|\mathbf{A}q\| \leq \epsilon\|q\| + \|\mathbf{A}\| \cdot \|q\| \leq k\|q\|,$$

de donde se sigue el resultado, pues $\|\theta^n(q)\| \leq k^n \|q\|$. ∎

Proposición 5.30 *Si los multiplicadores característicos de γ están en $\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < 1\}$, entonces para cada $x \in \gamma$ y cada sección local S de x, existe un abierto U_x entorno de x en U, $t\colon U_x \to \mathbb{R}$ diferenciable y S_x entorno abierto de x en S, tales que:*

i. $t(x) = T$, el período de γ.

ii. Para cada $z \in U_x$, $t(z) > 0$, $[0, \infty) \subset I(z)$ *y*

$$X[t(z), z] \in S_x.$$

iii. Para cada $z_1 \in S_x$ *y* $z_{n+1} = X[t(z_n), z_n]$, *se tiene* $z_n \to x$.
iv. Para todo $p \in U_x$, $x \in \Omega_p$.

Demostración.

En los términos de **(5.27)** podemos tomar, como consecuencia de **(5.29)**, $S_x = S_{1x}$, tal que $\theta(S_x) \subset S_x$, para cada $z \in S_x$, $\theta^n(z) \to x$ y para cada $z \in U_x$, $X[t(z), z] \in S_x$. Que $[0, \infty) \subset I(z)$ se sigue de que para $z_1 = X[t(z), z]$, $z_{n+1} = X[t(z_n), z_n] = X(s_n, z)$, siendo

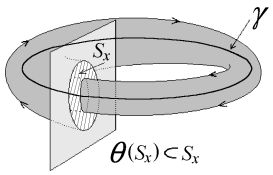


Figura 5.7. Aplicación de Poincaré

$$s_n = t(z) + t(z_1) + \cdots + t(z_n),$$

y $s_n \to \infty$, pues $t(z_n) \to T$. ∎

Teorema de Liapunov de Estabilidad de Orbitas Cíclicas 5.31
Si γ *es una órbita cíclica de* $D \in \mathcal{D}(U)$, *con multiplicadores característicos en el disco unidad*

$$\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < 1\},$$

entonces γ *es asintóticamente estable.*

Demostración. Para cada $x \in \gamma$ consideremos una sección cualquiera, pasando por x y el abierto U_x del resultado anterior. Veamos que $U(\gamma) = \cup U_x$ satisface el resultado, es decir que la órbita de cada $p \in U(\gamma)$ se aproxima a γ.

En primer lugar existe un $x \in \gamma$, tal que $p \in U_x$ y por tanto existe $s_n \to \infty$ tal que $x_n = X(s_n, p) \to x$.

Consideremos un $r \in (0, T]$, $z = X(r, x) \in \gamma$ y S una sección local por z. Apliquemos **(5.30)** a z y S y **(5.25)** a x, r y S. Entonces existen sendos abiertos $V_z, V_x \subset U$, entornos de z y x respectivamente, y aplicaciones diferenciables

$$t_z \colon V_z \to \mathbb{R}\ , \quad t_x \colon V_x \to \mathbb{R},$$

tales que $t_z(z) = T$, $t_x(x) = r$ y para cada $z' \in V_z$ y cada $x' \in V_x$ se verifica

$$X[t_z(z'), z'] \in S_z\ , \quad X[t_x(x'), x'] \in S_z.$$

Ahora como $x_n = X(s_n, p) \to x$, $X(s_n, p) \in V_x$ a partir de un $m \in \mathbf{N}$ en adelante y para $t_0 = s_m + t_x(x_m)$, tendremos que

$$p_1 = X(t_0, p) = X(t_x(x_m), X(s_m, p)) = X(t_x(x_m), x_m) \in S_z,$$

y por **(5.30)**, la sucesión $p_{n+1} = X[t_z(p_n), p_n] \in S_z$, converge a z y puesto que el z era arbitrario, hemos demostrado que la órbita de p se aproxima a γ. ∎

Teorema 5.32 *Si $\gamma \subset U$ es una órbita cíclica asintóticamente estable, de $D \in \mathcal{D}(U)$, con entorno $U(\gamma)$, entonces para todo entorno V de γ y todo $p \in U(\gamma)$, existe un $t_p > 0$ tal que para $t \geq t_p$ se tiene $X(t, p) \in V$.*

Demostración. Sea $p \in U(\gamma)$ y consideremos un $z \in \gamma$ y una sección local S pasando por z. Sabemos que existe U_z, entorno abierto de z en U y $t\colon U_z \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $t \geq 0$, $t(z) = T$, $p_1 = X(t_0, p) \in S \cap U_z$, para un $t_0 > 0$ y

$$p_{n+1} = X[t(p_n), p_n] = X[s_n, p] \in S \cap U_z \ , \quad \lim p_n = z,$$

por tanto $t(p_n) \to T$ y $M = \sup\{|t(p_n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Ahora por ser X diferenciable es lipchiciana en cada compacto y

$$X(r, p_n) \to X(r, z) \in \gamma,$$

uniformemente en $|r| \leq M$, pues existe un $\epsilon > 0$, tal que $[-M, M] \times B[z, \epsilon] \subset \mathcal{W}_D$. Ahora dado un entorno V de γ, tendremos que $d(\gamma, V^c) = \delta > 0$, y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq m$ y todo $|r| \leq M$,

$$X(r, p_n) = X(r + s_n, p) \in V,$$

siendo

$$t_0 + t(p_1) + \cdots + t(p_n) = s_n \to \infty, \quad 0 < s_{n+1} - s_n = t(p_{n+1}) \leq M,$$

y basta tomar $t_p = s_m$, pues si $t \geq s_m$, existe $n \geq m$ tal que $s_n \leq t \leq s_{n+1}$ y $r = t - s_n \leq s_{n+1} - s_n = t(p_{n+1}) \leq M$, por tanto

$$X(t, p) = X(r + s_n, p) = X(r, p_n) \in V. \quad ∎$$

5.11. El Teorema de Poincaré–Bendixson

El resultado central de esta lección es válido cuando $\mathcal{E}$ tiene dimensión 2. En él haremos uso del siguiente teorema peculiar del plano real.

Teorema de la Curva de Jordan 5.33 *Sea $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ continua, tal que $h(a) = h(b)$ y $h(x) \neq h(y)$, para $x, y \in [a,b)$ distintos y sea $C = h[a,b]$. Entonces $\mathbb{R}^2 - C = A \cup B$ donde A y B son abiertos conexos disjuntos, con A acotado —llamado el interior de la curva—, y B no acotado —llamado el exterior de la curva—, además $\mathrm{Adh}\,(A) = A \cup C$ y $\mathrm{Adh}\,(B) = B \cup C$.*

Definición. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$, $D \in \mathcal{D}(U)$ y γ una órbita cíclica con período T. Diremos que la órbita de $q \in U$ se *aproxima en espiral a* γ, si para cada $x \in \gamma$ y cada sección local S de D en x, el conjunto $X_q[(0,\infty)] \cap S$ es numerable, de la forma $\{X_q(t_n) = x_n\}$, con t_n una sucesión tal que:

a) t_n es creciente y $t_n \to \infty$.
b) x_n está entre x_{n-1} y x_{n+1}.
c) $x_n \to x$.

Ejercicio 5.11.1 En las condiciones de la definición anterior, demostrar que:

$$t_{n+1} - t_n \to T.$$

Lema 5.34 *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$. En las condiciones de (5.26): $D \in \mathcal{D}(U)$, $q \in U$, $p \in \Omega_q$ no singular y S sección local de D por p, se tiene que para*

$$\{x_n = X_q(t_n)\} = X_q[0,\infty) \cap S.$$

c) Si $x_1 = x_2$, entonces $x_n = p$ para todo n y la órbita de q es cíclica.

d) Si $x_1 \neq x_2$, entonces todos los x_n son distintos, x_n está entre x_{n-1} y x_{n+1} y $x_n \to p$.

Demostración. (c) Si $x_1 = x_2$, entonces X_q es cíclica y $X_q(t) = X_q(t + nT)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ y $T = t_2 - t_1$. Ahora bien existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$t = t_3 + nT \in [t_1, t_2],$$

y por tanto $X_q(t) = X_q(t_3) \in S$, entonces $t = t_1$ ó $t = t_2$. Se sigue así que todos los x_n coinciden y coinciden con p, pues p es un punto de acumulación de los x_n.

d) Supongamos que $x_1 \neq x_2$, entonces la curva C formada por el segmento x_1x_2 y por $X_q(t)$, para $t \in (t_1, t_2)$, divide al plano en dos abiertos conexos A y B, por **(5.33)**. Tenemos ahora tres casos:

1) Si existe $r \in (t_2, t_3)$, tal que $X_q(r) \in A$, entonces para que $X_q(t)$ entre en B, debe cortar a C, pero por una parte no puede atravesar a $X_q[(t_1, t_2)]$, ya que si $X_q(a) = X_q(b)$ con $a > r$ y $b \in (t_1, t_2)$, entonces podemos considerar el mínimo a que lo verifica, y para él $X_q(a - \epsilon) = X_q(b - \epsilon)$, para un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, siendo así que $X_q(a-\epsilon) \in A$ y $X_q(b-\epsilon) \in C$. Y tampoco puede atravesar C por el segmento x_1x_2, pues en ese punto, D tendría un sentido distinto que en x_1 y x_2. Se sigue así que $X_q(t)$ debe estar en A para todo $t \geq r$ y si $S - x_1x_2 = S_1 \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son segmentos cerrados disjuntos, $S_1 \subset B$ y con extremo x_1 y $S_2 \subset A$ con extremo x_2, entonces $x_3 \in S_2$ y x_2 está entre x_1 y x_3. El resultado se sigue por inducción. Además los x_n tienen a lo sumo un punto de acumulación y p lo es.

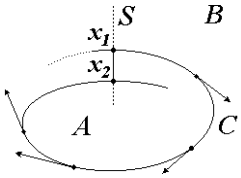


Figura 5.8.

2) Si existe $r \in (t_2, t_3)$ tal que $X_q(r) \in B$, por la misma razón de antes debe mantenerse en B y el resultado se concluye de una forma similar.

3) Si $X_q(t_2, t_3) \subset C \subset S \cup X_q(t_1, t_2)$, como $X_q(t_2, t_3) \cap S$ es finito, tendremos que $X_q(t_2, t_3) \cap X_q(t_1, t_2)$ es no vacío, por tanto existen $a \in (t_1, t_2)$ y $a + T \in (t_2, t_3)$, tales que $X_q(a) = X_q(a + T)$ y por tanto $X_q(t_1 + T) = X_q(t_1) \in S$, para $t_1 + T \in (t_1, t_3)$, por tanto $t_1 + T = t_2$ y $x_1 = x_2$, lo cual es absurdo. ∎

Corolario 5.35 *Sea U abierto de $\mathbb{R}^2$, $q \in U$ y S una sección local de $D \in \mathcal{D}(U)$, entonces $S \cap \Omega_q$ tiene a lo sumo un punto.*

Lema 5.36 *Sea U abierto de $\mathbb{R}^2$, $q \in U$ y $D \in \mathcal{D}(U)$. Si $X_q(0, \infty)$ está en un compacto y Ω_q contiene una órbita cíclica γ, entonces $\Omega_q = \gamma$. Además o bien la órbita de q es γ o bien se aproxima a ella en espiral.*

Demostración. Supongamos que $\Omega_q - \gamma$ es no vacío, como cerrado no puede ser porque Ω_q es conexo, tendremos que existe $x_n \in \Omega_q - \gamma$,

tal que $x_n \to x \in \gamma$.

Ahora como $D_x \neq 0$, podemos considerar una sección local S de D pasando por x y existe V entorno de x y $t\colon V \to \mathbb{R}$ diferenciable tales que $t(x) = 0$ y $X[t(z), z] \in S$ para cada $z \in V$. Como a partir de un n es $x_n \in V$, tendremos que $X[t(x_n), x_n] \in S$. Además como $x_n \in \Omega_q$, tendremos por **(5.22)** que $X[t(x_n), x_n] \in \Omega_q$, y por **(5.35)** que $x = X[t(x_n), x_n]$, es decir que

$$x_n = X[-t(x_n), x] \in \gamma,$$

en contra de lo supuesto. La última parte es consecuencia de **(5.34)**, pues si la órbita de q es cíclica, coincide con $\Omega_q = \gamma$ y si la órbita de q no es cíclica, entonces está en el interior de γ ó en el exterior. Además si $z \in \gamma$ y S es una sección local de D pasando por z, entonces existe una sucesión creciente $t_n \to \infty$, tal que $X_q(t_n) \to z$ en forma ordenada por el segmento S y

$$\{X_q(t_n)\} = S \cap X_q[0, \infty),$$

y el resultado se sigue, la aproximación de X_q a γ es en espiral. ∎

Teorema De Poincare–Bendixson 5.37 *Sea U abierto de $\mathbb{R}^2$, $q \in U$ y $D \in \mathcal{D}(U)$, tales que $X_q(0, \infty)$ está en un compacto K. Si existen $p \in \Omega_q$ y $x \in \Omega_p$ tales que $D_x \neq 0$ (en particular si K no contiene singularidades de D), entonces Ω_q es una órbita cíclica de D en K. Además o la órbita de q es cíclica, siendo Ω_q, o bien X_q se aproxima en espiral por dentro o por fuera a Ω_q.*

Demostración. Como Ω_q es invariante, tendremos que $X_p(\mathbb{R}) \subset \Omega_q$ y por ser cerrado $\Omega_p \subset \Omega_q$.

Sea S una sección local de D pasando por $x \in \Omega_p$, que existe pues por hipótesis $D_x \neq 0$. Entonces $S \cap \Omega_q = \{x\}$, pues por **(5.35)** a lo sumo tiene un punto y

$$x \in S \cap \Omega_p \subset S \cap \Omega_q,$$

y como $X_p(t) \in \Omega_q$, tendremos que

$$\{x_1, x_2, \ldots\} = X_p[0, \infty) \cap S \subset \Omega_q \cap S = \{x\},$$

por tanto $x_1 = x_2 = x$ y se sigue de **(5.34)** que la órbita γ de p, es la órbita de x y es cíclica. Ahora el resultado es consecuencia del lema anterior **(5.36)** y $\Omega_q = \gamma$. ∎

Ejemplo 5.38 Como una aplicación de este resultado consideremos el siguiente campo

$$D = [-2y + x(2 - x^2 - 2y^2)]\frac{\partial}{\partial x} + [x + y(2 - x^2 - 2y^2)]\frac{\partial}{\partial y},$$

para el que hay órbitas que entran en el compacto

$$K = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + 2y^2 \leq 4\},$$

y en él se quedan, pues para

$$H = 2(x\partial x + 2y\partial y) = \text{grad}(x^2 + 2y^2),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} < D, H > &= [-2y + x(2 - x^2 - 2y^2)]2x + [x + y(2 - x^2 - 2y^2)]4y \\ &= 2(x^2 + 2y^2)(2 - x^2 - 2y^2), \end{aligned}$$

es positivo en los puntos $x^2+2y^2 = 1$ lo cual significa que D sale de esa elipse, mientras que es negativo en $x^2 + 2y^2 = 4$, lo cual significa que entra en la elipse. Además es fácil verificar que D no se anula en K, por tanto el teorema de Poincaré–Bendixson nos asegura que D tiene en K una órbita cíclica, que es $x^2 + 2y^2 = 2$ —aunque esto no lo dice el teorema—.

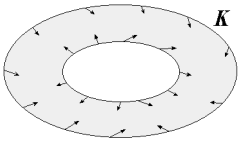


Figura 5.9.

Teorema 5.39 *Sea U abierto de $\mathbb{R}^2$, $D \in \mathcal{D}(U)$ con singularidades aisladas y $q \in U$ tal que $X_q(0, \infty)$ está en un compacto K. Si existe $p \in \Omega_q$ tal que $D_p = 0$, entonces:*

a) Si para todo $x \in \Omega_q$ es $D_x = 0$, entonces $\Omega_q = \{p\}$ y $X_q(t) \to p$, cuando $t \to \infty$.

b) Si existe $a \in \Omega_q$ tal que $D_a \neq 0$, entonces $\Omega_q = P \cup C$, con $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$ un conjunto finito de singularidades de D y $C = \cup\gamma_a$ una unión de órbitas de puntos $a \in U$ no singulares. Tales que para cada a existen $p_i, p_j \in P$, $X_a(t) \to p_i$, cuando $t \to \infty$ y $X_a(t) \to p_j$ cuando $t \to -\infty$.

Demostración. Como Ω_q es compacto a lo sumo contiene un conjunto finito $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$ de singularidades de D, pues en caso contrario

tendríamos un punto límite —que también sería singular por la continuidad de D— y no sería aislado. Por tanto $\Omega_q = P \cup C$, con C unión de órbitas γ_a de puntos no singulares.

a) En este caso $\Omega_q = P$ y por ser Ω_q conexo, tendríamos que $\Omega_q = \{p\}$. Que $X_q(t) \to p$ es consecuencia de **(5.22)**.

b) Supongamos que para alguna γ_a de C existe $x \in \Omega_a$ con $D_x \neq 0$, entonces por **(5.36)**, Ω_q es cíclica, en contra de la hipótesis, pues existe $p \in \Omega_q$, con $D_p = 0$.

Por tanto para toda γ_a de C y todo $x \in \Omega_a$ es $D_x = 0$. Se sigue de (a) que Ω_a es un punto de P al que converge $X_a(t)$ cuando $t \to \infty$. Por simetría (considérese el campo $-D$), se obtiene que $X_a(t)$ tiende a un punto de P (que es α_a), cuando $t \to -\infty$. ∎

Remitimos al lector al **Teorema de Stokes** (14.12), pág.988, del que una consecuencia es el siguiente resultado sobre la no existencia de órbitas cíclicas.

Criterio De Bendixson 5.40 *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Si $\operatorname{div}(D) > 0$ (resp. < 0), entonces D no tiene órbitas cíclicas.*

Demostración. Supongamos que S es una órbita cíclica del campo $D = f\partial_x + g\partial_y$ y sea $C = S \cup S^0$ —por el teorema de *Jordan* C es compacto no vacío—. Entonces $\omega D = 0$ para $\omega = f dy - g dx$ y por el **Teorema de Stokes**, (14.12), pág.988 llegamos a un absurdo, pues

$$0 = \int_S \omega = \int_C d\omega = \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx \wedge dy > 0,$$

ya que C tiene interior no vacío. ∎

5.12. Estabilidad de órbitas en el plano

Definición. Diremos que una *órbita cíclica* γ de $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ es *estable* si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $p \in \mathbb{R}^2$ verifica $d(p, \gamma) < \delta$, entonces $(0, \infty) \subset I(p)$ y

$$d[X_p(t), \gamma] < \epsilon,$$

para $t \geq 0$.

Utilizaremos el siguiente resultado, aunque no daremos su demostración.

Lema 5.41 *Todo campo $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ se anula en el interior de sus órbitas cíclicas.*

Teorema 5.42 *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ y $q \in \mathbb{R}^2$ tal que $X_q(0,\infty)$ esté en un compacto sin singularidades de D. Si q está en el interior A de la órbita cíclica Ω_q (resp. en el exterior B), entonces para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $p \in A$ (resp. $p \in B$) y $d(p,\Omega_q) < \delta$, entonces $d[X_p(t),\Omega_q] < \epsilon$, para todo $t > 0$ y X_p se aproxima en espiral a Ω_q.*

Demostración. Sea $\eta > 0$ tal que para toda singularidad z de D, $d(z,\Omega_q) > \eta$.

Supongamos que $q \in A$ y sean $x \in \Omega_q$, S una sección local de D pasando por x y t_n la sucesión creciente de **(5.26)** tal que

$$\{X_q(t_n)\} = X_q[0,\infty) \cap S.$$

Entonces dado $0 < \epsilon < \eta$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para $t \geq t_n$,

$$d[X_q(t),\Omega_q] < \epsilon,$$

y además si denotamos con K_n el compacto limitado por las curvas cerradas Ω_q y C_n, definida por el segmento $X_q(t_n)X_q(t_{n+1})$ y el arco $X_q[(t_n,t_{n+1})]$, entonces para todo $z \in K_n$

$$d(z,\Omega_q) < \epsilon.$$

Si ahora consideramos

$$\delta = d[C_n,\Omega_q],$$

se tiene que

$$\{z \in A:\ d(z,\Omega_q) < \delta\} \subset K \subset \{z \in A:\ d(z,\Omega_q) < \epsilon\},$$

y si $p \in A$ y $d(p,\Omega_q) < \delta$, tendremos que $p \in K$ y $X_p(t)$ se mantiene en K pues no puede cortar a otra curva ni salir por el segmento, por lo que

$$d[X_p(t),\Omega_q] < \epsilon,$$

para $t \geq 0$. Se sigue de **(5.27)** que Ω_p es una órbita cíclica y del Lema anterior que en su interior hay un punto singular de D, por lo que su interior no está en R, es decir contiene al interior de C_n y por tanto a q. Ahora si $\Omega_p \neq \Omega_q$, llegamos a un absurdo, pues X_q tendría que cortar a Ω_p para aproximarse a Ω_q. Por tanto $\Omega_p = \Omega_q$. Además X_q y X_p se cortan con cualquier sección local alternadamente. ∎

Teorema 5.43 *Condición necesaria y suficiente para que una órbita cíclica γ de $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ sea estable es que tanto para su interior A como para su exterior B se cumpla una de las situaciones:*

a) Existe $q \in A$ (resp. $q \in B$), tal que $X_q(t) \to \gamma$, cuando $t \to \infty$.

b) Existen órbitas cíclicas en A (resp. en B), tan próximas a γ como queramos.

Demostración. "$\Leftarrow$" Si lo que tenemos es (a) es consecuencia del resultado anterior. Si lo que tenemos es (b) observamos que si p está entre dos órbitas cíclicas, entonces $X_p(t)$ se mantiene entre ellas y por tanto próxima a γ.

"$\Rightarrow$" Si γ es estable y para un $\epsilon > 0$ no existen puntos singulares de D, ni órbitas cíclicas que disten de γ menos de ϵ, entonces como existe un $\delta > 0$ tal que para p verificando $d(p, \gamma) < \delta$, se tiene $d[X_p(t), \gamma] < \epsilon/2$, tendríamos por el Teorema de Poincare–Bendixson que Ω_p es una órbita cíclica de D que dista de γ menos de ϵ, por tanto $\Omega_p = \gamma$, y tenemos (a). ∎

5.13. Ejercicios resueltos

Ejercicio 5.2.2.- Soltamos una bola en un cuenco con superficie dada por $z = (ax^2 + by^2)/2$. Encontrar la EDO que rige su movimiento (suponemos que la gravedad es el vector $g = (0, 0, -1)$, demostrar que el origen con velocidad nula es un punto singular de la ecuación y encontrar su linealización en ese punto.

Indicación.- Sea $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una trayectoria de la bola y consideremos los vectores independientes en el punto $\sigma(t)$

$$e_1 = (1, 0, ax), \quad e_2 = (0, 1, by), \quad e_3 = (ax, by, -1),$$

donde e_1 y e_2 son tangentes a la superficie y e_3 es perpendicular, para los que

$$g = (0, 0, -1) = -\frac{ax}{1 + a^2x^2 + b^2y^2}e_1 - \frac{by}{1 + a^2x^2 + b^2y^2}e_2 + \frac{1}{1 + a^2x^2 + b^2y^2}e_3$$

Entonces la velocidad de la bola es

$$\sigma'(t) = (x', y', axx' + byy') = x'e_1 + y'e_2,$$

y su aceleración

$$\begin{aligned}\sigma''(t) &= x''e_1 + y''e_2 + x'e_1' + y'e_2' = x''e_1 + y''e_2 + x'(0, 0, ax') + y'(0, 0, by') \\ &= x''e_1 + y''e_2 - (ax'^2 + by'^2)e \\ &= (x'' + \frac{(ax'^2 + by'^2)ax}{1 + a^2x^2 + b^2y^2})e_1 + (y'' + \frac{(ax'^2 + by'^2)by}{1 + a^2x^2 + b^2y^2})e_2 - \frac{ax'^2 + by'^2}{1 + a^2x^2 + b^2y^2}e_3,\end{aligned}$$

por tanto como las fuerzas que actúa en su movimiento son la gravedad, g, y la que la mantiene en la superficie, tendremos que si la masa de la bola es m, las ecuaciones de Newton aseguran que

$$m\sigma'' = me + F,$$

para F un vector perpendicular a la superficie, es decir múltiplo de e_3, por tanto como las e_i son independientes, tendremos que ambos vectores deben tener las dos primeras componentes (en la base e_i) iguales

$$\begin{aligned}x'' + \frac{(ax'^2 + by'^2)ax}{1 + a^2x^2 + b^2y^2} &= -\frac{ax}{1 + a^2x^2 + b^2y^2} \\ y'' + \frac{(ax'^2 + by'^2)by}{1 + a^2x^2 + b^2y^2} &= -\frac{by}{1 + a^2x^2 + b^2y^2}\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned}x'' + \frac{(1 + ax'^2 + by'^2)ax}{1 + a^2x^2 + b^2y^2} &= 0, \\ y'' + \frac{(1 + ax'^2 + by'^2)by}{1 + a^2x^2 + b^2y^2} &= 0.\end{aligned}$$

y la linealización en el origen con velocidad 0 es

$$\begin{aligned}x'' + ax &= 0, \\ y'' + by &= 0.\end{aligned}$$

Ejercicio 5.3.1.- Demostrar que si p es un punto estable, entonces para todo entorno U_p de p en U, existe otro $W_p \subset U_p$, tal que para todo $q \in W_p$ se tiene $[0,\infty) \subset I(q)$ y $X_q(t) \in W_p$ para todo $t \geq 0$.

Indicación.- Considérese el conjunto, en los términos de la definición,

$$W_p = \{q \in U_p : \exists r > 0 / \ \ X_q(t) \in V_p, \forall t \geq r\}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 5.3.3.- Demostrar que el origen es un punto estable del campo en coordenadas polares

$$\frac{\partial}{\partial \theta} + \rho \operatorname{sen} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}.$$

Indicación.- Demostrar que el campo tiene órbitas circulares de radio tan pequeño como queramos. $\blacksquare$

Ejercicio 5.5.3.- Demostrar que un campo es conservativo si y sólo si es un campo gradiente. (Observemos que f está determinada salvo una constante).

Solución.- Si es un campo gradiente $D = \operatorname{grad} f$, entonces tomando un sistema de coordenadas lineales x_i correspondiente a una base ortonormal, tendremos que

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

por tanto por la regla de la cadena

$$\int_\gamma \omega = \int_0^L < D_{\sigma(s)}, T_{\sigma(s)} > ds = \int_0^L (f \circ \sigma)'(s) ds = f(b) - f(a).$$

Supongamos ahora que D es conservativo, entonces para cada $x \in U$ podemos definir la función $f(x)$ como el trabajo de D, a lo largo de cualquier curva que una un punto $a \in U$ prefijado, con x. Entonces si las componentes de D son f_i, tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1 + t, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\int_{x_1}^{x_1+t} < D, \partial x_1 > ds}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\int_{x_1}^{x_1+t} f_1(s, x_2, \ldots, x_n) ds}{t} = f_1(x), \end{aligned}$$

y lo mismo para el resto de componentes. $\blacksquare$

Ejercicio 5.8.1.- Consideremos las ecuaciones del péndulo con rozamiento ($a > 0$), es decir

$$\begin{aligned} \theta'(t) &= z(t), \\ z'(t) &= az - \operatorname{sen} \theta(t), \end{aligned}$$

y demostrar que para cada $k < 2$ y $\ell(\theta, z) = z^2/2 + 1 - \cos\theta$, el compacto

$$K = \{(\theta, z) : \ -\pi \leq \theta \leq \pi, \ \ell(\theta, z) \leq k\},$$

está en la cuenca del punto $p = (0, 0)$.

Solución.- Nuestro campo es

$$D = z\frac{\partial}{\partial\theta} - (az + \operatorname{sen}\theta)\frac{\partial}{\partial z},$$

si consideramos la energía $\ell(\theta, z) = z^2/2 + 1 - \cos\theta$ (donde la energía potencial la tomamos nula en el punto mas bajo del péndulo), entonces ℓ es de *Liapunov* para D en p, pues por una parte $\ell(0,0) = 0$ y $\ell(\theta, z) > 0$, en el resto de puntos. Y por otra parte $D\ell \leq 0$ pues

$$D\ell = z\operatorname{sen}\theta - (az + \operatorname{sen}\theta)v = -az^2 \leq 0.$$

Ahora nuestro compacto

$$\begin{aligned} K &= \{(\theta, z) : |\theta| \leq \pi,\ \ell(\theta, z) \leq k\} \\ &= \{(\theta, z) : |\theta| < \pi,\ \ell(\theta, z) \leq k\}, \end{aligned}$$

y si $q \in K$ y $(\alpha, \beta) = I(q)$, entonces $\beta = \infty$ y $X_q(t) \in K$ para todo $t \geq 0$. Veámoslo.

Sea

$$R = \sup\{r < \beta :\ X_q(t) \in K,\ 0 \leq t \leq r\},$$

entonces si $R < \beta$, $X_q(R) \in K$ y como

$$[\ell \circ X_q]' = D\ell \circ X_q \leq 0,$$

tenemos dos casos:

a) Existe $t \in (0, R)$ tal que $[\ell \circ X_q]'(t) < 0$, entonces

$$\ell[X_q(R)] < \ell(q) \leq k,$$

y R no es máximo, pues $X_q(R)$ está en el interior de K.

b) Para cada $t \in [0, R]$

$$0 = [\ell \circ X_q]'(t) = D\ell[X_q(t)] = -az(t)^2,$$

para $X_q(t) = (\theta(t), z(t))$. Por tanto $z(t) = 0$ en $[0, R]$ y por tanto $\theta(t)$ es constante y $\operatorname{sen}\theta = 0$, pues

$$z' = -az - \operatorname{sen}\theta,$$

lo cual implica $|\theta(t)| = \pi$ en $[0, R]$, en contra de la definición de K.

Por tanto $R = \beta = \infty$ y por (b) K no contiene ninguna órbita de D en la que ℓ sea constante. Así nuestro anterior resultado implica que $K \subset \mathbf{C}(0,0)$. ∎

Ejercicio 5.9.1.- Demostrar que si $\mathcal{O}$ es la órbita de un punto no singular p de un campo $D \in \mathcal{D}(U)$, son equivalentes: (a) $\mathcal{O}$ es cíclica. (b) Existen $r \in I(p)$ y $T > 0$ tales que

$$X_p(r) = X_p(r + T).$$

(c) Con la topología inducida por U, $\mathcal{O}$ es homeomorfa a la circunferencia unidad $\mathcal{S}_1$.

Solución.- (a)⇔(b) se deja al lector.

(a)⇒(c) Si $X_p(T) = p$, tenemos la biyección continua $X_p\colon [0, T) \to \mathcal{O}$ y podemos definir la biyección continua $\phi\colon [0, T) \to \mathcal{S}_1$, $\phi(t) = (\cos(2\pi t/T), \operatorname{sen}(2\pi t/T))$. Ahora $F = \phi \circ X_p^{-1}\colon \mathcal{O} \to \mathcal{S}_1$ es una biyección y es homeomorfismo.

(a)⇐(c) Si existe un homeomorfismo $G\colon \mathcal{O} \to \mathcal{S}_1$, la órbita es compacta y se sigue de (2.28), pág.100, que $I(p) = \mathbb{R}$, por tanto tenemos una aplicación continua

y sobre $X_p\colon \mathbb{R} \to \mathcal{O}$ que si no es inyectiva, por (b) $\mathcal{O}$ es cíclica. En caso contrario tenemos que $G \circ X_p\colon \mathbb{R} \to \mathcal{S}_1$ es biyectiva y continua y lo mismo si quitamos el 0 y su imagen $G(p)$ y si consideramos la proyección estereográfica en $\mathcal{S}_1$, desde $G(p)$, tendremos un homeomorfismo $\mathcal{S}_1\backslash\{G(p)\} \to \mathbb{R}$ y en definitiva una aplicación biyectiva y continua $\phi\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ lo cual es absurdo pues $\phi(0,\infty)$ y $\phi(-\infty,0)$ son conexos y complementarios, por tanto de la forma $(-\infty,a)$ y $[a,\infty)$ (ó $(-\infty,a]$ y (a,∞)) y por ser biyección existe $t>0$ (ó $t<0$) tal que $\phi(t)=a$ —esto da cuatro casos de los que analizamos uno—. Entonces en $(0,\infty)$, ϕ alcanza el mínimo a en t y por continuidad en $(t/2,t)$ toma todos los valores entre a y $\phi(t/2)>a$ y en $(t,2t)$ también toma todos los valores entre a y $\phi(2t)>a$, por tanto no es inyectiva y llegamos a un absurdo. ∎

Ejercicio 5.9.2.- Demostrar que por todo punto no singular de D pasa una sección local y que esta sección es cortada por cada órbita de un lado al otro del hiperplano y que todas las órbitas lo hacen en "el mismo sentido" —entendiendo que un hiperplano divide el espacio en dos regiones A y B, de este modo hay dos posibles sentidos de atravesarlo, de A a B ó de B a A—.

Solución.- Sea $D_p = \sum a_i \partial_{ix} \neq 0$ entonces basta tomar $h = \sum a_i x_i$ y el hiperplano

$$H = \{z :\ h(z) = h(x)\}.$$

Como $Dh(x) = \sum a_i^2 > 0$, $Dh > 0$ en todo un entorno de x —que podemos tomar cerrado— y S es la intersección de este entorno con H.

Por último si $D = \sum f_i \partial x_i$, y en $z \in S$ es $f_i(z) = b_i$, tendremos que

$$0 < Dh(z) = \sum a_i b_i,$$

lo cual significa que todos los vectores D_z, atraviesan H en el mismo sentido, que es el del vector de componentes $(a_1,\dots,a_n)$. ∎

Ejercicio 5.9.3.- Sea $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ con una curva integral γ cíclica con período T. Sea E un campo independiente de D en los puntos de γ. Demostrar que:

(a) Si $[D,E]=0$, entonces el multiplicador característico de γ es 1.

(b) Si $[E,D] = gE$, entonces el multiplicador característico de γ es

$$\mathrm{e}^{\int_0^T g[\gamma(s)]\,ds}.$$

Indicación. (a) Como $[D,E]=0$, el grupo uniparamétrico τ_t de D conserva las curvas integrales σ_p de E, pues como se tiene la igualdad (para $t,r \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}^2$ en los que los términos estén definidos) (ver 2.41, pág.107)

$$\tau_t[\sigma_p(r)] = \sigma_r[\tau_t(p)] = \sigma_{\tau_t(p)}(r),$$

y como $\tau_T(p) = p$, para p en la órbita cíclica, tendremos que

$$\tau_{T*}(D_p) = D_{\tau_T(p)} = D_p,$$
$$\tau_{T*}(E_p) = \tau_{T*}[\sigma_{p*}(\partial_t)_0] = \sigma_{p*}(\partial_t)_0 = E_p,$$

(b) Consideremos un punto $p=\gamma(0)$ de la órbita y un entorno de p en el que exista una función f tal que $[D,fE]=0$, es decir $Df = fg$, por tanto restringiéndonos a $\gamma(t)$, $f' = fg$, que tiene solución única verificando $f(0)=1$

$$f(t) \equiv f[\gamma(t)] = \mathrm{e}^{\int_0^t g[\gamma(s)]\,ds},$$

ahora si consideramos el grupo uniparamétrico σ_t de $H = fE$, como $[D, H] = 0$, tendremos como antes que $\tau_t \circ \sigma_p = \sigma_{\tau_t(p)}$, por lo tanto

$$\tau_{t*}(D_p) = D_{\tau_t(p)},$$
$$\tau_{t*}(E_p) = \tau_{t*}H_p = H_{\gamma(t)} = f(t)E_{\gamma(t)},$$

y el resultado se sigue repitiendo este argumento y continuando la función f y el campo H a lo largo de la órbita (observemos que la f no es global pues al dar la vuelta $f(\gamma(T))$ en general no vale $f(\gamma(0))$, siendo $\gamma(T) = \gamma(0) = p$). En definitiva se tiene que τ_{T*} tiene dos autovalores 1 y $f(T)$. ∎

Ejercicio 5.11.1.- En las condiciones de la definición de órbita que se aproxima en espiral a una órbita cíclica γ con período T, demostrar que

$$t_{n+1} - t_n \to T.$$

Solución.- Para $0 < \epsilon < T$ existe un entorno V de x y una aplicación diferenciable $t\colon V \to \mathbb{R}$, tal que $t(x) = T$, y para $v \in V$, $X[t(v), v] \in S$ y $|t(v) - T| \leq \epsilon$.

Como $x_n = X_q(t_n) \to x$, tendremos que, salvo para un número finito, los $x_n \in V$, por tanto

$$X[t(x_n) + t_n, q] = X[t(x_n), x_n] \in S\ , \quad |t(x_n) - T| \leq \epsilon,$$

de donde se sigue que existe $k \geq 1$, tal que $t_{n+k} = t(x_n) + t_n$ y

$$0 < s_n = t_{n+1} - t_n \leq t_{n+k} - t_n = t(x_n) \leq T + \epsilon.$$

Tenemos así que s_n está acotada y si $r \in [0, T + \epsilon]$ es un punto límite suyo, entonces $x = X(r, x)$, pues

$$x_{n+1} = X(t_{n+1}, q) = X[s_n, X(t_n, q)] = X[s_n, x_n].$$

por tanto r es un múltiplo de T, y $r = 0$ ó $r = T$.

Veamos que $r = 0$ no puede ser.

Sea h la función lineal que define S. Entonces la fórmula de Taylor asegura que existe H continua tal que

$$h[X(t, z)] - h(z) = F(t, z) = tH(t, z),$$

pues para $g(s) = F(ts, z)$, tendremos que

$$F(t, z) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)ds = t\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial t}(st, z)ds = tH(t, z),$$

y llegamos a un absurdo, pues

$$x_n = X(t_n, q) \in S, \qquad X(s_n, x_n) = x_{n+1} \in S,$$
$$0 = \frac{h[X(s_n, x_n)] - h(x_n)}{s_n} = H(s_n, x_n) \to H(0, x) = D_x h. \quad ∎$$

5.14. Bibliografía y comentarios

Los libros consultados en la elaboración de este tema han sido:

Abraham, Ralph and Mardsen, Jerrold E.: "*Foundations of Mechanics*". Ed. Addison–Wesley, 1978.

Arnold, V.I.: "*Equations differentielles ordinaires*". Ed. Mir, Moscou, 1974.

Coddington and Levinson: "*Theory of ordinary Differential Equations*". McGraw–Hill, 1955.

Hurewicz, W.: "*Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias*". Ediciones RIALP, 1966.

Lefschetz, S.: "*Differential equations: Geometric Theory*". Dover Pub., 1977.

Rouche, N. and Mahwin, J.: "*Ordinary Differential Equations. Stability and periodic solutions*". Pitman Adv.Pub.Prog., 1980.

Smale, S. and Hirsch, M.W.: "*Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*". Alianza Univ., 1983.

El italiano Vito Volterra expone en el prólogo de su libro

Volterra, Vito: "*Lessons sur la Theorie Mathematique de la lutte pour la vie*". Ed. Jacques Gabay, 1990.

que inició sus investigaciones en *1925*, como consecuencia de las conversaciones mantenidas con M. D'ancona, el cual quería saber si se podían estudiar las variaciones en la composición de asociaciones biológicas desde un punto de vista matemático. Fruto de estas investigaciones es la Teoría matemática de las fluctuaciones biológicas que este autor desarrolla en el libro anterior y nosotros hemos estudiado someramente en la lección de aplicaciones.

Se dice que el italo–francés J.L. Lagrange se interesó por las matemáticas tras una lectura temprana de una memoria del astrónomo inglés, que ha dado nombre al famoso cometa, Edmond Halley. Sus mayores contribuciones matemáticas las hizo en teoría de números, en mecánica analítica y en mecánica celeste y parece ser que fue el primero en estudiar problemas de estabilidad en conexión con los puntos de equilibrio de los sistemas conservativos. El Teorema de estabilidad de Lagrange (5.11), pág.297, fue enunciado en *1788* por él y apareció en su obra

Lagrange, J.L.: "*Traite de Mecanique*". 3rd. Ed. Mallet–Bachelier, Paris, 1853.

sin embargo, aunque la prueba que dio era correcta en el caso en que el potencial fuera cuadrático, supuso erróneamente que para potenciales

analíticos, los términos (de la serie) de orden mayor que 2, eran despreciables.

En *1838* POISSON trató en vano de corregir este error suponiendo que cada término de segundo orden era mayor que la suma de los términos de orden mas alto.

Estos dos hechos históricos los menciona

LEJEUNE–DIRICHLET, G.: "*Uber die stabilitat des Gleichgewichts*". 1846.

quien da la primera prueba rigurosa del teorema, razonando directamente de la noción de mínimo del potencial, mas que considerando su desarrollo en serie.

En su tesis de *1892*, el matemático ruso

LIAPUNOV, A.M.: "*The general problem of the stability of motion*". 1892.

dice que fue precisamente la demostración de DIRICHLET la que le inspiró sus teoremas de estabilidad, usando funciones auxiliares. Es esta memoria de LIAPUNOV, básicamente, la fundadora de la teoría moderna de la estabilidad.

POINCARÉ fue entre *1881–1886* y *1892–1899*, el primero en estudiar sistemáticamente las soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales.

La noción de punto límite es de BIRKHOFF (*1927*).

Para resultados relativos al teorema de HARTMAN–GROBMAN remitimos al lector a los libros

HARTMAN, PH.: "*Ordinary differential equations*". Ed. Birkhauser. 1982.

NELSON, E.: "*Topics in dynamics I, flows*". Princeton Univ. Press, 1969.

PALIS, JACOB JR. AND DE MELO, WELINGTON: "*Geometric Theory of Dynamical Systems*". Princeton Univ. Press, 1969.

PERCO, LAWRENCE: "*Differential Equations and Dynamical Systems*". Springer–Verlag, TAM, 7; 1991.

Así mismo remitimos al lector interesado en el teorema de linealización diferenciable, de un campo en un punto hiperbólico, al trabajo de

STERNBERG, S.: "*On the structure of local homeomorphisms of euclidean n–space, II*", Amer. Journal of Math., Vol. **80**, pp.623–631, 1958.

Por último el ejemplo que dimos de un campo en el plano con el origen un punto singular inestable, pero cuya cuenca era todo el plano, apareció en el artículo

Vinograd, R.E.: "*The inadequacy of the method of the characteristic exponents for the study of nonlinear differential equations*". Mat. Sbornik, **41** (83), 431–438 (1957) (R).

y puede estudiarse en detalle en la p.191 del libro de

Hahn, W.: "*Stability of motion*". Springer–Verlag, 1967.

Fin del Tema 5

Parte II

Ecuaciones en derivadas parciales

Tema 6

Sistemas de Pfaff

6.1. Introducción

Nuestro interés en este tema se centra en analizar la siguiente cuestión de naturaleza geométrica:

Campo de rectas.- Consideremos en cada punto $x \in \mathbb{R}^3$ una recta Δ_x "*diferenciablemente colocadas*". ¿Bajo qué condiciones existen curvas $\mathcal{C}$, que recubran el espacio y tales que para cada curva $\mathcal{C}$ y para cada $x \in \mathcal{C}$

$$T_x(\mathcal{C}) = \Delta_x?$$

Las rectas Δ_x podemos definirlas a través de un vector en el punto x y todos sus proporcionales (*distribución*) considerando por ejemplo un campo tangente $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, tal que

$$\Delta_x =< D_x >,$$

ó de sus ecuaciones (*sistema de Pfaff*), considerando dos 1–formas $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(\mathbb{R}^3)$, tales que para cada x

$$\Delta_x = \{D_x \in T_x(\mathbb{R}^3) : \ \omega_{1x} D_x = \omega_{2x} D_x = 0\},$$

en cuyos términos nos preguntamos por la existencia de una familia de curvas tal que por cada punto x pase una curva de la familia, cuya recta tangente en x tenga la dirección del vector D_x.

La contestación a este problema ha sido dada ya en el tema II, pues las curvas integrales de un campo tangente, en términos de coordenadas satisfacen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por otro lado si u, v son funciones con diferenciales independientes, integrales primeras de D, las curvas solución serán

$$\{u = \text{cte}, v = \text{cte}\}.$$

Campo de planos.- Consideremos ahora que en cada punto $p \in \mathbb{R}^3$ colocamos ("diferenciablemente") un plano Δ_p.

¿Bajo qué condiciones existen superficies $\mathcal{S}$, que recubran el espacio y tales que para cada superficie $\mathcal{S}$ y para cada $p \in \mathcal{S}$

$$T_p(\mathcal{S}) = \Delta_p?$$

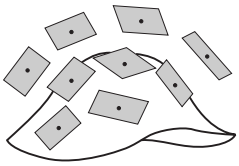


Figura 6.1. Sistema de Pfaff

Como antes, los planos Δ_p podemos definirlos a través de sus ecuaciones (*sistema de Pfaff*), considerando una 1–forma $\omega \in \Omega(\mathbb{R}^3)$, tal que para cada p

$$\Delta_p = \{D_p \in T_p(\mathbb{R}^3) : \ \omega_p D_p = 0\},$$

o a través de sus elementos (*distribución*) considerando por ejemplo dos campos tangentes independientes $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, tales que

$$\Delta_p = < D_{1p}, D_{2p} > .$$

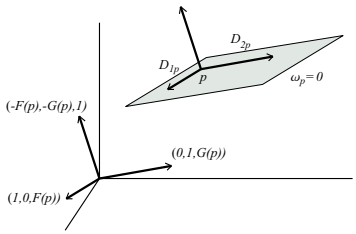


Figura 6.2. Distribución $< D_{1p}, D_{2p} >= \{\omega_p = 0\}$

Hemos dicho que el caso de las rectas se plantea en coordenadas como una ecuación diferencial, veamos ahora que el de los planos se plantea como un sistema de ecuaciones en derivadas parciales: Sean $F, G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ y consideremos la 1–forma

$$\omega = dz - Fdx - Gdy,$$

ó equivalentemente sus campos incidentes independientes (ver Fig.6.2)

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + F\frac{\partial}{\partial z}, \qquad D_2 = \frac{\partial}{\partial y} + G\frac{\partial}{\partial z},$$

Queremos saber si existe una familia de superficies S, tangentes a D_1 y D_2, es decir en las que $i^*\omega = 0$.

Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ es tal que su gráfica $\mathcal{S} = \{z = f(x,y)\}$ es tangente en cada punto suyo p al plano $\Delta_p = \{\omega_p = 0\}$, entonces f es solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= F(x,y,f(x,y)), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= G(x,y,f(x,y)), \end{aligned} \tag{6.1}$$

pues el vector tangente a S en p de componentes $(1,0,f_x)$, es de la forma

$$a_1 D_{1p} + a_2 D_{2p} \equiv a_1(1,0,F) + a_2(0,1,G),$$

por lo que $a_2 = 0$, $a_1 = 1$ y $f_x = F$, y por razones análogas $f_y = G$. Dicho de otro modo, en $T_p(S) = \Delta_p$,

$$\omega = dz - Fdx - Gdy \quad \text{y} \quad d_p(z - f(x,y)) = dz - f_x dx - f_y dy,$$

se anulan; por lo tanto en p las 1–formas $dz - Fdx - Gdy$ y $dz - f_x dx - f_y dy$ son proporcionales, pues tienen el mismo núcleo $T_p(S)$, y como además tienen la misma componente en dz, son iguales y por ser x, y, z coordenadas, $f_x = F$ y $f_y = G$.

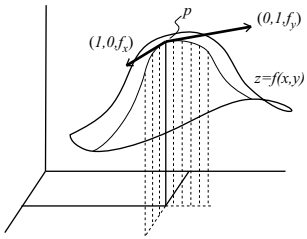


Figura 6.3. Superficie $\{z = f(x,y)\}$ tangente a los planos.

Recíprocamente si f es solución del sistema, su gráfica $\mathcal{S} = \{z = f(x,y)\}$ es tangente a la distribución, pues para la inclusión $i\colon \mathcal{S} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, se tiene en $\mathcal{S}$

$$\omega = dz - Fdx - Gdy = dz - f_x dx - f_y dy = d(z - f(x,y)),$$

por lo que $i^*\omega = i^*(d(z - f(x,y))) = 0$.

Así nuestro problema es equivalente a encontrar una familia de funciones f, tal que para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exista f de la familia que satisfaga (6.1) y $f(x,y) = z$.

En las siguientes lecciones demostraremos que existe una familia de superficies tangentes si y sólo si existen funciones f_1, f_2 tales que

$$[D_1, D_2] = f_1 D_1 + f_2 D_2,$$

ó equivalentemente $\omega \wedge d\omega = 0$. Veamos en nuestro caso en que se traduce esta última condición:

$$\begin{aligned}
\omega \wedge d\omega &= \omega \wedge \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} \right) dx \wedge dy + \frac{\partial F}{\partial z} dx \wedge dz + \frac{\partial G}{\partial z} dy \wedge dz \right] \\
&= \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} - F\frac{\partial G}{\partial z} + G\frac{\partial F}{\partial z} \right] dx \wedge dy \wedge dz = 0 \qquad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \qquad & \frac{\partial F}{\partial y} + G\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial x} + F\frac{\partial G}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Observemos que si existe f satisfaciendo (6.1), entonces esos dos términos, restringidos a S, no son otra cosa que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

6.2. Sistemas de Pfaff y Distribuciones

6.2.1. Sistemas de Pfaff.

Definición. Sea $\mathcal{V}$ una variedad diferenciable (ver el apéndice 6.10, pág.422). Llamaremos *sistema de Pfaff* en $\mathcal{V}$ a una aplicación

$$x \in \mathcal{V} \to \mathcal{P}_x,$$

tal que $\mathcal{P}_x$ es un subespacio de $T_x^*(\mathcal{V})$, verificando la siguiente condición: Para cada $p \in \mathcal{V}$ existe un entorno abierto U_p, y $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \Omega(U_p)$, tales que $\omega_{1x}, \ldots, \omega_{rx}$ es una base de $\mathcal{P}_x$, para todo $x \in U_p$.

Si $\mathcal{P}_x$ es un sistema de Pfaff en $\mathcal{V}$, entonces la propiedad anterior implica que $\dim(\mathcal{P}_x)$ es localmente constante, por tanto si $\mathcal{V}$ es conexa —como siempre supondremos—, la $\dim(\mathcal{P}_x)$ es una constante. A este valor lo llamaremos *rango del sistema de Pfaff*.

Definición. Dado un sistema de Pfaff $\mathcal{P}_x$ en $\mathcal{V}$, definimos para cada abierto $V \subset \mathcal{V}$ el sub–módulo $\mathcal{P}(V)$ de $\Omega(V)$

$$\mathcal{P}(V) = \{\omega \in \Omega(V) : \omega_x \in \mathcal{P}_x, \forall x \in V\}.$$

Ejercicio 6.2.1 Sean $\mathcal{P}(V)$ los módulos que define un sistema de Pfaff $\mathcal{P}_x$ en $\mathcal{V}$. Demostrar:

a) Los $\mathcal{P}(V)$ son haz de módulos.

b) Para cada $x \in \mathcal{V}$ y cada abierto V tal que $x \in V$,

$$\mathcal{P}_x = \{\omega_x \in T_x^*(\mathcal{V}) : \omega \in \mathcal{P}(V)\}.$$

Un sistema de Pfaff $\{\mathcal{P}_x : x \in \mathcal{V}\}$ define por tanto un módulo $\mathcal{P}(\mathcal{V})$, en el que implícitamente está el sistema de Pfaff, pues los $\mathcal{P}_x$ los reconstruimos evaluando en cada $x \in \mathcal{V}$ las formas del módulo $\mathcal{P}(\mathcal{V})$. Es por ello por lo que habitualmente denotaremos el sistema de Pfaff por los módulos $\mathcal{P}(U)$, ó simplemente por $\mathcal{P}$, más que por los subespacios $\mathcal{P}_x$ que define.

A continuación demostramos que en el abierto de la definición de sistema de Pfaff, el módulo es libre.

Teorema 6.1 *Sea $\{\mathcal{P}_x\}_{x\in\mathcal{V}}$ un sistema de Pfaff de rango r, U un abierto y $\omega_1,\ldots,\omega_r \in \Omega(U)$, tales que en cada punto $x \in U$, $\omega_{1x},\ldots,\omega_{rx}$ es una base de $\mathcal{P}_x$, entonces*

$$\mathcal{P}(U) =< \omega_1,\ldots,\omega_r >,$$

es decir

$$\omega \in \mathcal{P}(U) \quad \Leftrightarrow \quad \omega = f_1\omega_1 + \cdots + f_r\omega_r,$$

con $f_1,\ldots,f_r \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Además para cada $x \in \mathcal{V}$ existe un abierto U_x entorno de x en $\mathcal{V}$ en el que $\mathcal{P}(U_x)$ es sumando directo de $\Omega(U_x)$.

Demostración. La inclusión"$\supset$" es obvia, veamos "$\subset$". Sea $\omega \in \mathcal{P}(U)$, entonces para cada $x \in U$, $\omega_x = \sum_{i=1}^r f_i(x)\omega_{ix}$, y basta demostrar que las f_i son localmente diferenciables. Como $\omega_{1x},\ldots,\omega_{rx}$ son independientes, podemos extenderlas a una base $\omega_{1x},\ldots,\omega_{nx}$ de $T_x^*(\mathcal{V})$. Consideremos $\omega_{r+1},\ldots,\omega_n \in \Omega(\mathcal{V})$, tales que en x definan respectivamente las ω_{ix}, para $i = r+1,\ldots,n$ y consideremos un entorno U_x de x en U en el que $\omega_1,\ldots,\omega_n$ sigan siendo independientes. Consideremos ahora sus campos tensoriales $T_i \in \mathcal{T}_0^1(U_x)$ duales, es decir tales que $T_i(\omega_j) = \delta_{ij}$. Entonces

$$f_i = T_i(\omega) \in \mathcal{C}^\infty(U_x).$$

Por último observemos que

$$\mathcal{P}(U_x) \oplus < \omega_{r+1},\ldots,\omega_n >= \Omega(U_x). \quad \blacksquare$$

Nota 6.2 Las dos propiedades del resultado anterior son las que caracterizan el que un haz de submódulos de las 1–formas sea el haz asociado a un sistema de Pfaff. Lo cual a su vez equivale a que el haz de módulos cociente, $\Omega/\mathcal{P}$ sea localmente libre.

6.2.2. Distribuciones.

Definición. Llamaremos *distribución* en $\mathcal{V}$ a una aplicación

$$x \in \mathcal{V} \to \Delta_x,$$

donde Δ_x es un subespacio de $T_x(\mathcal{V})$, verificando la siguiente condición: Para cada $p \in \mathcal{V}$ existe un abierto U y campos $D_1,\ldots,D_k \in \mathcal{D}(U)$, tales que para todo $x \in U$, $D_{1x},\ldots,D_{kx}$ son base de Δ_x.

Como para los sistemas de Pfaff se sigue de esta propiedad que $\dim(\Delta_x)$ es localmente constante, por tanto constante pues $\mathcal{V}$ es conexo. A este valor k lo llamaremos *rango de la distribución*.

Ejercicio 6.2.2 Para cada punto $p \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ consideremos la recta Δ_p que pasa por p y su dirección es la de la bisectriz del ángulo formado por el semieje positivo de x y la semirrecta que une p con el origen. Demostrar que Δ_p es una distribución.

Definición. Diremos que un submódulo Δ de $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ es *involutivo* si para $D_1, D_2 \in \Delta$ se tiene que $[D_1, D_2] \in \Delta$.

Definición. Dada una distribución Δ_x en $\mathcal{V}$, definimos para cada abierto V el submódulo de $\mathcal{D}(V)$

$$\Delta(V) = \{D \in \mathcal{D}(V) : \ D_x \in \Delta_x \ \ \forall x \in V\}.$$

Ejercicio 6.2.3 Sea Δ_x una distribución en $\mathcal{V}$ de rango k, con submódulos asociados $\Delta(V)$ para cada abierto V. Demostrar:

a) Los $\Delta(V)$ son haz de módulos.

b) Para cada $x \in \mathcal{V}$ y cada abierto V tal que $x \in V$,

$$\Delta_x = \{D_x \in T_x(\mathcal{V}) : \ D \in \Delta(V)\}.$$

c) Si U es un abierto y $D_1, \ldots, D_k \in \mathcal{D}(U)$, son como en la definición tales que para todo $x \in U$, $D_{1x}, \ldots, D_{kx}$ son base de Δ_x, entonces

$$\Delta(U) =< D_1, \ldots, D_k >,$$

y para cada $x \in \mathcal{V}$ existe un entorno abierto U_x de x en $\mathcal{V}$ tal que $\Delta(U_x)$ es sumando directo de $\mathcal{D}(U_x)$.

d) Si $\Delta(V)$ es involutivo y $U \subset V$, entonces $\Delta(U)$ también es involutivo.

Hemos visto que una distribución Δ_x en $\mathcal{V}$ define un módulo $\Delta(\mathcal{V})$, a partir del cual podemos reconstruir la distribución evaluando en cada $x \in U$ los campos del módulo $\Delta(U)$. Es por ello por lo que habitualmente denotaremos la distribución por $\Delta = \Delta(U)$, más que por los subespacios Δ_x.

Definición. Dado un submódulo $\mathcal{S}$ de un módulo $\mathcal{M}$, llamamos *incidente de* $\mathcal{S}$ al submódulo del dual de $\mathcal{M}$

$$\mathcal{S}^0 = \{\omega \in \mathcal{M}^* : \ \omega(\mathcal{S}) = 0\}.$$

Nota 6.3 Por definición el módulo dual de los campos son las 1–formas $\mathcal{D}^* = \Omega$ y se tiene que el dual de estas son los campos pues tenemos el isomorfismo canónico

$$\mathcal{D} \to \Omega^*, \quad D \to \hat{D}, \quad \hat{D}(\omega) = \omega D,$$

pues tiene inversa que hace corresponder a cada $T \in \Omega^*$ el único campo D tal que para toda ω, $\omega D = T(\omega)$. Observemos que tal campo existe y está definido de forma única por el campo de vectores D_x, tales que para toda ω_x, $\omega_x D_x = T_x(\omega_x)$ y es diferenciable pues para toda función diferenciable f

$$D_x f = d_x f(D_x) = T(df)(x),$$

es diferenciable en x.

Nota 6.4 Aunque el incidente de un sistema de Pfaff es una distribución y el incidente de una distribución es un sistema de Pfaff, en general no es cierto que el incidente de un sistema de Pfaff libre sea una distribución libre o que el incidente de una distribución libre sea un sistema de Pfaff libre. Sin embargo localmente sí es cierto.

Proposición 6.5 *Se verifican los siguientes apartados:*

1) Δ_x *es una distribución de rango* k *en* $\mathcal{V}$ *si y sólo si* $\mathcal{P}_x = \Delta_x^0$ *es un sistema de Pfaff de rango* $n-k$ *en* $\mathcal{V}$.

2) *Si para cada abierto* V *los módulos que definen* Δ_x *y* $\mathcal{P}_x = \Delta_x^0$ *son* $\Delta(V)$ *y* $\mathcal{P}(V)$, *entonces* $\Delta(V)^0 = \mathcal{P}(V)$ *y* $\mathcal{P}(V)^0 = \Delta(V)$.

3) *En los términos anteriores,* $\mathcal{P}(V)^{00} = \mathcal{P}(V)$ *y* $\Delta(V)^{00} = \Delta(V)$.

Demostración. (2)

$$\begin{aligned}
\omega \in \Delta(V)^0 &\Leftrightarrow \omega \in \Omega(V) \quad \text{y} \quad \forall D \in \Delta(V), \quad \omega D = 0 \\
&\Leftrightarrow \omega \in \Omega(V) \quad \text{y} \quad \forall x \in V,\ \forall D_x \in \Delta_x, \quad \omega_x D_x = 0 \\
&\Leftrightarrow \omega \in \Omega(V) \quad \text{y} \quad \forall x \in V, \quad \omega_x \in \Delta_x^0 = \mathcal{P}_x \\
&\Leftrightarrow \omega \in \mathcal{P}(V),
\end{aligned}$$

para lo que basta saber (ver el ejercicio 6.2.3), que para todo $D_x \in \Delta_x$ existe $D \in \Delta(V)$ que en x define D_x. ∎

6.3. El sistema característico

Teorema 6.6 *Si $\mathcal{P}$ es un submódulo de Ω, entonces*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[\mathcal{P}] &= \{D \in \mathcal{D} : \ \forall \omega \in \mathcal{P}, D^L\omega \in \mathcal{P}, \omega D = 0\} \\ &= \{D \in \mathcal{P}^0 : \ D^L\mathcal{P} \subset \mathcal{P}\}.\end{aligned}$$

es un submódulo de $\mathcal{D}$ involutivo.

Demostración. Por el ejercicio siguiente se sigue fácilmente que es módulo. Para ver que es involutivo sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}[\mathcal{P}]$ y sea $\omega \in \mathcal{P}$, entonces

$$\begin{aligned}[D_1, D_2]^L\omega &= D_1^L(D_2^L\omega) - D_2^L(D_1^L\omega) \in \mathcal{P} \\ \omega[D_1, D_2] &= D_1(\omega D_2) - D_1^L\omega(D_2) = 0,\end{aligned}$$

pues $D_1^L\omega \in \mathcal{P}$, por lo tanto $[D_1, D_2] \in \mathcal{D}[\mathcal{P}]$. ∎

Ejercicio 6.3.1 Demostrar que para $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$,

$$(fD)^L\omega = f(D^L\omega) + (\omega D)df.$$

Definición. Llamaremos *sistema característico* de un sistema de Pfaff $\mathcal{P}$ —que es submódulo de Ω—, al submódulo involutivo $\mathcal{D}[\mathcal{P}]$ de $\mathcal{D}$ del resultado anterior.

Ejercicio 6.3.2 Hallar el sistema característico del sistema de Pfaff $\mathcal{P} =< \omega >$, para las 1–formas de $\mathbb{R}^3$

$$\omega = zdx + dy, \qquad \omega = xdx + ydy + zdz.$$

Nota 6.7 En general $\mathcal{D}[\mathcal{P}]$ no es una distribución, aunque $\mathcal{P}$ sea un sistema de Pfaff. Por ejemplo consideremos el sistema de Pfaff generado por la 1–forma de $\mathbb{R}^3$

$$\omega = h(y)dx + dz,$$

donde h es una función que se anula en $C = \{y < 0\}$ y ella y su derivada son no nulas en $A = \{y > 0\}$. Se ve sin dificultad que el característico en $\mathbb{R} \times A \times \mathbb{R}$ es nulo y sin embargo no lo es en $\mathbb{R} \times C \times \mathbb{R}$, que está generado por ∂x y ∂y. Sin embargo se tiene el siguiente resultado.

Proposición 6.8 *Sea $\mathcal{P}$ un sistema de Pfaff y $\Delta = \mathcal{P}^0$ su distribución asociada, entonces:*

i) *Para cada campo $D \in \mathcal{D}$,*

$$D^L\mathcal{P} \subset \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad D^L\Delta \subset \Delta$$

ii) *Δ es involutiva si y sólo si $\Delta = \mathcal{D}[\mathcal{P}]$.*

Demostración. i) Consideremos $E \in \Delta$ y $\omega \in \mathcal{P}$, entonces

$$D^L(\omega)E = D(\omega E) - \omega(D^L E) = -\omega(D^L E).$$

ii) "$\Leftarrow$" por ser involutivo todo sistema característico.
"$\Rightarrow$" Por (i) ya que

$$\mathcal{D}[\mathcal{P}] = \{D \in \Delta : \ D^L\Delta \subset \Delta\}. \qquad \blacksquare$$

A continuación caracterizamos el primer apartado del resultado anterior en términos del grupo uniparamétrico de D y los subespacios $\mathcal{P}_x$. Pero antes veamos un resultado previo.

Lema 6.9 *Sea $\mathcal{E}$ un espacio vectorial, $\mathcal{E}^*$ su dual y $S, S' \subset \mathcal{E}^*$ subespacios r–dimensionales. Entonces*

$$S = S' \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^r[S] = \Lambda^r[S'].$$

Demostración. "$\Leftarrow$" Sea $\omega_1, \ldots, \omega_r$ una base de S y extendámosla a una base $\omega_1, \ldots, \omega_n$ de $\mathcal{E}^*$, entonces $\Lambda^r[S] =< \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r >$ y

$$\begin{aligned} \omega \in S \quad &\Leftrightarrow \quad \omega \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \omega \wedge T = 0 \quad \forall T \in \Lambda^r[S] = \Lambda^r[S'] \\ &\Leftrightarrow \quad \omega \in S'. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 6.10 *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ un campo no singular con grupo uniparamétrico $\tau\colon W_D \to \mathcal{V}$ y sea $\mathcal{P}$ un sistema de Pfaff en $\mathcal{V}$. Entonces $D^L\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$, es decir $D^L\omega \in \mathcal{P}$ para toda $\omega \in \mathcal{P}$, si y sólo si para cada $(t,x) \in \mathcal{W}_D$ se tiene $\tau_t^*[\mathcal{P}_{\tau(t,x)}] = \mathcal{P}_x$.*

Demostración. "$\Leftarrow$" Hay que demostrar que para cada $\omega \in \mathcal{P}$ y $x \in \mathcal{V}$, $(D^L\omega)_x \in \mathcal{P}_x$. Lo cual se sigue de la hipótesis, pues

$$(D^L\omega)_x = \lim_{t\to 0} \frac{\tau_t^*\omega_{\tau(t,x)} - \omega_x}{t} \in \mathcal{P}_x,$$

ya que es un límite, que existe, de puntos de un subespacio vectorial, $\mathcal{P}_x$, el cual es un cerrado del espacio vectorial.

"⇒" Lo haremos en dos partes:

(a) Supongamos que el rango de $\mathcal{P}$ es 1. Entonces para cada $x \in \mathcal{V}$ existe un entorno en el que $\mathcal{P}$ es libre generado por una $\omega_1 \in \Omega$. Ahora en ese entorno tendremos por la hipótesis que $D^L\omega_1 = g\omega_1$, y de esto se sigue que para cada $x \in \mathcal{V}$ existe un entorno U_x y una $\omega \in \Omega(U_x)$ tal que para cada $p \in U_x$ ω_p genera $\mathcal{P}_p$ y en U_x $D^L\omega = 0$. Para ello basta encontrar una $f \neq 0$ tal que para $\omega = f\omega_1$

$$0 = D^L\omega = (Df)\omega_1 + f(D^L\omega_1) = [Df + fg]\omega_1,$$

y tal f debe satisfacer $Df = -fg$, la cual existe en un entorno U_x de x y es $f \neq 0$, aplicando el teorema de clasificación local de campos no singulares.

Ahora bien $D^L\omega = 0$ en U_x implica que para cada $t \in I(x)$ tal que $\tau(t,x) = p \in U_x$, $\tau_t^*(\omega_p) = \omega_x$. De donde se sigue que para estos t se tiene que $\tau_t^*[\mathcal{P}_p] = \mathcal{P}_x$, pues $\mathcal{P}$ es de rango 1 y τ_t^* es un isomorfismo. En definitiva para cada $x \in \mathcal{V}$ existe un $\epsilon > 0$, tal que para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\tau_t^*[\mathcal{P}_{\tau(t,x)}] = \mathcal{P}_x$. De esto se sigue que $A = \{t \in I(x) : \tau_t^*[\mathcal{P}_{\tau(t,x)}] = \mathcal{P}_x\}$ es abierto y cerrado, pues si $t \in I(x)$ e $y = \tau(t,x)$, existe un $\epsilon > 0$, tal que para $r \in (-\epsilon, \epsilon)$

$$\tau_r^*[\mathcal{P}_{\tau(r,y)}] = \mathcal{P}_y \quad \Rightarrow \quad \tau_{t+r}^*[\mathcal{P}_{\tau(t+r,x)}] = \tau_t^*[\mathcal{P}_{\tau(t,x)}],$$

y si $t \in A$, $\tau_t^*[\mathcal{P}_{\tau(t,x)}] = \mathcal{P}_x$, por tanto $t + r \in A$ y A es abierto y si $t \in A^c$, $\tau_t^*[\mathcal{P}_{\tau(t,x)}] \neq \mathcal{P}_x$, por tanto $t + r \in A^c$ y A^c es abierto. Ahora por conexión $I(x) = A$.

(b) Supongamos ahora que el rango es r. Consideremos el submódulo de $\Lambda^r[\Omega]$

$$\Lambda^r[\mathcal{P}] = \{\sum \lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_r : \lambda_i \in \mathcal{P}\},$$

el cual satisface, por la hipótesis y las propiedades de la derivada de Lie, que

$$D^L(\Lambda^r[\mathcal{P}]) \subset \Lambda^r[\mathcal{P}].$$

Consideremos ahora para cada $x \in \mathcal{V}$ un entorno U en el que $\mathcal{P}(U)$ sea libre generado por $\omega_1, \ldots, \omega_r$, por tanto en el que $\Lambda^r[\mathcal{P}(U)]$ está generado por $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r$. Entonces encogiendo el entorno U si es necesario encontramos —como en (a)— un múltiplo

$$\gamma = f\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r \in \Lambda^r[\mathcal{P}(U)],$$

y por tanto tal que para todo $z \in U$, $< \gamma_z >= \Lambda^r(\mathcal{P}_z)$, para el que $D^L\gamma = 0$ en U. Se concluye como en el caso anterior que para cada $(t,x) \in W_D$ y $p = \tau(t,x)$, $\tau_t^*[\Lambda^r(\mathcal{P}_p)] = \Lambda^r(\mathcal{P}_x)$.

Ahora bien de las propiedades del producto exterior se sigue que esa igualdad es la misma que

$$\Lambda^r[\tau_t^*(\mathcal{P}_p)] = \Lambda^r[\mathcal{P}_x],$$

y por (6.9), $\tau_t^*(\mathcal{P}_{\tau(t,x)}) = \mathcal{P}_x$, que es lo que queríamos. ∎

Ejercicio 6.3.3 Demostrar que para cada campo tangente D, con grupo uniparamétrico τ y Δ una distribución (ver Fig.6.4)

$$D^L\Delta \subset \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \tau_{t*}\Delta_x = \Delta_{\tau(t,x)}, \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{W}_D.$$

Definición. Diremos que una subvariedad $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ es *tangente* a una distribución Δ si para cada $x \in \mathcal{S}$, $T_x(\mathcal{S}) \subset \Delta_x$[1] ó equivalentemente (demuéstrelo el lector), para la inclusión $i\colon \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{V}$

$$i^*\omega = 0, \qquad \forall \omega \in \mathcal{P} = \Delta^0.$$

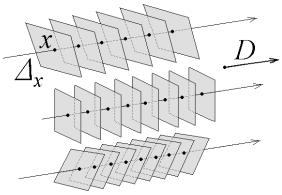


Figura 6.4. Interpretación geométrica de $D^L\Delta \subset \Delta$

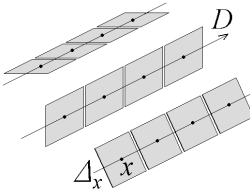


Figura 6.5. Interpretación geométrica de $D \in \Delta$ y $D^L\Delta \subset \Delta$

[1]Realmente hay que entender $i_*[T_x(\mathcal{S})] \subset \Delta_x$, para la inclusión $i\colon \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{V}$.

6.4. El Teorema de la Proyección

6.4.1. Campos tangentes verticales

Definición. Dada una aplicación diferenciable $F\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, diremos que $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ es un *campo vertical* por F, si $F_* D_x = 0$, para todo $x \in V$. Denotaremos con $\mathcal{D}^F$ el módulo de los campos verticales por F, es decir para cada abierto $V \subset \mathcal{V}$,

$$\mathcal{D}^F(V) = \{D \in \mathcal{D}(V) :\ F_* D_x = 0,\ \forall x \in V\},$$

los cuales tienen la propiedad de ser un haz de módulos, al que llamaremos el *haz de campos verticales por* F.

Proposición 6.11 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{U}$ variedades diferenciables, $F\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ diferenciable y $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ con grupo uniparamétrico local $X\colon \mathcal{W}_D \to \mathcal{V}$. Entonces las siguientes dos propiedades son equivalentes a que el campo D sea vertical:*

(i) $Df = 0$, para cada $f \in F^*[\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})]$.

(ii) $F[X(t,x)] = F(x)$, para cada $(t,x) \in \mathcal{W}_D$.

Además se tiene que si $D \in \mathcal{D}^F$ y $\gamma \in \Omega(\mathcal{U})$, entonces $D^L(F^*\gamma) = 0$.

Demostración. La equivalencia se deja de ejercicio. Lo último se sigue del segundo apartado, pues localmente toda uno–forma γ es en un abierto coordenado $(U; u_i)$, de la forma $\sum g_i du_i$ y $F^*\gamma = \sum f_i dv_i$, para $f_i, v_i \in F^*[\mathcal{C}^\infty(U)]$, que son integrales primeras de D, por tanto

$$D^L(F^*\gamma) = D^L(\sum f_i dv_i) = 0. \quad \blacksquare$$

6.4.2. Proyecciones regulares

Definición. Diremos que una aplicación diferenciable $\pi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ es una *proyección regular* en $x \in \mathcal{V}$ si se verifican cualquiera de las condiciones equivalentes:

(i) $\pi_*\colon T_x(\mathcal{V}) \to T_{\pi(x)}(\mathcal{U})$, *es sobre*

(ii) $\pi^*\colon T^*_{\pi(x)}(\mathcal{U}) \to T^*_x(\mathcal{V})$ *es inyectiva.*

(iii) *Existen entornos coordenados* (V_x, v_j) *de* x *y* (U_y, u_i) *de* $y = \pi(x)$*, tales que si* $p \in V_x$ *tiene coordenadas* $(x_1, \ldots, x_n)$*,* $\pi(p)$ *tiene coordenadas* $(x_1, \ldots, x_m)$*, es decir* $\pi^* u_i = v_i$*, para* $i = 1, \ldots, m$*.*

(iv) *Existe una sección local* $\sigma\colon U_y \to \mathcal{V}$*,* $\pi \circ \sigma = Id$*, tal que* $\sigma(y) = x$*.*

Diremos que π es *proyección regular* si lo es en todo punto y es sobre.

Corolario 6.12 *Si* $\pi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ *es una proyección regular, entonces para cada* $x \in \mathcal{V}$ *existe un abierto coordenado de* x*,* $V_x, (v_1, \ldots, v_n)$ *tal que*

$$\mathcal{D}^\pi(V_x) = < \frac{\partial}{\partial v_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_n} >$$

Demostración. Se sigue del apartado (iii) anterior. ∎

Lema 6.13 *Sea* $\pi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ *una proyección regular y* $\mathcal{P}'$ *un sistema de Pfaff de rango* r *en* $\mathcal{U}$*, entonces* $\mathcal{P}_x = \pi^*[\mathcal{P}'_{\pi(x)}]$*, para cada* $x \in \mathcal{V}$ *es un sistema de Pfaff de rango* r *en* $\mathcal{V}$*. Además dado un abierto* $V \subset \mathcal{V}$*,* $\pi(V) = U$ *y* $\gamma \in \Omega(U)$*, se tiene que* $\pi^*\gamma \in \mathcal{P}(V)$ *si y sólo si* $\gamma \in \mathcal{P}'(U)$*.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{V}$, $y = \pi(x)$ y $U_y \subset \mathcal{U}$ un entorno abierto de y para el que existen $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \Omega(U_y)$ base de $\mathcal{P}'(U_y)$. Entonces para $V_x = \pi^{-1}(U_y)$ y $\omega_i = \pi^*(\gamma_i) \in \Omega(V_x)$ se tiene que para cada $z \in V_x$ los ω_{iz} son base de $\mathcal{P}_z$, pues la aplicación $\pi^*\colon T^*_{\pi(z)}(\mathcal{U}) \to T^*_z(\mathcal{V})$ es inyectiva.

Sea $\gamma \in \Omega(U)$, entonces

$$\begin{aligned}
\pi^*\gamma \in \mathcal{P}(V) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in V,\ (\pi^*\gamma)_x \in \mathcal{P}_x \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in V,\ \pi^*\gamma_{\pi(x)} \in \pi^*\mathcal{P}'_{\pi(x)} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in V,\ \gamma_{\pi(x)} \in \mathcal{P}'_{\pi(x)} \\
&\Leftrightarrow \quad \gamma \in \mathcal{P}'(U),
\end{aligned}$$

donde la tercera equivalencia se sigue de la inyectividad de π^*. ∎

Definición. Diremos que el sistema de Pfaff del resultado anterior es *proyectable* por π y lo denotaremos $\mathcal{P} = \pi^*(\mathcal{P}')$.

A continuación caracterizaremos los sistemas de Pfaff que son proyectables.

Teorema de la proyección (Necesidad) 6.14 *Si el sistema* $\mathcal{P}$ *es proyectable por* π*, entonces en todo abierto,* $\mathcal{D}^\pi \subset \mathcal{D}[\mathcal{P}]$*.*

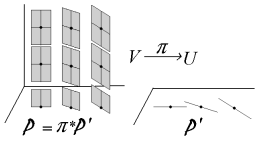


Figura 6.6. Sistema de Pfaff proyectable

Demostración. Si $D \in \mathcal{D}^\pi$ y $\omega \in \mathcal{P}$, queremos demostrar que $\omega D = 0$ y $D^L\omega \in \mathcal{P}$. Sea $x \in \mathcal{V}$, $y = \pi(x)$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ una base de $\mathcal{P}'(U_y)$, para U_y entorno abierto de y y $\omega_i = \pi^*\gamma_i$ la base correspondiente de $\mathcal{P}(V_x)$, para $V_x = \pi^{-1}(U_y)$, entonces como $\omega = \sum f_i\omega_i$ y $\pi_* D_x = 0$, tendremos por el Lema anterior que $D^L\omega_i = D^L\pi^*\gamma_i = 0$ y que $D \in \mathcal{D}[\mathcal{P}]$, pues

$$\omega_x D_x = \sum_{i=1}^{r} f_i(x)\omega_{ix}(D_x) = \sum_{i=1}^{r} f_i(x)\gamma_{iy}(\pi_* D_x) = 0,$$

$$D^L\omega = \sum_{i=1}^{r}(Df_i)\omega_i + \sum_{i=1}^{r} f_i D^L\omega_i = \sum_{i=1}^{r}(Df_i)\omega_i \in \mathcal{P}. \quad \blacksquare$$

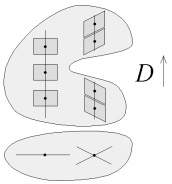


Figura 6.7. $< D >= \mathcal{D}^\pi \subset \mathcal{D}[\mathcal{P}]$

El recíproco de (6.14) sólo es cierto localmente pues basta considerar el campo vertical $D = \partial z$ para la proyección $(x, y, z) \to (x, y)$, de una distribución de planos $< D, E >$, que sea constante en cada fibra conexa, en un abierto de $\mathbb{R}^3$ que tenga dos componentes conexas en alguna fibra (ver Fig.(6.7)). Si la distribución no se proyecta en la misma recta en cada componente, el sistema de Pfaff no es proyectable, sin embargo los campos verticales están en el característico.

Lo demostraremos en un entorno abierto coordenado V de un punto x —que por comodidad tomaremos como el origen— *cúbico*, es decir difeomorfo al cubo unidad

$$(v_1, \ldots, v_n) \colon V \longrightarrow (-1, 1) \times \cdots \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^n,$$

y por tanto tal que si un punto de V tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, entonces los puntos de coordenadas $(x_1, \ldots, tx_i, 0, \ldots, 0)$, para $i \geq m$ y $t \in [0,1]$, también están en V. Además supondremos que en ese entorno, nuestro sistema de Pfaff es libre. Pero antes consideremos la proyección

$$\pi = (v_1, \ldots, v_m) \colon V \longrightarrow U = (-1,1)^m \subset \mathbb{R}^m,$$

y la sección suya

$$\tau \colon U \longrightarrow V,$$
$$q = (x_1, \ldots, x_m) \longrightarrow \tau(q) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0),$$

es decir que para $i = 1, \ldots, m$, $v_i[\tau(q)] = x_i$ y para $i = m+1, \ldots, n$, $v_i[\tau(q)] = 0$, en estos términos se tiene el siguiente resultado.

Lema 6.15 *Si $\mathcal{P}_x = \Delta_x^0$ es un sistema de Pfaff libre en V, tal que para cada $z \in \tau(U)$,*

$$\frac{\partial}{\partial v_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_n} \in \Delta_z,$$

entonces $\mathcal{P}'_q = \tau^*[\mathcal{P}_{\tau(q)}]$, para $q \in U$ define un sistema de Pfaff libre en U.

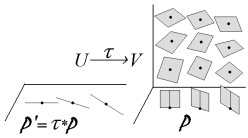


Figura 6.8.

Demostración. Consideremos que $\mathcal{P} =< \omega_1, \ldots, \omega_r >$ y veamos que $\gamma_i = \tau^*\omega_i$ son independientes en todo punto $q \in U$ y por tanto que definen un sistema de Pfaff $\mathcal{P}' =< \gamma_1, \ldots, \gamma_r >$ en U.

Supongamos que existe un $q \in U$ tal que para $z = \tau(q)$ fuese

$$0 = \sum_{i=1}^{r} a_i \gamma_{iq} = \sum_{i=1}^{r} a_i \tau^* \omega_{iz} = \tau^* \left[\sum_{i=1}^{r} a_i \omega_{iz} \right],$$

ahora bien como $\partial v_j \in \Delta_z$, para $j = m+1, \ldots, n$, tendremos que $\omega_{iz}(\partial v_j) = 0$, por lo que existen constantes λ_j para las que

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \omega_{iz} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j d_z v_j, \tag{6.2}$$

por tanto

$$0 = \tau^* \left[\sum_{j=1}^{m} \lambda_j d_z v_j \right] = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j d_q x_j \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0,$$

y se sigue de (6.2) y de la independencia de las ω_{iz} que las $a_i = 0$, por tanto las γ_{iq} son independientes. ∎

Teorema de la Proyección (Suficiencia) 6.16 *Si $\mathcal{D}^\pi \subset \mathcal{D}[\mathcal{P}]$ en todo abierto, entonces localmente $\mathcal{P}$ es proyectable por π.*

Demostración. Si $\mathcal{P} =< \omega_1, \ldots, \omega_r >$, como por hipótesis tenemos que para $\Delta = \mathcal{P}^0$

$$< \frac{\partial}{\partial v_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_n} >= \mathcal{D}^\pi \subset \mathcal{D}[\mathcal{P}] \subset \Delta \tag{6.3}$$

se sigue del lema anterior que $\mathcal{P}' =< \tau^*\omega_1, \ldots, \tau^*\omega_r >$ es un sistema de Pfaff en U.

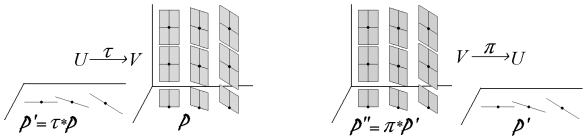


Figura 6.9. Distribuciones asociadas a $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$

Y por (6.13) tenemos dos sistemas de Pfaff en V,

$$\mathcal{P} =< \omega_1, \ldots, \omega_r >,$$
$$\mathcal{P}'' = \pi^*(\mathcal{P}') =< \pi^*[\tau^*\omega_1], \ldots, \pi^*[\tau^*\omega_r] >,$$

además por construcción $\mathcal{P}''$ es proyectable por π y por la parte del teorema demostrada (necesidad), $\mathcal{D}^\pi \subset \mathcal{D}[\mathcal{P}'']$, por tanto

$$\frac{\partial}{\partial v_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_n} \in \mathcal{D}[\mathcal{P}'']. \tag{6.4}$$

Basta entonces demostrar que $\mathcal{P} = \mathcal{P}''$, o lo que es lo mismo que para cada $x \in V$, $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}''_x$. Sea $x \in V$ con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ y sea $z = \tau[\pi(x)]$, entonces z tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$.

Por una parte tenemos que las ω_i son base de $\mathcal{P}$ y por otra las $(\tau \circ \pi)^*\omega_i$ lo son de $\mathcal{P}''$. Ahora bien para cada $E_z \in T_z(\mathcal{V})$, como $\pi \circ \tau = id$

$$\begin{array}{lcl} D_z = \tau_*(\pi_* E_z) - E_z & \Rightarrow & \pi_*(D_z) = 0 \\ & \Rightarrow & \forall i = 1, \ldots, m,\ D_z v_i = \pi_*(D_z) x_i = 0 \\ \text{(por la inclusión (6.3))} & \Rightarrow & D_z \in \Delta_z \\ & \Rightarrow & \omega_{1z} D_z = \cdots = \omega_{rz} D_z = 0 \\ & \Rightarrow & [\pi^*(\tau^* \omega_{iz})] E_z = \omega_{iz}[\tau_*(\pi_* E_z)] = \omega_{iz} E_z, \end{array}$$

por tanto $\pi^*(\tau^*\omega_{iz}) = \omega_{iz}$ y $\mathcal{P}''_z = \mathcal{P}_z$. Ahora concluimos, pues si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}''$ coinciden en un punto q coinciden en todos los puntos de las curvas integrales de las ∂v_i (para $m+1 \leq i \leq n$) pasando por q, pues

$$\text{(por (6.3) y (6.4))} \qquad \frac{\partial}{\partial v_i}^{L}[\mathcal{P}] \subset \mathcal{P}\ , \quad \frac{\partial}{\partial v_i}^{L}[\mathcal{P}''] \subset \mathcal{P}''$$

y por (6.10), si τ_t es el grupo uniparamétrico de uno de esos campos, $\tau_t^*[\mathcal{P}_{\tau(t,q)}] = \mathcal{P}_q = \mathcal{P}''_q = \tau_t^*[\mathcal{P}''_{\tau(t,q)}]$ y $\mathcal{P}_{\tau(t,q)} = \mathcal{P}''_{\tau(t,q)}$ ya que τ_t^* es isomorfismo. Por lo tanto como $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}''$ coinciden en z, coinciden en x pues si partimos de z, mediante el grupo uniparamétrico de ∂v_{m+1} llegamos en un tiempo x_{m+1} al punto de coordenadas $(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, 0, \ldots, 0)$ y repitiendo el proceso con la ∂v_{m+2}, etc., llegaríamos en definitiva al punto x. ∎

Nota 6.17 Sin duda el lector tendrá la impresión de que para aplicar el teorema de la proyección sea necesario conocer de antemano la proyección. Pero esto no es así, en el ejercicio siguiente veremos cómo se puede utilizar este resultado y cómo "puede construirse" de hecho la proyección, conociendo exclusivamente el sistema de Pfaff.

Ejemplo 6.4.1 *Considérese el sistema de Pfaff $\mathcal{P}$, en $\mathbb{R}^4$, generado por la uno–forma $\omega = dx + ydy + xdz + zdu$ y proyéctese a la mínima dimensión.*

Caractericemos en primer lugar los campos

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + f_3 \frac{\partial}{\partial z} + f_4 \frac{\partial}{\partial u},$$

que están en su sistema característico $\mathcal{D}[\mathcal{P}]$.

$$\left.\begin{array}{c}\omega D = 0\\ D^L\omega = f\omega\end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 0 = f_1 + yf_2 + xf_3 + zf_4\\ f = D^L\omega\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\\ fy = D^L\omega\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\\ fx = D^L\omega\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\\ fz = D^L\omega\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\right)\end{array}\right.$$

lo cual implica

$$-f_3 = f, \quad 0 = fy, \quad f_1 - f_4 = fx, \quad f_3 = fz.$$

y por tanto $\mathcal{D}[\mathcal{P}]$ es una distribución generada por

$$D = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{z+1}{y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u}.$$

Consideremos ahora integrales primeras diferenciablemente independientes de D, $Du_1 = Du_2 = Du_3 = 0$, como por ejemplo

$$u_1 = x - u\ , \quad u_2 = z\ , \quad u_3 = x(1+z) + \frac{y^2}{2},$$

y por tanto

$$du_1 = dx - du\ , \quad du_2 = dz\ , \quad du_3 = (1+z)dx + xdz + ydy.$$

Si ahora consideramos la proyección regular $\pi = (u_1, u_2, u_3)$, tendremos que

$$\mathcal{D}^\pi = < D > \subset \mathcal{D}[\mathcal{P}],$$

y por tanto el teorema de la proyección nos asegura que $\mathcal{P}$ es proyectable por π, es decir que ω se expresa como combinación de du_1, du_2 y du_3 y si es

$$\begin{aligned}\omega &= g_1du_1 + g_2du_2 + g_3du_3\\ &= [g_1 + g_3(1+z)]dx + g_3ydy + (g_2 + g_3x)dz - g_1du,\end{aligned}$$

tendremos que $g_3 = 1$, $g_1 = -z = -u_2$ y $g_2 = 0$ y por tanto

$$\omega = -u_2 du_1 + du_3.$$

Las subvariedades bidimensionales $\{u_1 = cte,\ u_3 = cte\}$ son tangentes al sistema de Pfaff. Mas adelante veremos que no las tiene tridimensionales. ∎

Proposición 6.18 *Sean $\pi_1 \colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ y $\pi_2 \colon \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ proyecciones regulares, $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$ y $\mathcal{P}'$ un sistema de Pfaff en $\mathcal{U}$. Entonces para $\mathcal{P} = \pi_1^* \mathcal{P}'$ se tiene que*

$$\mathcal{D}^{\pi} \subset \mathcal{D}[\mathcal{P}] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}^{\pi_2} \subset \mathcal{D}[\mathcal{P}'].$$

Demostración. Sea $E \in \mathcal{D}^{\pi_2}$ y $D \in \mathcal{D}(V)$ tal que π_1 lleve D en E, entonces $\pi_* D = \pi_{2*}[\pi_{1*} D] = 0$, por tanto

$$\begin{aligned} D \in \mathcal{D}^{\pi} \quad &\Rightarrow \quad D \in \mathcal{D}[\mathcal{P}] \\ &\Rightarrow \quad \forall \omega \in \mathcal{P}',\ (\pi_1^* \omega) D = 0\ , \quad D^L(\pi_1^* \omega) \in \mathcal{P} \\ &\Rightarrow \quad \forall \omega \in \mathcal{P}',\ \omega E = 0\ , \quad \pi_1^*(E^L \omega) \in \mathcal{P} \\ &\Rightarrow \quad \forall \omega \in \mathcal{P}',\ \omega E = 0\ , \quad E^L \omega \in \mathcal{P}' \\ &\Rightarrow \quad E \in \mathcal{D}[\mathcal{P}'], \end{aligned}$$

lo cual se sigue de la proposición (6.11) y de (6.13). ∎

Ejercicio 6.4.1 Sea $F \colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ diferenciable, $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ y $E \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ tales que $F_* D_x = E_{F(x)}$ para cada $x \in \mathcal{V}$. Entonces para cada $T \in \mathcal{T}_p^0(\mathcal{U})$

$$D^L(F^* T) = F^*(E^L T) \qquad \text{y} \qquad D \in \mathcal{D}^F \quad \Rightarrow \quad D^L(F^* T) = 0.$$

Ejercicio 6.4.2 Demostrar que si $\mathcal{P} = \pi^* \mathcal{P}'$ es proyectable y $< D >= \mathcal{D}[\mathcal{P}]$, $\mathcal{D}[\mathcal{P}'] = \{0\}$.

Ejercicio 6.4.3 Demostrar si son proyectables los sistemas de Pfaff del espacio generados por: (1) $xdx + x^2 dy + x^3 dz$. (2) $xydx + y^2 dy + yzdz$.

6.5. El Teorema de Frobenius

En esta lección caracterizaremos el hecho de que una distribución de rango r tenga subvariedades r–dimensionales tangentes pasando por cualquier punto. Daremos la demostración como consecuencia directa del **Teorema de la Proyección**, con lo que se pone de manifiesto que este último es el resultado más básico y fundamental de la Teoría de los sistemas de Pfaff. Completaremos la lección dando la versión del mismo teorema en términos del sistema de Pfaff y dando una tercera versión en términos de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. En un apéndice, al final del Tema daremos una demostración directa del **Teorema de Frobenius**, sin utilizar el **Teorema de la Proyección**, que aunque es sencilla de entender no queda claro el papel que juegan los ingredientes que en ella aparecen.

Definición. Diremos que una distribución Δ en $\mathcal{V}$ de rango r es *totalmente integrable* si para cada $x \in \mathcal{V}$ existe un entorno abierto cúbico V_x de x en $\mathcal{V}$, y un sistema de coordenadas $(v_1, \ldots, v_n)$ en V_x, tales que

$$\Delta(V_x) =< \frac{\partial}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_r} >,$$

en cuyo caso las subvariedades de V_x (a las que llamaremos *franjas del entorno*)

$$\mathcal{S} = \{x \in V : \ v_{r+1} = cte, \ldots, v_n = cte\},$$

son tangentes a la distribución, es decir para cada $z \in \mathcal{S}$

$$T_z(\mathcal{S}) = \Delta_z.$$

Definición. Diremos que un sistema de Pfaff $\mathcal{P}$, de rango k, es *totalmente integrable* si para cada $x \in \mathcal{V}$ existe un entorno V_x de x y $v_1, \ldots, v_k \in \mathcal{C}^\infty(V_x)$, con diferenciales independientes en todo V_x, tales que

$$\mathcal{P}(V_x) =< dv_1, \ldots, dv_k > .$$

Como antes observemos que si $\mathcal{P}$ es totalmente integrable, la solución a nuestro problema inicial de encontrar subvariedades $n-k$–dimensionales tangentes al sistema, vienen definidas localmente por

$$\{v_1 = cte, \ldots, v_k = cte\}.$$

Proposición 6.19 *Un sistema de Pfaff es totalmente integrable si y sólo si $\Delta = \mathcal{P}^0$ es totalmente integrable.*

Demostración. Hágase como ejercicio. ∎

Lema 6.20 *Sea $\mathcal{P} = \pi^*(\mathcal{P}')$ un sistema de Pfaff proyectable, entonces:*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P} & \text{es tot. integrable} & \Leftarrow & \mathcal{P}' & \text{es tot. integrable} \\ \Delta = \mathcal{P}^0 & \text{es involutivo} & \Rightarrow & \Delta' = \mathcal{P}'^0 & \text{es involutivo.} \end{array}$$

Demostración. La primera implicación es trivial. Veamos la segunda, en primer lugar si $E \in \Delta'$, localmente existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $\pi_* D = E$ y se tiene que $D \in \Delta$, pues si γ_i generan $\mathcal{P}'$, $\pi^*\gamma_i = \omega_i$ generan $\mathcal{P}$ y $\omega_i D = \pi^*\gamma_i D = \gamma_i E = 0$. Por tanto si $E_1, E_2 \in \Delta'$ y $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, son tales que $\pi_* D_i = E_i$, entonces $D_1, D_2 \in \Delta$ y

$$\begin{array}{rcl} [D_1, D_2] \in \Delta & \Rightarrow & \omega_i[D_1, D_2] = 0 \\ & \Rightarrow & \gamma_i[E_1, E_2] = 0 \\ & \Rightarrow & [E_1, E_2] \in \Delta'. \end{array}$$ ∎

Teorema de Frobenius I 6.21 *Una distribución Δ es totalmente integrable si y sólo si es involutiva.*

Demostración. "⇒" Es un simple ejercicio.

"⇐" Lo haremos por inducción sobre r. Para $r = 1$ es el **Teorema del flujo** (2.25), pág.96. Sea $r > 1$ y supongamos el resultado cierto para los rangos $1, \ldots, r-1$.

Sea $x \in \mathcal{V}$ y consideremos un campo $D \in \Delta$, no singular en un entorno de x. Consideremos un sistema de coordenadas locales $v = (v_i)$ en un entorno abierto V_x de x en $\mathcal{V}$, tales que $D = \partial v_n \in \Delta$, y consideremos la proyección $\pi = (v_1, \ldots, v_{n-1})$ y $U = \pi(V_x)$, para la que se tiene por (6.8), pág.346, y ser Δ involutiva

$$\mathcal{D}^\pi = < \frac{\partial}{\partial v_n} > \subset \Delta = \mathcal{D}[\mathcal{P}],$$

donde $\mathcal{P} = \Delta^0$ es un sistema de Pfaff de rango $k = n - r$. Se sigue del teorema de la proyección —encogiendo V_x y $U = \pi(V_x)$ si es necesario—, que existe un sistema de Pfaff $\mathcal{P}'$ de rango k en U tal que $\mathcal{P} = \pi^*(\mathcal{P}')$ y se sigue del Lema anterior que $\Delta' = \mathcal{P}'^0$ es una distribución involutiva

de rango $(n-1)-k=(n-1)-(n-r)=r-1$ y por nuestra hipótesis de inducción Δ' es totalmente integrable, ahora por el Lema

$$\mathcal{P}' \quad \text{es tot. int.} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P} \quad \text{es tot. int.} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \quad \text{es tot. int.} \quad \blacksquare$$

Teorema 6.22 *Una distribución Δ en $\mathcal{V}$ es totalmente integrable si y sólo si para cada $x \in \mathcal{V}$ existe una subvariedad conexa $\mathcal{S}$ tal que $x \in \mathcal{S}$ y $\omega_{|S}=0$, para toda $\omega \in \mathcal{P}=\Delta^0$, ó equivalentemente, $T_z(\mathcal{S})=\Delta_z$, para cada $z \in \mathcal{S}$. Además $\mathcal{S}$ es localmente única en el sentido de que existe un entorno abierto de x, $V_x \subset \mathcal{V}$, tal que si $\mathcal{S}' \subset V_x$ es otra, es conexa y $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$.*

Demostración. Si Δ es totalmente integrable, entonces para cada $x \in \mathcal{V}$ la franja que lo contiene

$$\{z \in V_x : v_{r+1}(z)=v_{r+1}(x), \ldots, v_n(z)=v_n(x)\},$$

satisface el enunciado.

Recíprocamente, tenemos que demostrar que Δ es totalmente integrable ó por el teorema de Frobenius que es involutiva. Es decir que si $D_1, D_2 \in \Delta$, entonces $[D_1, D_2] \in \Delta$, para lo cual basta demostrar que para cada $x \in \mathcal{V}$, $[D_1, D_2]_x \in \Delta_x$.

Por hipótesis existe una subvariedad $\mathcal{S}$ tal que $x \in \mathcal{S}$ y para la inclusión $i\colon \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{V}$, $i_*[T_z(\mathcal{S})]=\Delta_z$, para cada $z \in \mathcal{S}$. Pero entonces existen únicos $E_{1z}, E_{2z} \in T_z(\mathcal{S})$, tales que $i_*E_{1z}=D_{1z}$ e $i_*E_{2z}=D_{2z}$ y se demuestra fácilmente que $E_1, E_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$, pues cada función $g \in \mathcal{C}^\infty_z(\mathcal{S})$ localmente es $g=i^*f$, para $f \in \mathcal{C}^\infty_z(\mathcal{V})$ y

$$E_{iz}g = E_{iz}(i^*f) = D_{iz}f,$$

por lo que $E_ig=i^*(D_if)$ y es diferenciable. Se sigue que $[E_1, E_2] \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$ y por tanto

$$[D_1, D_2]_x = i_*[E_1, E_2]_x \in i_*[T_x(\mathcal{S})] = \Delta_x.$$

Por último consideremos que Δ es totalmente integrable y para cada $x \in \mathcal{V}$ el abierto V_x de la definición. Veamos que la subvariedad

$$\mathcal{S} = \{z \in V_x : v_{r+1}(z)=v_{r+1}(x), \ldots, v_n(z)=v_n(x)\},$$

satisface el resultado, para lo cual basta observar que para cada $z \in \mathcal{S}'$

$$T_z(\mathcal{S}') = \Delta_z = < \frac{\partial}{\partial v_1}_z, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_r}_z >,$$

y por tanto para la inmersión $i\colon \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{V}$,

$$d(i^* v_{r+1}) = \cdots = d(i^* v_n) = 0,$$

por tanto en $\mathcal{S}'$ las funciones v_i, para $i = r+1, \ldots, n$, son constantes y como existe un $p \in \mathcal{S} \cap \mathcal{S}'$, tendremos que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$. ∎

Definición. Llamaremos *variedad integral* de una distribución Δ de $\mathcal{V}$, a toda subvariedad inmersa conexa $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$, por tanto tal que

$$i\colon \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{V},$$

es una inmersión, tal que para cada $x \in \mathcal{S}$

$$T_x(\mathcal{S}) = \Delta_x,$$

si no es conexa diremos que es una *variedad tangente*.

Nota 6.23 Observemos que en el teorema de Frobenius las franjas del entorno son variedades integrales y por lo tanto si una distribución es involutiva, por todo punto pasa una variedad integral.

Definición. Llamaremos *variedad integral máxima* de una distribución a una subvariedad inmersa tangente a la distribución que sea conexa y que contenga cualquier otra subvariedad inmersa tangente conexa que tenga algún punto común con ella.

La razón de considerar variedades integrales como subvariedades inmersas y no como subvariedades regulares se entiende con el siguiente resultado que demostramos en (6.80) del Apéndice de variedades diferenciables y en el que se ve que la variedad integral máxima pasando por un punto en general es inmersa.

Teorema 6.24 *Sea Δ una distribución involutiva, entonces por cada punto de la variedad pasa una única variedad integral máxima.*

Teorema de Frobenius II 6.25 *Sea $\mathcal{P}$ un sistema de Pfaff de rango r en $\mathcal{V}$. Entonces son equivalentes:*

i) $\mathcal{P}$ es totalmente integrable.

ii) Para todo $x \in \mathcal{V}$ existe un entorno V_x y generadores $\omega_1, \ldots, \omega_r$ de $\mathcal{P}(V_x)$ para los que

$$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r = 0, \quad i = 1, \ldots, r.$$

iii) Para todo $x \in \mathcal{V}$ existe un entorno V_x tal que para toda $\omega \in \mathcal{P}(V_x)$ existen $\omega_i \in \mathcal{P}(V_x)$ y $\eta_i \in \Omega(V_x)$ tales que

$$d\omega = \sum \omega_i \wedge \eta_i.$$

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii).- Sea (v_i) un sistema de coordenadas locales en V_x, entorno de x, tales que $\mathcal{P}(V_x) =< dv_1, \ldots, dv_r >$, entonces $d(dv_i) = 0$ y el resultado se sigue.

(ii) $\Rightarrow$ (iii).- Reduzcamos el entorno V_x si es necesario para que $\omega_1, \ldots, \omega_r$ pueda extenderse a una base $\omega_1, \ldots, \omega_n$ de $\Omega(V_x)$. Si $\omega \in \mathcal{P}(V_x)$, entonces existen funciones $f_1, \ldots, f_r$ en V_x tales que

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} f_i \omega_i \quad \Rightarrow \quad d\omega = \sum_{i=1}^{r} (df_i \wedge \omega_i + f_i d\omega_i).$$

Ahora bien como

$$d\omega_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j<k\leq n}}^{n-1} f_{ijk}\omega_j \wedge \omega_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j<k\leq n}}^{r} f_{ijk}\omega_j \wedge \omega_k + \sum_{r+1\leq j<k\leq n} f_{ijk}\omega_j \wedge \omega_k,$$

para ciertas funciones, tendremos para $r = n - 1$ que el resultado es cierto pues el sumando de la última suma no tiene términos. Ahora para $r \leq n - 2$ como sabemos por hipótesis que para $i = 1, \ldots, r$

$$0 = d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r = \sum_{r+1\leq j<k\leq n} f_{ijk}\omega_j \wedge \omega_k \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r,$$

será $f_{ijk} = 0$ para $r + 1 \leq j < k$ y existen η_i tales que

$$d\omega = \sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \eta_i.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i).- Para $\Delta = \mathcal{P}^0$ basta demostrar, por el **Teorema de Frobenius** (I), que Δ es involutivo.

Sean $D, E \in \Delta$, es decir tales que $\omega E = \omega D = 0$ para toda $\omega \in \mathcal{P}$, y queremos ver que $[D, E] \in \Delta$. Utilizando que

$$\begin{aligned} \omega[D, E] &= D(\omega E) - D^L\omega(E) = -D^L\omega(E) \\ &= -i_D d\omega(E) - d(i_D\omega)E = d\omega(E, D), \end{aligned}$$

basta demostrar que $d\omega(E, D) = 0$. Ahora bien sabemos que localmente

$$d\omega = \sum \omega_i \wedge \eta_i,$$

con las $\omega_i \in \mathcal{P}$ y el resultado se sigue. ∎

Por último daremos una tercera versión del teorema en términos de sistemas de EDP y que de forma elemental dice que dado un sistema

$$z_x = f(x, y), \quad z_y = g(x, y),$$

para que tenga solución z es obviamente necesario que $f_y = g_x$. El teorema asegura que esta condición también es suficiente.

Teorema de Frobenius III 6.26 *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, y $F_i = (f_{i1}, \ldots, f_{im}) \colon U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ aplicaciones diferenciables, para $i = 1, \ldots, n$. Entonces para cada $(x_0, y_0) \in U \times V$ existe un abierto $U_0 \subset U$, entorno de x_0 y una única aplicación $\mathbf{y} \colon U_0 \longrightarrow V$ verificando las ecuaciones*

$$\mathbf{y}(x_0) = y_0, \qquad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_i}(x) = F_i(x, \mathbf{y}(x)), \quad \textit{(en forma vectorial)}$$

si y sólo si en $U \times V$ se verifican las igualdades para $i, k = 1, \ldots, n$, y $j = 1, \ldots, m$

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial f_{ij}}{\partial y_r} f_{kr} = \frac{\partial f_{kj}}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial f_{kj}}{\partial y_r} f_{ir}.$$

Demostración. "⇒" Es obvio derivando pues

$$(f_{ij}(x, y(x)))_{x_k} = (y_j)_{x_i x_k} = (y_j)_{x_k x_i} = (f_{kj}(x, y(x)))_{x_i}.$$

"⇐" La condición del enunciado equivale a que

$$[D_k, D_i] y_j = 0, \qquad \text{para} \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} f_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j},$$

lo cual equivale a que $[D_i, D_k] = 0$, para $i, k = 1, \ldots, n$ y esto a que la distribución generada por los n campos D_i sea involutiva y por el Teorema de Frobenius I a que sea totalmente integrable o equivalentemente que lo sea su sistema de Pfaff asociado, que es el generado por las 1–formas

$$\omega_j = dy_j - \sum_{i=1}^{n} f_{ij} dx_i, \qquad \text{para } j = 1, \ldots, m$$

por lo que existen subvariedades tangentes n–dimensionales pasando por cada punto de $U \times V$ (localmente únicas), en las que las x_i son coordenadas pues las $dy_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ij} dx_i$ y por tanto basta expresar las y_j en cada subvariedad solución en las coordenadas (x_i). ∎

Corolario 6.27 *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ y $W \subset \mathbb{R}^{nm}$ abiertos y, para $i = 1, \dots, m$, $j, k = 1, \dots, n$, $r = 1, \dots, s$*

$$f_{ijk}, h_r \colon U \times V \times W \longrightarrow \mathbb{R},$$

funciones diferenciables, con las $s < m$ funciones h_r, diferenciablemente independientes. Entonces para cada $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S} = \{h_r(x, y, z) = 0\} \subset U \times V \times W$, existe un abierto $U_0 \subset U$, entorno de x_0 y una única función $\mathbf{y} = (y_i) \colon U_0 \longrightarrow V$ verificando las ecuaciones

$$\mathbf{y}(x_0) = y_0, \qquad (\mathbf{y}_{x_j}(x_0)) = z_0, \qquad h_r(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}_{x_j}(x)) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_k}(x) = f_{ijk}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}_{x_1}(x), \dots, \mathbf{y}_{x_n}(x))),$$

si y sólo si en la subvariedad $\mathcal{S}$ se verifican las igualdades (obvias de compatibilidad) para $j, k, l = 1, \dots, n$, e $i = 1, \dots, m$

$$f_{ijk} = f_{ikj},$$
$$\frac{\partial h_r}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial h_r}{\partial y_i} z_{ri} + \sum_{p,q} \frac{\partial h_r}{\partial z_{pq}} f_{pqj} = 0,$$
$$\frac{\partial f_{ilk}}{\partial x_j} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial f_{ilk}}{\partial y_r} z_{rj} + \sum_{p,q} \frac{\partial f_{ijl}}{\partial z_{pq}} f_{pqj} =$$
$$= \frac{\partial f_{ilj}}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial f_{ilj}}{\partial y_r} z_{rk} + \sum_{p,q} \frac{\partial f_{ilj}}{\partial z_{pq}} f_{pqk},$$

Demostración. "⇒" Si existe solución la primera es obvia, la segunda y la tercera se obtienen derivando respecto de las x, las funciones h_r y f_{ijk} en los puntos $(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}_x(x))$ –sobreentendiendo la notación—, pues (para la tercera)

$$(f_{ilk}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}_x(x)))_{x_j} = (y_i)_{x_j x_l x_k} = (y_i)_{x_k x_l x_j} = (f_{ilj}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}_x(x)))_{x_k}.$$

"⇐" La primera condición del enunciado equivale a que en los puntos de la subvariedad $\mathcal{S}$, $[D_k, D_j] y_i = 0$, para los n campos

$$D_k = \partial_{x_k} + \sum_{r=1}^{m} z_{rk} \partial_{y_r} + \sum_{p,q} f_{pqk} \partial_{z_{pq}},$$

la segunda condición nos dice que en $\mathcal{S}$, los campos D_k son tangentes a $\mathcal{S}$, pues $D_j h_r = 0$; y la tercera que $[D_k, D_j]z_{pq} = 0$, por lo tanto como siempre se tiene que $[D_k, D_j]x_l = 0$, tenemos que la distribución generada por los n campos D_i, es involutiva en $\mathcal{S}$. Ahora por el Teorema de Frobenius I tenemos que es totalmente integrable y por lo tanto tiene una subvariedad tangente n–dimensional única por cada punto (x_0, y_0, z_0). Además esta subvariedad $\mathcal{S}_0$ tiene coordenadas (x_j), pues por la proyección $\pi = (x_i)$ a U, $\pi_* D_j = \partial x_j$ y π es difeomorfismo. Ahora basta considerar en $\mathcal{S}_0$ las $y_i = y_i(x)$, pues como en esta subvariedad $z_{ij} = D_j y_i = D_j y_i(x) = \partial_{x_j} y_i$, tendremos que

$$f_{ijk} = D_k z_{ij} = D_k(\partial_{x_j} y_i) = \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k x_j}. \quad \blacksquare$$

Hay una generalización obvia, que no aporta nada nuevo salvo una escritura engorrosa que dejamos al lector, de este resultado de orden 2 a orden arbitrario.

Ejercicio 6.5.1 Comprobar si los sistemas de Pfaff, generados por las siguientes uno–formas en abiertos de $\mathbb{R}^4$, son totalmente integrables:

a) $xyzdu$, b) $[2x + y]dx + xdy + u^2 dz + 2uzdu$, c) $xydz + zdu$.

Ejercicio 6.5.2 Consideremos en $\mathbb{R}^3$ las distribuciones generadas por los campos

$$\text{(i)} \quad \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \text{(ii)} \quad y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

¿Tiene superficies tangentes?. De ser así encontrarlas.

Ejercicio 6.5.3 Dada la forma de volumen y la métrica habitual en $\mathbb{R}^3$

$$\omega_3 = dx \wedge dy \wedge dz\ , \qquad g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz,$$

definimos el *rotacional* de $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $R = \operatorname{rot} D$, como el único campo tal que

$$i_R \omega_3 = d(i_D g).$$

a) Demostrar que $R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ y dar sus componentes en función de las de D.

b) Demuestra que existe una familia de superficies a las que D atraviesa perpendicularmente si y sólo si D y R son perpendiculares.

Ejercicio 6.5.4 Demostrar que tienen solución y encontrarla, los sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\left.\begin{array}{l} z_x = x^2 y, \\ z_y = \frac{z}{y}, \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} z_x = \frac{3z}{x} + \frac{2x^3}{x+y}, \\ z_y = \frac{2x^3}{x+y}, \end{array}\right\}$$

Ejercicio 6.5.5 Demostrar si es involutiva o no la distribución de $\mathbb{R}^4$ generada por los campos

$$z\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}, \quad z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial u}, \quad -xz\frac{\partial}{\partial x} + xz\frac{\partial}{\partial y} - zy\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial u}.$$

Ejercicio 6.5.6 (a) Consideremos en cada punto $p \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ el plano Δ_p tal que, el reflejo especular (respecto de este plano) de un rayo de luz emitido desde el origen a p, sea paralelo al eje x. Demostrar que Δ_p es una distribución involutiva y dar las superficies tangentes.

(b) Idem pero el rayo de luz se emite desde el punto $(1, 0, 0)$ y su reflejo pasa por el $(-1, 0, 0)$.

Ejercicio 6.5.7 Dados dos puntos a y b fijos en el espacio, para cada $p \in \mathbb{R}^3 - \{a, b\}$ consideremos el plano Δ_p que lo contiene y es bisectriz de los segmentos pa y pb, es decir es perpendicular a su plano y lo corta en la bisectriz. Demostrar que Δ_p es una distribución totalmente integrable e integrarla.

Ejercicio 6.5.8 Para cada $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{x = 0, y = 0\}$, consideremos el plano Δ_p que contiene a los puntos $p = (x, y, z)$ y $(0, 0, z)$ y la pendiente de su normal es una función $f(\rho)$, siendo ρ la distancia de p al eje z. ¿Para que funciones f la distribución es totalmente integrable?. Para esas funciones encontrar las superficies solución (ver el ejercicio (7.10.2), pág.512).

Ejercicio 6.5.9 Consideremos en el espacio (sin los planos coordenados), la familia de curvas $y = ax$, $z = by^2$, parametrizadas por a y b; y en cada punto p el plano perpendicular a la curva que pasa por p. Demostrar que esta distribución es involutiva e integrarla.

Ejercicio 6.5.10 Demostrar que un sistema de Pfaff de rango 1 en $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{P} =< \omega >$, cuyo sistema característico $\mathcal{D}[\mathcal{P}]$ tiene un campo D, es totalmente integrable.

6.5.1. Método de Natani.

Veamos ahora un método para resolver un sistema de Pfaff en $\mathbb{R}^3$, generado por una 1–forma

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

totalmente integrable, resolviendo para ello dos ecuaciones diferenciales en el plano:

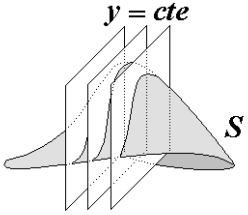


Figura 6.10.

Restrinjamos ω a cada plano $y = cte$ y resolvamos la ecuación diferencial correspondiente

$$P(x, y, z)dx + R(x, y, z)dz = 0,$$

cuya integral primera será para cada y una función $\phi_y(x, z)$ y por tanto sus curvas integrales son $\phi_y(x, z) = cte$. Consideremos ahora para cada superficie solución $\mathcal{S}$ de ω y cada $c \in \mathbb{R}$ la curva

$$\mathcal{S} \cap \{y = c\} = \{(x, c, z) : \phi_c(x, z) = k_s(c)\},$$

donde $k_s(c)$ es la constante que le corresponde a la superficie $\mathcal{S}$ y al $y = c$. Por tanto

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) : \ \phi(x, y, z) = k_s(y)\},$$

para $\phi(x, y, z) = \phi_y(x, z)$.

Ahora bien tenemos que encontrar el valor $k_s(y)$ y esto lo hacemos restringiendo ω a un plano $z = cte$, por ejemplo $z = 1$ y resolviendo la ecuación diferencial

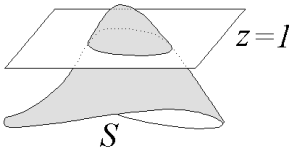


Figura 6.11.

$$P(x, y, 1)dx + Q(x, y, 1)dy = 0,$$

cuya integral primera será una función $h(x, y)$. Entonces como

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \cap \{z = 1\} &= \{(x, y, 1) : \ h(x, y) = a_s\} \\ &= \{(x, y, 1) : \ \phi(x, y, 1) = k_s(y)\}, \end{aligned}$$

basta eliminar para cada y el valor x correspondiente en las dos ecuaciones, obteniendo una relación

$$k_s(y) = G(a_s, y).$$

En definitiva, para cada $a \in \mathbb{R}$ tenemos una superficie de ecuación

$$\phi(x, y, z) - G(a, y) = 0,$$

y nuestras superficies están entre ellas. Si somos capaces de despejar la a en la anterior ecuación, de modo que fuese

$$H(x, y, z) = a,$$

tendríamos resuelto nuestro sistema de Pfaff pues ω es proporcional a la dH.

Ejercicio 6.5.11 Demostrar que la uno–forma

$$\omega = x^2 y dx + \frac{z}{y} dy - dz,$$

es totalmente integrable e integrarla por el método de Natani.

Ejercicio 6.5.12 Demostrar que la uno–forma

$$\omega = z(z + y^2)dx + z(z + x^2)dy - xy(x + y)dz,$$

es totalmente integrable e integrarla por el método de Natani.

6.5.2. 1–formas homogéneas.

Llamamos así a las 1–formas

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

cuyos coeficientes son funciones homogéneas de grado n, es decir funciones f tales que

$$\lambda^n f(x, y, z) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z),$$

entonces la condición de que genere un sistema de Pfaff totalmente integrable se reduce considerablemente, pues en tal caso es invariante por el campo de las homotecias

$$H = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},$$

ya que derivando en $\lambda = 1$, se tiene $Hf = xf_x + yf_y + zf_z = nf$ y por tanto

$$\begin{aligned} H^L\omega &= H(P)dx + Pd(Hx) + H(Q)dy + Qd(Hy) + H(R)dz + Rd(Hz) \\ &= (n + 1)\omega, \end{aligned}$$

se sigue que en el sistema de coordenadas $u_1 = x/z, u_2 = y/z, u_3 = \log z$, nuestra 1–forma se simplifica (pues en él $H = \frac{\partial}{\partial u_3}$); como $x = u_1\, \mathrm{e}^{u_3}$, $y = u_2\, \mathrm{e}^{u_3}$, $z = \mathrm{e}^{u_3}$

$$\begin{aligned}\omega &= \omega\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right) du_1 + \omega\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right) du_2 + \omega\left(\frac{\partial}{\partial u_3}\right) du_3 \\ &= (Px_{u_1} + Qy_{u_1} + Rz_{u_1})du_1 + (Px_{u_2} + Qy_{u_2} + Rz_{u_2})du_2 + \\ &\qquad + (Px_{u_3} + Qy_{u_3} + Rz_{u_3})du_3 \\ &= zPdu_1 + zQdu_2 + z(Pu_1 + Qu_2 + R)du_3,\end{aligned}$$

y nuestro sistema de Pfaff está generado por

$$\gamma = fdu_1 + gdu_2 + du_3 = \frac{P}{Pu_1 + Qu_2 + R}du_1 + \frac{Q}{Pu_1 + Qu_2 + R}du_2 + du_3,$$

para las funciones

$$\begin{aligned}f &= \frac{P}{Pu_1 + Qu_2 + R} = \frac{P(u_1, u_2, 1)}{u_1P(u_1, u_2, 1) + u_2Q(u_1, u_2, 1) + R(u_1, u_2, 1)} \\ g &= \frac{Q}{Pu_1 + Qu_2 + R} = \frac{Q(u_1, u_2, 1)}{u_1P(u_1, u_2, 1) + u_2Q(u_1, u_2, 1) + R(u_1, u_2, 1)}\end{aligned}$$

y como $d\gamma = (g_{u_1} - f_{u_2})du_1 \wedge du_2$, el sistema es totalmente integrable sii

$$d\gamma \wedge \gamma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_{u_1} = f_{u_2} \quad \Leftrightarrow \quad d\gamma = 0,$$

y γ es exacta, en cuyo caso existe una función h tal que $dh = fdu_1 + gdu_2$, y las soluciones son $h + u_3 = cte$, pues $\gamma = d(h + u_3)$.

Ejercicio 6.5.13 Demostrar que la uno–forma

$$\omega = yz(z + y)dx + zx(z + x)dy + xy(x + y)dz,$$

es totalmente integrable e integrarla.

Ejercicio 6.5.14 Demostrar que si $\omega = \sum f_i dx_i \in \Omega(\mathbb{R}^3)$ es homogénea y $\sum f_i x_i = 0$, entonces $< \omega >$ es totalmente integrable.

6.6. Aplicación: Tensor de curvatura

6.6.1. Funciones especiales del fibrado tangente.

Sea $\mathcal{V}$ una variedad diferenciable n–dimensional y consideremos su *fibrado tangente*, es decir el conjunto

$$\mathcal{T}(\mathcal{V}) = \{D_p \in T_p(\mathcal{V}) : p \in \mathcal{V}\},$$

de todas los vectores de todos los espacios tangentes $T_p(\mathcal{V})$ y la aplicación

$$\pi \colon \mathcal{T}(\mathcal{V}) \to \mathcal{V}, \quad \pi(D_p) = p.$$

Ahora para cada abierto coordenado $(U; x_i)$ de $\mathcal{U}$ consideremos el abierto $\pi^{-1}(U)$ con las funciones (coordenadas)

$$x_i(D_p) = x_i(p), \quad z_i(D_p) = D_p x_i,$$

para cada $D_p \in \pi^{-1}(U)$, las cuales establecen una biyección con un abierto $U_n \times \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^{2n}$. Se demuestra que estas cartas definen una estructura diferenciable y que para ella π es una proyección regular.

En el fibrado tangente $T(\mathcal{V})$ tenemos dos tipos especiales de funciones, por una parte las funciones $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ subidas, que aunque rigurosamente son $\pi^*(f)$, las denotaremos igual,

$$f(D_x) = f(x),$$

y por otra parte las definidas por cada 1–forma $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$, del modo

$$\bar{\omega}(D_p) = \omega_p D_p,$$

las cuales, si consideramos coordenadas (x_i) en un abierto V de $\mathcal{V}$ y las correspondientes (x_i, z_i) en el abierto $\pi^{-1}(V)$, del fibrado tangente, las funciones f tienen la misma expresión, mientras que las 1–formas definen funciones lineales en fibras, ya que si $\omega = \sum f_i dx_i$, como función en el fibrado es

$$\bar{\omega} = \sum f_i(x_1, \ldots, x_n) z_i,$$

en particular las $z_i = \bar{dx_i}$.

6.6.2. Variedad con conexión. Distribución asociada.

Consideremos que nuestra variedad tiene una conexión ∇, (ver la lección 3.8.4, pág.177). Entonces para cada campo $D \in \mathcal{D}(U)$ definido en un abierto U de la variedad y cada 1–forma $\omega \in \Omega(U)$, $D^\nabla\omega$ es la 1–forma

$$D^\nabla\omega(E) = D(\omega E) - \omega(D^\nabla E).$$

En estos términos tenemos.

Proposición 6.28 *Cada campo $D \in \mathcal{D}(U)$, define canónicamente un único campo $D^\nabla \in \mathcal{D}(T(U))$, en el abierto $T(U)$ del fibrado tangente, que para las funciones $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y para cada 1–forma $\omega \in \Omega(U)$, entendida como función en el fibrado*

$$D^\nabla f = Df, \qquad D^\nabla(\bar\omega) = \overline{D^\nabla\omega},$$

(por tanto $\pi_* D^\nabla = D$).

Demostración. De existir, veamos quien es en el abierto del fibrado con coordenadas (x_i, z_i), correspondientes a unas coordenadas x_i en la variedad. Tendría que ser

$$\bar D x_k = Dx_k, \qquad \bar D z_k = \overline{D^\nabla(dx_k)}.$$

Veamos que tal campo $\bar D = \sum(\bar D x_i)\partial x_i + \sum(\bar D z_i)\partial z_i$ satisface las dos propiedades:

Para cada f de abajo $\bar D f = Df$, pues $f_{z_i} = 0$ y $\bar D x_i = Dx_i$; y para cada 1–forma $\omega = \sum g_i dx_i$, $\bar D(\bar\omega) = \overline{D^\nabla\omega}$, ya que

$$\bar D(\sum g_i z_i) = \sum z_i \bar D g_i + \sum g_i \bar D z_i$$
$$D^\nabla(\sum g_i dx_i) = \sum (Dg_i)dx_i + \sum g_i D^\nabla dx_i.$$

Por último veamos la unicidad. Si consideramos otro sistema de coordenadas y_i y el correspondiente (y_i, z_i') en el fibrado, entonces para cada campo E, el campo correspondiente $\bar E y_i = Ey_i$, $\bar E z_i' = \overline{E^\nabla dy_i}$ y si $D = E$, $\bar D = \bar E$, pues

$$\bar E y_i = Ey_i = Dy_i = \bar D y_i, \quad \bar E z_i' = \overline{D^\nabla dy_i} = \bar D z_i'. \quad \blacksquare$$

Se tiene trivialmente que

$$D = \sum f_i D_i \quad \Rightarrow \quad D^\nabla = \sum f_i D_i^\nabla,$$

por tanto en un entorno coordenado $(U; x_i)$

$$D = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad D^\nabla = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}^\nabla,$$

ahora bien en coordenadas $(\partial x_i)^\nabla x_k = \delta_{ik}$ y $(\partial x_i)^\nabla z_k$ es la función lineal en fibras correspondiente a la 1–forma $(\partial x_i)^\nabla dx_k$ cuya componente j–esima es $-\Gamma^k_{ij}$, pues

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}^\nabla dx_k\right)\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}[dx_k\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)] - dx_k\left(\frac{\partial}{\partial x_i}^\nabla \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -\Gamma^k_{ij},$$

por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x_i}^\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j,k=1}^{n} z_j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial z_k}.$$

Ahora dados dos campos tangentes a la variedad $D, E \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, tendremos dos significados para

$$D^\nabla E^\nabla - E^\nabla D^\nabla - [D, E]^\nabla,$$

una como endomorfismo en los tensores de todo tipo en $\mathcal{V}$, que sobre las funciones se anula y al que llamaremos *endomorfismo curvatura*, pues sobre los campos $F \in \mathcal{D}$ es el *tensor de curvatura*

$$R(D, E, F) = D^\nabla E^\nabla F - E^\nabla D^\nabla F - [D, E]^\nabla F,$$

y otra como el campo tangente en el fibrado tangente

$$[D^\nabla, E^\nabla] - [D, E]^\nabla,$$

el cual sobre las funciones de $\mathcal{V}$ se anula y sobre cada 1–forma ω, entendida como función en el fibrado, vale la 1–forma

$$R(D, E, \omega) = D^\nabla E^\nabla \omega - E^\nabla D^\nabla \omega - [D, E]^\nabla \omega.$$

Proposición 6.29 *Dados* $D, E, F \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ *y* $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$

$$\omega(R(D, E, F)) = -R(D, E, \omega)F.$$

Demostración. Derivando la función $E(\omega F) = E^\nabla\omega(F)+\omega(E^\nabla F)$, respecto de D, tenemos la primera igualdad (la segunda por simetría)

$$D(E(\omega F)) = D^\nabla E^\nabla\omega(F) + E^\nabla\omega(D^\nabla F) + D^\nabla\omega(E^\nabla F) + \omega(D^\nabla E^\nabla F)$$
$$E(D(\omega F)) = E^\nabla D^\nabla\omega(F) + D^\nabla\omega(E^\nabla F) + E^\nabla\omega(D^\nabla F) + \omega(E^\nabla D^\nabla F),$$

y restando tenemos

$$[D,E](\omega F)) = D^\nabla E^\nabla\omega(F) - E^\nabla D^\nabla\omega(F) + \omega(D^\nabla E^\nabla F - E^\nabla D^\nabla F),$$

pero por la fórmula del principio

$$[D,E](\omega F)) = [D,E]^\nabla\omega(F) + \omega([D,E]^\nabla F). \quad \blacksquare$$

Corolario 6.30 *El tensor de curvatura es nulo sii para cualesquiera $D, E \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$,*

$$[D^\nabla, E^\nabla] = [D,E]^\nabla,$$

Demostración. Por el resultado anterior la curvatura es nula sii el endomorfismo curvatura se anula en las 1–formas y como sobre las funciones f de la variedad siempre se anula, tendremos que el campo en el fibrado

$$[D^\nabla, E^\nabla] - [D,E]^\nabla = 0. \quad \blacksquare$$

Distribución asociada a una conexión

La colección de todos los campos subidos generan en el fibrado tangente una distribución que denotaremos Δ, es decir para cada $p \in T(\mathcal{V})$ y $x = \pi(p)$, definimos

$$\Delta_p = \{D_p^\nabla : \ D \in \mathcal{D}(U), \ U \text{ abierto entorno de } x\}.$$

que para cada abierto coordenado $(U; x_i)$ define el modulo en el abierto $T(U)$

$$\Delta(T(U)) = < \frac{\partial}{\partial x_1}^\nabla, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}^\nabla > .$$

y en términos del sistema de Pfaff asociado

$$\mathcal{P}(T(U)) = < \omega_1, \ldots, \omega_n >,$$

para las 1–formas incidentes

$$\omega_k = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n z_j \Gamma_{ij}^k) dx_i + dz_k. \tag{6.5}$$

Definición. Diremos que un *campo tangente D es paralelo* si para cualquier otro E, $E^\nabla D = 0$.

Diremos que una *conexión es plana* si todo punto $x \in \mathcal{V}$ tiene un entorno abierto U con una base $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}(U)$, de *campos paralelos*. Lo cual equivale a que para todo punto $x \in \mathcal{V}$ y todo $D_x \in T_x(\mathcal{V})$ existe un campo paralelo $D \in \mathcal{D}(U_x)$, definido en un entorno abierto de x, que en x define D_x.

Proposición 6.31 *Dado un abierto $U \subset \mathcal{V}$, un campo tangente $D \in \mathcal{D}(U)$ es paralelo sii la subvariedad del fibrado tangente $s_D(U) = \{s_D(x) = D_x : \ x \in U\}$ es tangente a Δ.*

Demostración. Para cada $x \in U$ consideremos un entorno abierto coordenado $(U_x; x_i)$, entonces si en él $D = \sum f_i \partial x_i$, tendremos que para el abierto coordenado $(T(U_x); (x_i, z_i))$ del fibrado tangente

$$s_D(U) \cap T(U_x) = \{z_i = f_i(x_1, \dots, x_n)\},$$

ahora que D sea paralelo equivale a que para todo $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} 0 = \partial x_i^\nabla D &= \sum_{k=1}^n f_{kx_i} \partial x_k + \sum_{j=1}^n f_j \partial x_i^\nabla \partial x_j \\ &= \sum_{k=1}^n f_{kx_i} \partial x_k + \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^n f_j \Gamma_{ij}^k) \partial x_k = \sum_{k=1}^n (f_{kx_i} + \sum_{j=1}^n f_j \Gamma_{ij}^k) \partial x_k, \end{aligned}$$

es decir que para $i, k = 1, \dots, n$, $f_{kx_i} + \sum_{j=1}^n f_j \Gamma_{ij}^k = 0$, y esto equivale a que la subvariedad sea tangente a Δ, pues en ella $z_k = f_k(x)$ y por (6.5), pág.372,

$$i^* \omega_k = \sum_{i=1}^n (f_{kx_i} + \sum_{j=1}^n f_j \Gamma_{ij}^k) dx_i = 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 6.32 *Para una conexión ∇ en $\mathcal{V}$ son equivalentes:*

i) La conexión es plana.

ii) El tensor de curvatura $R = 0$.

iii) La distribución Δ en el fibrado tangente es totalmente integrable.

Demostración. (i)⇒(ii) Si la conexión es plana todo punto tiene un entorno abierto U con una base $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}(U)$, de campos paralelos, por tanto

$$\forall i, j, k, \quad R(D_i, D_j, D_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 0.$$

(ii)⇒(iii) Por (6.30) tenemos que para cualesquiera campos $D, E \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$,

$$[D^\nabla, E^\nabla] = [D, E]^\nabla,$$

por tanto Δ es involutiva y por el Teorema de Frobenius (6.21) Δ es totalmente integrable.

(iii)⇒(i) Veamos que para todo $x \in \mathcal{V}$ y todo $D_x \in T_x(\mathcal{V})$ existe un campo paralelo $D \in \mathcal{D}(U_x)$ definido en un entorno abierto de x que en x define D_x. Si la distribución es totalmente integrable, existe una subvariedad solución $\mathcal{S}$ pasando por el punto del fibrado $y = D_x$ y en ella $\pi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{V}$ es difeomorfismo local, pues $\pi_*\colon T_y(\mathcal{S}) = \Delta_y \to T_x(\mathcal{V})$ es isomorfismo pues es sobre ya que $\pi_* E^\nabla = E$ y ambos son de dimensión n. Por tanto existe un abierto V de y en $\mathcal{S}$, un entorno abierto U de x y un difeomorfismo $\sigma\colon U \to V \subset T(\mathcal{V})$ que es una sección local de π, tal que $\sigma(x) = y = D_x$, la cual define un campo tangente $D \in \mathcal{D}(U)$, $D_p = \sigma(p) \in \mathcal{S}$, que en x define D_x y $\sigma(U)$ es una subvariedad tangente y por la proposición (6.31), D es paralelo. ∎

6.7. Aplicación: Termodinámica

Definición. Dada una variedad diferenciable $\mathcal{V}$, llamaremos *curva diferenciable a trozos*, a toda aplicación continua

$$X\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{V}$$

para $I = [a, b]$ ó $I = \mathbb{R}$, diferenciable salvo en un número finito de puntos $a \le t_1 < \cdots < t_n \le b$, tal que en cada (t_i, t_{i+1}) es la restricción de una aplicación diferenciable definida en un intervalo (a_i, b_i), con $a_i < t_i < t_{i+1} < b_i$. Denotaremos con $T = X_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$.

En el caso de que $X(a) = X(b)$ diremos que la curva es un *ciclo*. Observemos que por ser la variedad conexa, dos puntos cualesquiera de ella $p, q \in \mathcal{V}$ pueden unirse mediante una curva X, es decir existe $X : I \to \mathcal{V}$ y $r, s \in I$, tales que $X(r) = q$ y $X(s) = p$.

Definición. Dada una curva X y dos puntos de ella $q = X(r)$, $p = X(s)$ y dada una 1–forma $\omega \in \Omega$, entenderemos por *integral a lo largo de* X

de ω, entre los instantes r y s, a

$$\int_r^s \omega = \int_r^s X^*\omega = \int_r^s [\omega T \circ X]\, dt,$$

Si X es un ciclo de extremos a y b, llamaremos al valor anterior, para $r = a$ y $s = b$, integral de ω a lo largo del ciclo, y lo denotaremos si no hay confusión por

$$\int \omega.$$

Ejercicio 6.7.1 Demostrar que la integral a lo largo de cualquier ciclo de una 1–forma exacta es cero.

Definición. Diremos que una variedad diferenciable $\mathcal{V}$ de dimensión n, con dos 1–formas ω_Q y ω_W y un sistema de Pfaff $\mathcal{P}$, de rango 1 totalmente integrable, forman un *sistema termodinámico* si se verifican los **tres principios de la termodinámica** que a continuación expondremos.

Nota 6.33 Pero antes de esto daremos algunos términos que utilizaremos en la exposición:

A los puntos de $\mathcal{V}$ los llamamos *estados del sistema*.

A ω_Q la llamamos 1–forma de *calor*.

A ω_W la llamamos 1–forma de *trabajo*.

A $\mathcal{P}$ lo llamamos sistema de Pfaff de la *temperatura*.

A las subvariedades $n-1$–dimensionales tangentes al $\mathcal{P}$, las llamamos *haz de isotermas*.

A cualquier $\theta \in \mathcal{C}^\infty(U)$, con U abierto de $\mathcal{V}$, tal que $\mathcal{P}(U) =< d\theta >$, la llamamos *función temperatura*.

A cada curva en $\mathcal{V}$ la llamamos *transformación termodinámica*.

En *1843* el físico británico J.Joule (*1818–1889*) determinó que el trabajo y el calor eran equivalentes, en el sentido de que siempre se necesitan $4,18J$ de trabajo para elevar 1 grado centígrado 1 gramo de agua, es decir para obtener 1cal de energía térmica. El experimento que realizó consistía en dejar caer un peso atado a una cuerda enrollada en un eje fijo que al girar movía unas paletas que a su vez agitaban el agua de un recipiente, que debido a esa fricción se calentaba. El trabajo realizado por el cuerpo en su descenso se convertía en calor absorbido por el agua. De este modo trabajo y calor son formas distintas, pero equivalentes y comparables, en las que se puede transformar la energía de un sistema.

Definición. Dada una transformación termodinámica X en $\mathcal{V}$, y dos estados suyos $X(r)$ y $X(s)$, llamamos *calor y trabajo intercambiado* a lo largo de la transformación entre los instantes r y s, respectivamente a

$$\int_r^s \omega_Q, \quad \int_r^s \omega_W.$$

Si X es un ciclo, llamaremos *calor y trabajo realizado* a lo largo del ciclo, respectivamente a $\int \omega_Q$ e $\int \omega_W$.

En un ciclo diremos que se produce trabajo si $\int \omega_W < 0$.

Definición. Dada una transformación termodinámica X, diremos que en un instante $t \in I$, se *gana calor* si $\omega_Q T_{X(t)} > 0$, y que se *pierde calor* si $\omega_Q T_{X(t)} < 0$. Denotaremos las colecciones de estos instantes respectivamente por I_Q^+ e I_Q^-.

Primer principio de la termodinámica

"Dados dos puntos $p, q \in \mathcal{V}$ en un sistema termodinámico, la suma del calor y el trabajo intercambiado entre ellos no depende de la transformación termodinámica que los une".

Denotaremos tal valor por

$$\int_p^q \omega_Q + \omega_W.$$

Esto es equivalente a decir que a lo largo de un ciclo la suma del calor y el trabajo es nula.

Definición. En virtud de este primer principio podemos definir —fijado un punto $p \in \mathcal{V}$—, la función

$$U_p(x) = \int_p^x \omega_Q + \omega_W.$$

Observemos que si consideramos otro punto $q \in \mathcal{V}$, y la función U_q que define, tendremos que $U_p - U_q$ es una constante en virtud del primer principio. Por tanto si estas funciones U son diferenciables, como veremos a continuación, entonces sus diferenciales coinciden —como veremos— , con $\omega_Q + \omega_W$. A esta función U determinada salvo una constante la llamaremos *energía interna del sistema*.

Lema 6.34 *La función $U \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$.*

Demostración. Por la observación anterior basta demostrar que si U se anula en $p \in \mathcal{V}$, existe un entorno de p en el que U es diferenciable. Consideremos un entorno coordenado de p, $(V_p; u)$, tal que $u(p) = 0$, y sea $q \in V_p$ con coordenadas $u(q) = x$. Entonces para la transformación termodinámica —en coordenadas—, $X(t) = tx$, tendremos que si $\omega_Q + \omega_W = \sum f_i du_i$,

$$U(q) = \int_0^1 X^*[\sum f_i du_i] = \int_0^1 [\sum f_i(tx)x_i]dt,$$

pues $X_*(\frac{\partial}{\partial t}) = \sum x_i(\frac{\partial}{\partial u_i})$. La diferenciabilidad de U se sigue. ∎

Lema 6.35 *$dU = \omega_Q + \omega_W$.*

Demostración. Llamemos por comodidad $\gamma = \omega_Q + \omega_W$. Por la observación basta demostrar que para cada $p \in \mathcal{V}$, $d_pU = \gamma_p$, donde U es la función energía que se anula en p. Sea $D_p \in T_p(\mathcal{V})$, bastará demostrar que

$$D_pU = \gamma_p D_p,$$

Tomemos un entorno coordenado de p, en el que $D_p = \frac{\partial}{\partial u_1}$ y $u(p) = 0$. Si $\gamma = \sum f_i(u_1, \cdots, u_n)du_i$, entonces $\gamma_p D_p = f_1(0)$ y por (6.34)

$$\begin{aligned} D_pU &= \lim \frac{U(r, 0, \ldots, 0)}{r} \\ &= \lim \frac{1}{r} \int_0^1 f_1(tr, 0, \ldots, 0) r\, dt \\ &= \lim \frac{1}{r} \int_0^r f_1(s, 0, \ldots, 0) ds = f_1(0). \end{aligned}$$ ∎

Un gas definido por su presión $p = F/s$ y su volumen v es el ejemplo más simple de sistema termodinámico. Si el gas se expande y su volumen pasa a ser $v + dv = v + sdx$, entonces el trabajo hecho por él es $\omega_W = -Fdx = -pdv$ y si (p, v) son sistema de coordenadas, el calor es

$$\omega_Q = dU - \omega_W = U_p dp + (U_v + p)dv.$$

Segundo principio de la termodinámica o de Kelvin–Planck

"Si X es un ciclo en el que se produce trabajo, entonces hay puntos en los que se pierde calor".

$$\int \omega_W < 0 \quad \Rightarrow \quad I_Q^- \neq \varnothing.$$

Teorema 6.36 *Si $\omega_{Qp} \neq 0$, para un $p \in \mathcal{V}$, entonces condición necesaria y suficiente para que el segundo principio sea válido localmente, es decir en los ciclos de un entorno de p, es que el germen en p, del sistema de Pfaff $< \omega_Q >$ sea totalmente integrable.*

Demostración. "$\Leftarrow$" Sabemos que para cada $p \in \mathcal{V}$, existe un entorno coordenado U_p, en el que $\omega_Q = f du$, siendo $f \neq 0$ en todo U_p, por lo que podemos suponer que $f > 0$, pues en caso contrario bastaría tomar la coordenada $-u$. Supongamos ahora que en un ciclo X de U_p se tiene $\int \omega_W < 0$, y por el primer principio que $\int \omega_Q > 0$. Esto implica que en algunos puntos $\omega_Q T = f du(T) = f \cdot (Tu) > 0$ y por tanto que $Tu > 0$, pero como

$$0 = \int du = \int_a^b Tu \circ X$$

tendremos que Tu toma valores positivos y negativos, y por tanto $\omega_Q T$.

"$\Rightarrow$" Veremos que hay un entorno de p en el que el incidente Δ de ω_Q es involutivo. Tomemos un entorno coordenado U_p, de p, en el que se verifique el segundo principio y sean $D_1, D_2 \in \Delta$, es decir tales que $\omega_Q D_i = 0$ y veamos si $\omega_Q[D_1, D_2] = 0$. Supongamos que existe un $z \in U_p$ para el que $\omega_Q[D_1, D_2]_z < 0$. Para θ y τ los grupos uniparamétricos de D_1 y D_2 en U_p, sea

$$\gamma(t) = \tau_{-t} \circ \theta_{-t} \circ \tau_t \circ \theta_t(z),$$

tomemos un r de su dominio y sean

$$z_1 = \theta(r, z), \quad z_2 = \tau(r, z_1), \quad z_3 = \theta(-r, z_2), \quad z_4 = \tau(-r, z_3),$$

Definamos entonces el ciclo $X\colon [0, 5r] \to \mathcal{V}$, tal que para cada $t \in [0, r]$

$$\begin{aligned} X(t) &= \theta(t, z), \\ X(r+t) &= \tau(t, z_1), \\ X(2r+t) &= \theta(-t, z_2), \\ X(3r+t) &= \tau(-t, z_3), \\ X(4r+t) &= G(r-t) = \gamma(\sqrt{r-t}), \end{aligned}$$

Sabemos por (2.42), pág.107, que

$$[D_1, D_2]_z = G_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0 = \lim_{s\to 0} G_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_s = -\lim_{t\to 5r-} T_{X(t)},$$

por tanto

$$\lim_{t\to 5r-} \omega_Q T_{X(t)} = -\omega_Q [D_1, D_2]_z > 0,$$

y haciendo $r > 0$ suficientemente pequeño, tendremos que $\omega_Q T > 0$, para $T = X_*(\frac{\partial}{\partial t})$, en el quinto tramo del ciclo. Como por otra parte $T = D_i$ en los cuatro primeros tramos del ciclo, tendremos que en ellos $\omega_Q T = 0$, y por tanto $\omega_Q T \geq 0$ y

$$\int \omega_Q = \int_{z_4}^{z} \omega_Q > 0 \quad \Rightarrow \quad \int \omega_W < 0,$$

y por el segundo principio existe t, tal que $\omega_Q T_{X(t)} < 0$, lo cual es contradictorio. ∎

Tercer principio de la Termodinámica o de Clausius

"Si X es un ciclo en un abierto U, $\theta \in \mathcal{C}^\infty(U)$ una función temperatura para la que hay puntos $t \in I_Q^+$, $r \in I_Q^-$, en los que $\theta(X(t)) < \theta(X(r))$, entonces el trabajo realizado a lo largo del ciclo es positivo". Es decir

$$[\omega_Q T_{X(r)} < 0 < \omega_Q T_{X(t)}, \quad \theta(X(t)) < \theta(X(r))] \quad \Rightarrow \quad \int \omega_W > 0.$$

En estas condiciones se tiene el

Teorema 6.37 *Para cada $p \in \mathcal{V}$ en el que $\omega_{Qp} \neq 0$ y $d_p\omega_Q \neq 0$, y cada función temperatura θ, definida en un entorno de p, existe un entorno coordenado U de p en el que $\omega_Q = f(\theta, u)du$.*

Demostración. Por (6.36) sabemos que existe un entorno coordenado de p en el que $\omega_Q = f du$, por tanto $d\omega_Q = df \wedge du$ y por ser $d\omega_Q \neq 0$ tendremos que df y du son independientes. Consideremos ahora una función temperatura θ y supongamos que $d\theta$, df y du son independientes. Extendámoslas a una base y consideremos el sistema de coordenadas correspondiente $(\theta, f, u, u_4, \ldots, u_n)$ en un cierto entorno U de p. Tomando $k > 0$ suficientemente pequeño, podemos considerar en U el ciclo que en coordenadas es $X(t) = k(\operatorname{sen} t, 1, \cos t, 0, \ldots, 0)$, para el que $\theta[X(t)] = k \operatorname{sen} t$ y

$$T = X_*(\frac{\partial}{\partial t}) = (k\cos t)\frac{\partial}{\partial \theta} - k \operatorname{sen} t \frac{\partial}{\partial u}, \quad \omega_Q T = -k^2 \operatorname{sen} t,$$

por tanto $3\pi/2 \in I_Q^+$, $\pi/2 \in I_Q^-$, y si $X(3\pi/2) = p$ y $X(\pi/2) = q$, entonces $\theta(p) = -k < \theta(q) = k$. Se sigue así del tercer principio que $\int \omega_W > 0$ y del primero que $\int \omega_Q < 0$, siendo así que

$$\int \omega_Q = -k^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \, dt = 0$$

por tanto $df = \lambda_1 d\theta + \lambda_2 du$ y $\partial f/\partial u_i = 0$. El resultado se sigue. ∎

Definición. Consideremos ahora un sistema termodinámico

$$(\mathcal{V}, \omega_Q, \omega_W, \mathcal{P}),$$

de dimensión n y U un entorno coordenado de un punto $p \in \mathcal{V}$, con coordenadas $(\theta, u_2, \ldots, u_n)$, donde θ es una función temperatura de $\mathcal{V}$. Consideremos en $U \times U$ las coordenadas habituales

$$(\alpha, v_2, \ldots, v_n, \beta, w_2, \ldots, w_n),$$

para $\alpha = \pi_1^*\theta$, $v_i = \pi_1^* u_i$, $\beta = \pi_2^*\theta$, $w_i = \pi_2^* u_i$, —donde π_1 y π_2 son las proyecciones en $U \times U$—, y la subvariedad $2n-1$–dimensional $\mathcal{V}_s = \{\alpha = \beta\}$. Ahora consideremos en $\mathcal{V}_s$ la 1–forma σ_Q —restricción a $\mathcal{V}_s$ de $\pi_1^*\omega_Q + \pi_2^*\omega_Q$—, la 1–forma σ_W —restricción a $\mathcal{V}_s$ de $\pi_1^*\omega_W + \pi_2^*\omega_W$—, y el sistema de Pfaff $\mathcal{P}^s$, generado por $d\alpha = d\beta$. A $(\mathcal{V}_s, \sigma_Q, \sigma_W, \mathcal{P}^s)$ la llamaremos suma del sistema $\mathcal{V}$ consigo mismo.

Cuarto principio de la Termodinámica o de la suma de sistemas termodinámicos

"La suma de un sistema termodinámico consigo mismo es un nuevo sistema termodinámico".

La idea de este principio viene a ser la siguiente: Si tenemos dos aparatos iguales, representando cada uno de ellos un sistema termodinámico, y los ponemos en contacto de tal manera que en cada instante de tiempo tienen la misma temperatura, entonces el bloque formado por ambos vuelve a ser un sistema termodinámico.

Como consecuencia de este simple hecho se tiene el siguiente asombroso resultado:

Teorema 6.38 *Para cada punto $p \in \mathcal{V}$, en el que $\omega_{Qp} \neq 0$ y $d_p\omega_Q \neq 0$, existe un entorno coordenado en el que $\omega_Q = TdS$, siendo T una función temperatura. Además T es única salvo un factor multiplicativo y S es única salvo un factor multiplicativo y otro aditivo.*

Demostración. Sea $p \in \mathcal{V}$. Por (6.37) existe un entorno coordenado U_p, tal que $\omega_Q = f(\theta, u)du$, con θ una función temperatura. Consideremos la suma del sistema $\mathcal{V}$ consigo mismo, con $U \subset U_p$, de tal forma que para $x = i^*\pi_1^* u$ e $y = i^*\pi_2^* u$, $(\alpha, x, y, \ldots)$ formen un sistema de coordenadas en $\mathcal{V}_s$. Consideremos ahora el campo $D = \partial/\partial\alpha$ en este sistema de coordenadas. Ahora por (6.37) tenemos que en un entorno con coordenadas $(\alpha, z, \ldots)$

$$\sigma_Q = F(\alpha, z)dz,$$

pero por otra parte tenemos que

$$\sigma_Q = i^*\pi_1^*\omega_Q + i^*\pi_2^*\omega_Q = f(\alpha, x)dx + f(\alpha, y)dy = gdx + hdy,$$

por tanto

$$0 = Dz = dz(D) = \frac{gdx + hdy}{F}(\partial/\partial\alpha),$$

de donde que

$$0 = d(Dz) = D^L dz = D^L[\frac{g}{F}dx + \frac{h}{F}dy] = D(\frac{g}{F})dx + D(\frac{h}{F})dy,$$

y $D(g/F) = D(h/F) = 0$, por tanto

$$\frac{DF}{F} = \frac{Dg}{g} = \frac{Dh}{h} = r(\alpha),$$

pues $g = f(\alpha, x)$ y $h = f(\alpha, y)$. Se sigue que $f(\alpha, x) = k(x)\exp\{\int r(\alpha)d\alpha\}$ y por tanto

$$\omega_Q = f(\theta, u)du = k(u)\exp\{\int r(\theta)\, d\theta\}du = TdS,$$

para $T = \exp\{\int r(\theta)d\theta\}$ y $S = \int k(u)\, du$. Ahora si $d\omega_Q = dT \wedge dS \neq 0$ en todo $\mathcal{V}$, tendremos que si $\omega_Q = T'dS'$, con T' otra función temperatura —y por tanto $T' = \lambda(T)$—, entonces extendiendo S, T a un sistema de coordenadas, tendremos que

$$TdS = T'dS' = T'[(\partial S'/\partial T)dT + (\partial S'/\partial S)dS + (\partial S'/\partial u_3)du_3 + \cdots],$$

y por tanto

$$\partial S'/\partial T = \partial S'/\partial u_i = 0, \quad T = \lambda(T)(\partial S'/\partial S) = \lambda(T)\mu(S),$$

de donde se sigue que $\mu(S)$ es una constante y el resultado se sigue. ∎

Definición. Se llama *entropía* a la función S del resultado anterior.

Nota 6.39 Observemos que según esto, en un entorno de cada punto hay una función temperatura canónica T, determinada salvo un factor, y por tanto un cero absoluto de temperatura.

6.8. Aplicación: Clasificación de formas

6.8.1. Clasificación de 1–formas

En esta lección daremos el **Teorema de Darboux**, que clasifica localmente las 1–formas regulares, entendiendo que una 1–forma ω es *regular* si es no singular, es decir $\omega_x \neq 0$ en cada punto x, y la dimensión de la intersección del hiperplano

$$H = \{D_x \in T_x(\mathcal{V}) : \omega_x D_x = 0\},$$

con el subespacio

$$R = \operatorname{rad} d_x\omega = \{D_x \in T_x(\mathcal{V}) : \ i_{D_x} d_x\omega = 0\},$$

es constante en x (a la codimensión de este subespacio la llamaremos *clase* de ω).

Definición. Llamaremos *sistema característico de una* 1*–forma* $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$ en un punto $p \in \mathcal{V}$ al subespacio vectorial de $T_p(\mathcal{V})$

$$\Delta_p(\omega) = \{D_p \in T_p(\mathcal{V}) : \ \omega_p D_p = 0, \ i_{D_p} d_p\omega = 0\}.$$

Diremos que ω es *regular* si la dimensión de su sistema característico es constante en p y llamaremos *clase* de ω en p a la codimensión de su sistema característico, es decir a

$$\dim \mathcal{V} - \dim \Delta_p(\omega).$$

Veremos que la clase de una 1–forma regular ω es el mínimo número de funciones diferenciablemente independientes en el que se puede expresar ω y que en dimensión n hay exactamente n 1–formas regulares, que

para $n = 3$ son: dx, ydx y $dz + ydx$, y para las que los correspondientes subespacios son respectivamente

ω	H	R	$H \cap R$	**clase**
dx	$< \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} >$	$< \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} >$	$< \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} >$	1
ydx	$< \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} >$	$< \frac{\partial}{\partial z} >$	$< \frac{\partial}{\partial z} >$	2
$dz + ydx$	$< \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z} >$	$< \frac{\partial}{\partial z} >$	$\{0\}$	3

Lema 6.40 *Consideremos $m \times n$ funciones diferenciables f_{ij} de una variedad $\mathcal{V}$, tales que la matriz $\mathbf{A}(x) = (f_{ij}(x))$ sea de rango constante $r < n$. Sea $x \in \mathcal{V}$, entonces todo valor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ del núcleo –que es $n-r$–dimensional–, $\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{a} = 0$, se puede extender a una solución funcional en un entorno de x, es decir que existe un entorno U_x y funciones $h_i \in \mathcal{C}^\infty(U_x)$, tales que $h_i(x) = a_i$ y para todo $p \in U_x$, $\sum f_{ij}(p)h_j(p) = 0$, para todo $1 \leq i \leq m$.*

Demostración. En todo punto x la matriz tiene rango constante r, por tanto hay r filas independientes y el resto son combinaciones lineales suyas. Entre las r hay un menor no nulo $\mathbf{B}$ de orden r, es decir con determinante no nulo en x y por tanto en un entorno U_x de x, por lo que en ese entorno las filas de antes siguen siendo combinación lineal de las r de $\mathbf{B}$. Ahora basta considerar el sistema correspondiente a estas filas y columnas que, sin falta de generalidad podemos considerar, multiplicando adecuadamente por las matrices que intercambian filas (o columnas), que son las r primeras

$$0 = \mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{h}(p) = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}$$

para $\mathbf{f} = (h_1, \ldots, h_r)^t$ y $\mathbf{g} = (h_{r+1}, \ldots, h_n)^t$. Ahora para cualquier valor de $\mathbf{g}$ existe un único valor $\mathbf{f} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{g}$, tal que $\mathbf{h}$ es solución y el cálculo es válido en U_x. Observemos que $\mathbf{B}\mathbf{f} + \mathbf{C}\mathbf{g} = 0$ implica $\mathbf{D}\mathbf{f} + \mathbf{E}\mathbf{g} = 0$, pues las filas de $(\mathbf{D} \;\; \mathbf{E})$ son combinación lineal de las de $(\mathbf{B} \;\; \mathbf{C})$. ∎

Proposición 6.41 *Sea $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$ regular de clase m. Entonces $\{\Delta_p(\omega) : p \in \mathcal{V}\}$ es una distribución involutiva de rango $n - m$, cuyo módulo asociado es*

$$\Delta = \{D \in \mathcal{D},\ \omega D = 0,\ D^L\omega = 0\}.$$

Demostración. Si en un entorno coordenado de un p, $\omega = \sum g_i dx_i$, entonces $D_p = \sum h_i(p)\partial x_{ip} \in \Delta_p = \Delta_p(\omega)$ si y sólo si

$$\sum g_i(p)h_i(p) = 0 \ , \quad \sum g_{ij}(p)h_j(p) = 0,$$

para $g_{ij} = \partial g_i/\partial x_j - \partial g_j/\partial x_i$, lo cual equivale a que las $h_i(p)$ satisfagan el sistema

$$\begin{pmatrix} g_1(p) & \cdots & g_n(p) \\ g_{11}(p) & \cdots & g_{1n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(p) & \cdots & g_{nn}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(p) \\ h_2(p) \\ \vdots \\ h_n(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora bien $\dim \Delta_p(\omega) = n - m = r$ por tanto la matriz $\mathbf{A}(p)$ de este sistema es de rango constante y se sigue del Lema anterior (6.40), que dado $D_p = \sum h_i(p)\partial x_{ip} \in \Delta_p = \Delta_p(\omega)$, existe un entorno U_p de p y un campo $D \in \mathcal{D}(U_p)$, que satisface

$$\omega D = 0 \ , \quad i_D d\omega = 0,$$

por tanto $D_x \in \Delta_x$ para todo $x \in U_p$. Si ahora cogemos una base $D_{1p}, \ldots, D_{rp}$ de Δ_p, la misma construcción nos dará campos independientes $D_1, \ldots, D_r$ en un entorno U_p de p, tales que para cada $x \in U_p$, $D_{1x}, \ldots, D_{rx} \in \Delta_x$ y por tanto base de Δ_x.

Que la distribución es involutiva se sigue de que

$$\begin{aligned} D \in \Delta \quad &\Leftrightarrow \quad D \in \mathcal{D}, \ \ \forall x \in \mathcal{V}, \ D_x \in \Delta_x \\ &\Leftrightarrow \quad D \in \mathcal{D}, \ \omega D = 0, \ i_D d\omega = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad D \in \mathcal{D}, \ \omega D = 0, \ D^L\omega = 0, \end{aligned}$$

y la comprobación se deja al lector. ∎

Proposición 6.42 *Sea $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$ regular de clase m. Entonces para todo p existe un entorno coordenado U de p, con coordenadas (v_i) y $\gamma \in \Omega(V)$ regular de clase m, tales que $\omega = \pi^*\gamma$, para $\pi = (v_1, \ldots, v_m)$ y $V = \pi(U_p)$ abierto de $\mathbb{R}^m$.*

Demostración. Consideremos la distribución $\{\Delta_p(\omega) : p \in \mathcal{V}\}$ y Δ su módulo asociado. Por ser involutivo se sigue del **Teorema de Frobenius I** (6.21), que es totalmente integrable y por tanto existe un

sistema de coordenadas (v_i) en un entorno de p tal que Δ está generado por

$$\frac{\partial}{\partial v_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_n}.$$

Si en este sistema de coordenadas es $\omega = \sum g_i dv_i$, entonces $g_i = \omega(\partial v_i) = 0$ para $i = m+1, \ldots, n$ y las funciones $g_1, \ldots, g_m$ dependen sólo de $v_1, \ldots, v_m$, pues

$$0 = \frac{\partial}{\partial v_i} \overset{L}{} \omega = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial v_i} dv_j.$$

Se sigue que existe $\gamma \in \Omega(V)$ con V abierto de $\mathbb{R}^m$ tal que $\omega = \pi^*\gamma$ para $\pi = (v_1, \ldots, v_m)$, con $\gamma_y \neq 0$ para $y \in V$.

Veamos que γ es regular de clase m, es decir que para todo $y \in V$, $\Delta_y(\gamma) = \{0\}$. Sea $x \in U$ tal que $\pi(x) = y$, $E_y \in \Delta_y(\gamma)$ y consideremos cualquier D_x tal que $\pi_* D_x = E_y$. Entonces

$$\omega_x D_x = \pi^*\gamma_y(D_x) = \gamma_y E_y = 0$$
$$i_{D_x} d_x \omega = i_{D_x} d_x(\pi^*\gamma) = i_{D_x}\pi^*(d_y\gamma) = 0,$$

por tanto $D_x \in \Delta_x(\omega)$ y $E_y = \pi_*(D_x) = 0$. ∎

Ejercicio 6.8.1 Sea $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$–espacio vectorial finito dimensional y $G\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathbb{R}$ bilineal y hemisimétrica. Demostrar que:

(i) Si $\mathcal{E}$ tiene dimensión impar entonces el

$$\operatorname{rad} G = \{x \in \mathcal{E} : G(x, y) = 0,\ \forall y \in \mathcal{E}\} \neq \{0\}.$$

(ii) El radical de G tiene dimensión par (o impar) si y sólo si la tiene $\mathcal{E}$.

(iii) El rango de toda matriz hemisimétrica es par.

(iv) Si $\mathcal{H}$ es un hiperplano de $\mathcal{E}$ y $\bar{G}$ es la restricción de G a $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, entonces

$$\operatorname{rad} G = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rad} \bar{G} \text{ es unidimensional}$$
$$\operatorname{rad} G = < e > \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rad} \bar{G} \text{ es bidimensional}$$

Veamos ahora una consecuencia del teorema de la proyección que dice que en dimensión par, toda uno–forma no singular con diferencial sin radical define un sistema de Pfaff proyectable.

Lema 6.43 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad de dimensión par n, ω una 1–forma que no se anula y con $\operatorname{rad} d_x\omega = \{0\}$ en todo punto, entonces:*

i) Para cada x, localmente existe $D \in \mathcal{D}[\mathcal{P}]$, para el sistema de Pfaff de rango 1, $\mathcal{P} =< \omega >$.

ii) Si un vector T_x verifica

$$\omega_x T_x = 0, \qquad i_{T_x} d_x\omega = a\omega_x,$$

para $a \in \mathbb{R}$, entonces T_x es proporcional a D_x.

iii) Para todo $p \in \mathcal{V}$ existe una proyección regular $\pi\colon U_p \to U$, con U_p entorno abierto de p y $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ abierto, tales que $\omega = f\pi^*\gamma$, para γ una 1–forma regular de clase $n-1$.

Demostración. i) Consideremos un entorno coordenado del punto x, $(V_x; x_i)$, $\omega = \sum g_i dx_i$ y veamos si existe $D = \sum h_i \partial x_i \in \mathcal{D}[\mathcal{P}]$, por tanto si existe alguna función h tal que

$$\begin{cases} \omega D = 0 \\ D^L\omega = h\omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega D = 0 \\ i_D d\omega = h\omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega D = 0 \\ i_D d\omega(\partial x_i) = hg_i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum h_j g_j = 0 \\ \sum h_j d\omega(\partial x_j, \partial x_i) = hg_i, \end{cases}$$

lo cual equivale a encontrar, para

$$g_{ij} = d\omega(\partial x_j, \partial x_i) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - \frac{\partial g_j}{\partial x_i},$$

una solución no nula al sistema

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & \cdots & g_n \\ -g_1 & g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -g_n & g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ahora bien este sistema tiene solución funcional no nula, por (6.40), pues $\mathbf{A}$ es hemisimétrica y de orden $n+1$ que es impar, por tanto $\det \mathbf{A} = 0$, pues $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^t = \det -\mathbf{A} = -\det \mathbf{A}$ y es de rango constante n, pues $\det(g_{ij}) \neq 0$. Además $h_i \neq 0$ para algún i, pues en caso contrario las $g_i = 0$.

ii) Se sigue porque el núcleo de esta ecuación es 1–dimensional.

iii) Basta considerar el campo D del resultado anterior y un entorno coordenado $(U_p; u_i)$ en el que $D = \partial u_n$ y aplicar el TEOREMA DE LA PROYECCIÓN a $\mathcal{P} =< \omega >$. Entonces para $\pi = (u_1, \ldots, u_{n-1})$ y $U = \pi(U_p)$, $\mathcal{P} = \pi^*\mathcal{P}'$ y por tanto existe una función f invertible tal que $\omega = f(\pi^*\gamma)$, para una $\gamma \in \Omega(U)$.

Veamos que γ es regular de clase $n-1$, es decir que para cada $y \in U$, $\Delta_y(\gamma) = \{0\}$. Sea $x \in U_p$ tal que $\pi(x) = y$, $E_y \in \Delta_y(\gamma)$ y consideremos cualquier $T_x \in T_x(\mathcal{V})$ tal que $\pi_* T_x = E_y$. Entonces

$$\begin{aligned} \omega_x T_x &= f(x)[\pi^*\gamma_y(T_x)] = f(x)(\gamma_y E_y) = 0, \\ i_{T_x} d_x\omega &= i_{T_x} d_x(f\pi^*\gamma) = i_{T_x}[d_x f \wedge \pi^*\gamma_y + f(x)\pi^* d_y\gamma] \\ &= (T_x f)\pi^*\gamma_y = \frac{(T_x f)}{f(x)}\omega_x, \end{aligned}$$

por tanto el par T_x y $a = T_x f/f(x)$ satisfacen la ecuación de (ii) y T_x es múltiplo de D_x y como $\pi_* D_x = 0$, tendremos que $E_y = 0$. ∎

Ejercicio 6.8.2 Sea $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$, $x \in \mathcal{V}$ y $\omega \neq 0$. Demostrar que si existe un entorno de x en $\mathcal{V}$ y un campo tangente D con $D \neq 0$, tal que $\omega D = 0$ y $D^L\omega = 0$, entonces existe un entorno U_x de x, con coordenadas $u_1, \ldots, u_n$, en el que

$$\omega = f_1(u_1, \ldots, u_{n-1})du_1 + \cdots + f_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1})du_{n-1}.$$

Teorema de Darboux 6.44 *Sea $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$ regular de clase m. Entonces para todo $p \in \mathcal{V}$ existe un abierto U_p, entorno de p en $\mathcal{V}$ y m funciones $z's, x's \in \mathcal{C}^\infty(U_p)$ diferenciablemente independientes tales que en ese abierto:*

$$\omega = \begin{cases} z_1 dx_1 + \cdots + z_k dx_k, & \text{si } m = 2k; \\ dz + z_1 dx_1 + \cdots + z_k dx_k, & \text{si } m = 2k+1. \end{cases}$$

Demostración. Por (6.42) podemos suponer que $m = n$, por tanto para todo $p \in \mathcal{V}$

$$\operatorname{rad} d_p\omega \cap \{\omega_p = 0\} = \Delta_p(\omega) = \{0\},$$

y la dimensión del $\operatorname{rad} d_p\omega$ es 0 ó 1 y por el ejercicio (6.8.1) es 0 si n es par y 1 si n es impar.

Haremos la demostración por inducción en n. Para $n = 1$

$$\omega = f dx = dz, \qquad \text{para} \quad z = \int f(x)dx.$$

Supongamos entonces que el resultado es cierto para $2k-1$ y veamos que también lo es para $2k$ y $2k+1$.

i) Sea $n=2k$, entonces $\operatorname{rad} d_p\omega = \{0\}$.

Se sigue del lema (6.43(iii)) que dado p existe U un entorno coordenado suyo, con coordenadas u_i, tales que para $\pi = (u_1, \ldots, u_{n-1})$ y $V = \pi(U)$,

$$\omega = z_1(\pi^*\gamma),$$

para una $\gamma \in \Omega(V)$ regular de clase $n-1 = 2k-1$ en V, por tanto podemos aplicar la hipótesis de inducción y asegurar que existe un sistema de coordenadas $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k, v_2, \ldots, v_k)$ en V —reduciéndolo si es necesario—, tal que

$$\gamma = d\overline{x}_1 + v_2 d\overline{x}_2 + \cdots + v_k d\overline{x}_k,$$

y por tanto para $z_i = z_1(\pi^* v_i)$ y $x_i = \pi^*\overline{x}_i$

$$\omega = z_1 dx_1 + \cdots + z_k dx_k,$$

y las funciones (x_i, z_i) forman un sistema de coordenadas, pues si existiese un punto $q \in U_p$ en el que $d_q z_1, \ldots, d_q z_k, d_q x_1, \ldots, d_q x_k$, fuesen dependientes, entonces existiría un $E_q \in T_q(\mathcal{V})$ incidente con todas ellas y por tanto tal que

$$d_q z_i(E_q) = d_q x_i(E_q) = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{E_q} d\omega = i_{E_q} \sum_{i=1}^{k} dz_i \wedge dx_i = 0,$$

y E_q estaría en el radical de $d_q\omega$, siendo así que su radical es nulo.

ii) Supongamos que $n = 2k+1$, entonces el $\operatorname{rad} d_p\omega$ tiene dimensión 1 y por tanto la matriz de términos

$$g_{ij} = d_p\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right), \qquad (\text{para } i,j = 1, \ldots, n)$$

es de rango constante $n-1$ y por (6.40) existe un abierto U_p, entorno de p en U y un campo $D \in \mathcal{D}(U_p)$ no nulo en U_p, tal que $i_D d\omega = 0$ y por tanto tal que para $q \in U_p$,

$$\operatorname{rad} d_q\omega = < D_q >,$$

lo cual implica que en todo U_p $\omega D \neq 0$ y podemos tomar D tal que $\omega D = 1$ pues basta multiplicarlo por $1/\omega D$. Consideremos ahora un sistema de coordenadas

$$u_1, \ldots, u_{2k}, z \in \mathcal{C}^\infty(U_p),$$

reduciendo U_p si es necesario, tal que $D = \partial_z$ y $\omega_x \neq d_x z$ (para esto último bastaría sumarle a z una integral primera u_i de D). Ahora como

$$\omega D = 1 \quad \text{y} \quad i_D d\omega = 0,$$

tendremos que $\omega(\partial z) = 1$ y $D^L\omega = 0$, por tanto

$$\omega = dz + \sum_{i=1}^{2k} f_i(u_1, \ldots, u_{2k}) du_i = dz + \pi^*\gamma,$$

para $\pi = (u_1, \ldots, u_{2k})$ y $\gamma = \sum f_i dx_i$, la cual es regular de clase $2k$ en un abierto de $\mathbb{R}^{2k}$, pues si E_y es tal que $i_{E_y} d_y\gamma = 0$ y consideramos x tal que $\pi(x) = y$ y un T_x tal que $\pi_* T_x = E_y$, entonces

$$i_{T_x} d_x\omega = i_{T_x} d_x\pi^*\gamma = \pi^* i_{E_y} d_y\gamma = 0,$$

por tanto T_x es proporcional a D_x y $E_y = 0$, por tanto $\Delta_y(\gamma) = \{0\}$ y el resultado se sigue del caso anterior. ∎

6.8.2. Clasificación de 2–formas.

Veamos una consecuencia inmediata del Teorema de Darboux, para dos–formas.

Corolario 6.45 *Si una variedad tiene una dos–forma ω_2 cerrada y sin radical, entonces la variedad tiene dimensión par $2m$ y localmente existe un sistema de coordenadas $(x_i; z_i)$ que llamaremos simplécticas, tal que*

$$\omega_2 = \sum_{i=1}^{m} dz_i \wedge dx_i.$$

Demostración. Por el ejercicio (6.8.1), pág.385 $k = 2m$ es par y por el Lema de Poincare (3.22), pág.165, localmente es $\omega_2 = d\gamma$, y podemos tomar γ no singular (basta sumarle una dz), por tanto γ es una uno–forma regular de clase k y por el Teorema de Darboux

$$\gamma = \sum_{i=1}^{m} z_i dx_i \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sum_{i=1}^{m} dz_i \wedge dx_i. \quad ∎$$

Lema 6.46 *Sea ω_2 una dos–forma cerrada tal que $\Delta_x = \operatorname{rad}\omega_{2x}$ tiene dimensión constante, entonces Δ_x es una distribución involutiva.*

Demostración. Por (6.40) se tiene que para cada D_x tal que $i_{D_x}\omega_2 = 0$, existe un entorno de x, V_x y un campo $D \in \mathcal{D}(V_x)$, tal que $D_p \in \Delta_p$ para todo $p \in V_x$ y si cogemos una base D_{ix}, tendremos campos D_i que en un entorno de x siguen siendo independientes y de la distribución que es de dimensión constante r, por tanto base. Se sigue que $\Delta =< D_1, \ldots, D_r >$ y para ellos se tiene que $i_{D_i}\omega_2 = 0$. Veamos que es involutiva, para ello veamos que $[D_i, D_j] \in \Delta$ es decir $i_{[D_i,D_j]}\omega_2 = 0$. Sea $D \in \mathcal{D}$, entonces

$$\omega_2([D_i, D_j], D) = D_i(\omega_2(D_j, D)) - D_i^L\omega_2(D_j, D) - \omega_2(D_j, [D_i, D]) = 0,$$

pues $D_i^L\omega_2 = i_{D_i}d\omega_2 + d(i_{D_i}\omega_2) = 0$. ∎

Teorema 6.47 *Toda dos–forma cerrada cuyo radical en cada punto tiene dimensión constante localmente es de la forma*

$$\sum_{i=1}^{m} dz_i \wedge dx_i,$$

con las x_i, z_i diferenciablemente independientes.

Demostración. Por el lema anterior $\Delta_x = \operatorname{rad}\omega_{2x}$ es una distribución involutiva, por tanto totalmente integrable por el Teorema de Frobenius, por lo tanto todo x tiene un entorno abierto coordenado $(V_x; v_i)$ en el que $\Delta =< \partial_{v_{k+1}}, \ldots, \partial_{v_n} >$. Ahora si en este sistema de coordenadas tenemos que

$$\omega_2 = \sum_{1\le i<j\le n} f_{ij}dv_i \wedge dv_j \quad \Rightarrow \quad f_{ij} = \omega_2(\partial_{v_i}, \partial_{v_j}) = 0,$$

para $1 \le i < j$ y $k < j$, por lo que para $\pi = (v_1, \ldots, v_k)$

$$\omega_2 = \sum_{1\le i<j\le k} f_{ij}dv_i \wedge dv_j = \pi^*\gamma_2,$$

pues para cada $s > k$, $\partial_{v_s}^L\omega_2 = 0$, es decir $\partial_{v_s}f_{ij} = 0$; y γ_2 es una dos–forma k–dimensional cerrada y sin radical. Se sigue de (6.45), que

$$\omega_2 = \sum_{i=1}^{m} dz_i \wedge dx_i.$$ ∎

6.9. Variedades simplécticas

6.9.1. Campos Hamiltonianos.

Definición. Llamaremos *estructura simplética* en una variedad diferenciable $\mathcal{V}$ a una dos–forma $\Lambda \in \Lambda_2(\mathcal{V})$ cerrada y sin radical y *variedad simplética* a toda variedad diferenciable $(\mathcal{V}, \Lambda)$ con una estructura simplética. Llamaremos *transformación simplética* entre dos variedades simplécticas a toda aplicación diferenciable $F\colon (\mathcal{V}, \Lambda_\mathcal{V}) \to (\mathcal{U}, \Lambda_\mathcal{U})$, que conserve la estructura simplética, $F^*\Lambda_\mathcal{U} = \Lambda_\mathcal{V}$.

Corolario 6.48 *Toda variedad simplética $(\mathcal{V}, \Lambda)$ es de dimensión par $m = 2n$ y es orientada.* (Ver la pág.978)

Demostración. Que es par es consecuencia de (6.45) y es orientada pues existe la n–forma no nula

$$\Omega_m = \Lambda \wedge \cdots \wedge \Lambda,$$

pues localmente $\Lambda = \sum_{i=1}^n dz_i \wedge dx_i$ y

$$\Omega_m = n!\, dz_1 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge dx_n. \quad \blacksquare$$

Definición. Llamamos *volumen* m–dimensional de una variedad con borde $B \subset \mathcal{V}$ (ver pág.988), a

$$\mathrm{vol}(B) = \int_B \Omega_m.$$

Ejemplo 6.9.1 Transformación simplética[2] *Se sujeta una masa con dos cuerdas con extremos que se deslizan sin fricción sobre dos barras verticales. Para cada altura u_1 y fuerza vertical v_1 ejercida en la primera cuerda existe una única altura u_2 y fuerza vertical v_2 sobre la segunda, de modo que el sistema esté en equilibrio. Veamos que la aplicación $(u_1, v_1) \to (v_2, u_2)$ es simplética.*

[2] Este ejemplo lo hemos extraído de un muy recomendable libro *The Mathematical Mechanic: Using Physical Reasoning to Solve Problems* de *Mark Levi*.

Sean a y b las longitudes de las cuerdas y $1 < a + b$, la distancia entre las dos barras verticales. Para cada posición (x, y) del peso tenemos únicos valores (u_1, v_1) y (u_2, v_2) (con $u_1, u_2 \geq y$), que satisfacen el resultado, que son

$$(u_1 - y)^2 + x^2 = a^2, \qquad (u_2 - y)^2 + (1 - x)^2 = b^2,$$

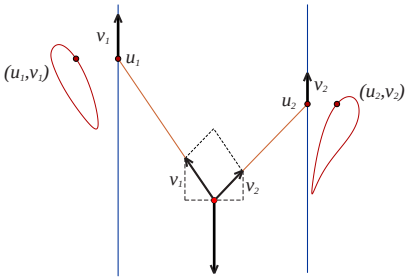


Figura 6.12. Transformación simplética.

y como las fuerzas que ejercen las cuerdas sobre la masa tienen direcciones respectivamente, $(1 - x, u_2 - y)$ y $(-x, u_1 - y)$, tenemos que si la masa es 1, existen λ, μ tales que

$$\begin{aligned}(0, 1) = \lambda(1 - x, u_2 - y) + \mu(-x, u_1 - y) \quad &\Leftrightarrow \\ 0 = \lambda(1 - x) - \mu x, \quad 1 = \lambda(u_2 - y) + \mu(u_1 - y),&\end{aligned}$$

que nos da los valores para $f = u_1 - y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $g = u_2 - y = \sqrt{b^2 - (1 - x)^2}$

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{x}{xg + (1 - x)f} \qquad & v_1 &= \frac{xg}{xg + (1 - x)f} \\ \mu &= \frac{1 - x}{xg + (1 - x)f} \qquad & v_2 &= 1 - v_1 = \frac{(1 - x)f}{xg + (1 - x)f},\end{aligned}$$

y se tiene que $du_1 \wedge dv_1 = dv_2 \wedge du_2$, pues f y g sólo dependen de x y por tanto v_1 y v_2, por tanto $df \wedge dv_i = 0 = dg \wedge dv_i$ y tenemos que

$$du_1 \wedge dv_1 = (df + dy) \wedge dv_1 = dy \wedge dv_1 = -dy \wedge dv_2 = -du_2 \wedge dv_2.$$

Debemos observar que la aplicación $(x, y) \to (u_1, v_1)$ no es biyectiva (lo es si $v_1 > 0$ que es la que hemos cogido y en general hay otra solución con $v_1 < 0$); además $u_1 = y \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ que no es diferenciable en $x = a$ —que corresponde a la posición perpendicular de a a la barra y para la

que $v_1 = 0$, $v_2 = 1$—, y $u_2 = y \pm \sqrt{b^2 - (1-x)^2}$, no es diferenciable en $1 - x = b$ —que corresponde a la posición perpendicular de b a la barra y para la que $v_2 = 0$, $v_1 = 1$—, sin embargo hay una biyección de $(u_1, v_1) \to (u_2, v_2)$, que es diferenciable en v_1 distinto de 1 y de 0 y ahí es simplética. En el dibujo de la derecha de la figura (6.12) se aprecia la falta de diferenciabilidad cuando el v_1 es 1, que se corresponde con un $v_2 = 0$. Por último en la figura se observa lo que dice el resultado, que figuras correspondientes tienen mismo área. ∎

Nota 6.49 La estructura simplética Λ define el isomorfismo de haces de módulos en $\mathcal{V}$

$$\mathcal{D} \longrightarrow \Omega\ , \quad D \longrightarrow i_D\Lambda, \tag{6.6}$$

que en coordenadas es

$$i_D\Lambda = i_D(\sum_{i=1}^{n} dz_i \wedge dx_i) = \sum_{i=1}^{n} Dz_i dx_i - \sum_{i=1}^{n} Dx_i dz_i, \tag{6.7}$$

y por tanto se tiene la correspondencia

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \longrightarrow -dz_i, \qquad \frac{\partial}{\partial z_i} \longrightarrow dx_i.$$

De igual modo, para cada $x \in \mathcal{V}$, Λ_x define un isomorfismo lineal entre los espacios vectoriales

$$T_x(\mathcal{V}) \longrightarrow T_x^*(\mathcal{V})\ , \quad D_x \longrightarrow i_{D_x}\Lambda_x.$$

Definición. Diremos que $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ es un *campo localmente Hamiltoniano* si $i_D\Lambda$ es cerrada y diremos que es *Hamiltoniano* si $i_D\Lambda$ es exacta, es decir si existe $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, tal que

$$i_D\Lambda = -dh,$$

a esta función h la llamaremos *Hamiltoniano* asociado al campo D (que en general denotaremos con D_h).

Si D es hamiltoniano, es decir $i_D\Lambda = -dh$, entonces se sigue de (6.7) que en coordenadas

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial z_i},$$

y sus curvas integrales satisfacen las llamadas *ecuaciones de Hamilton*

$$x_i' = \frac{\partial h}{\partial z_i}(x,z)\ , \quad z_i' = -\frac{\partial h}{\partial x_i}(x,z).$$

Nota 6.50 La razón de considerar $-dh$ en vez de dh no es importante simplemente es que se arrastran menos signos aunque parezca lo contrario (compárese además con el campo característico asociado a una EDP de primer orden que no depende de la z, $F(x_i, z_{x_i}) = 0$, —ver la pág.463—).

Proposición 6.51 *a) Para todo campo D, $D^L\Lambda = di_D\Lambda$.*

b) D es localmente hamiltoniano $\Leftrightarrow$ $D^L\Lambda = 0$ $\Leftrightarrow$ el grupo uniparamétrico τ_t de D es de transformaciones simpléticas.

c) El hamiltoniano h de un campo hamiltoniano D_h es constante a lo largo de las curvas integrales de D_h.

d) Para todo campo D y todo campo hamiltoniano D_f, $\Lambda(D, D_f) = Df$.

Demostración. a) Por ser $d\Lambda = 0$, tenemos para todo campo D

$$D^L\Lambda = di_D\Lambda + i_D d\Lambda = di_D\Lambda.$$

b) Lo primero es obvio. Lo último se sigue de (3.10), pág.151.
c) Si $i_D\Lambda = -dh$, entonces $Dh = \Lambda(D, D) = 0$.
d) $\Lambda(D, D_f) = -i_{D_f}\Lambda(D) = df(D) = Df$. ∎

Teorema de Liouville 6.52 *El flujo de un campo localmente hamiltoniano D conserva el volumen.*

Demostración. Por el resultado anterior, $\tau_t^*\Lambda = \Lambda$, por tanto $\tau_t^*\Omega_n = \Omega_n$, para τ_t el grupo uniparamétrico de D, y

$$\mathrm{vol}(\tau_t(B)) = \int_{\tau_t(B)} \Omega_n = \int_B \tau_t^*\Omega_n = \int_B \Omega_n = \mathrm{vol}(B). \quad ∎$$

Nota 6.53 Hemos dicho que la aplicación (6.6), $D \longrightarrow i_D\Lambda$, es isomorfismo de módulos. Por una parte, esto nos dice que toda función es hamiltoniana para algún campo y por tanto que hay muchos campos que dejan invariante la 2–forma Λ. Y por otra parte, este isomorfismo nos permite definir de forma natural, un producto de 1–formas.

Definición. Definimos el *corchete de Poisson* de $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(\mathcal{V})$, correspondientes por (6.6) a los campos $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, como la 1–forma correspondiente por (6.6) a $[D_1, D_2]$, es decir

$$[\omega_1, \omega_2] = i_{[D_1, D_2]}\Lambda.$$

Dadas $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ definimos su *paréntesis de Poisson* como la función

$$(f, g) = \Lambda(D_f, D_g) = D_f g = -D_g f,$$

donde D_f y D_g son los campos hamiltonianos de f y g respectivamente.

Proposición 6.54 *Se tienen las siguientes propiedades para* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$*:*

i) $(f, g) = -(g, f)$, $(f, a) = 0$, $(f, ag + bh) = a(f, g) + b(f, h)$ *y* $(f, gh) = g \cdot (f, h) + h \cdot (f, g)$.

ii) $[df, dg] = -d(f, g)$.

iii) $[D_f, D_g] = D_{(f,g)}$.

iv) $(f, (g, h)) + (g, (h, f)) + (h, (f, g)) = 0$.

Demostración. (i) se sigue de que $(f, g) = D_f g = \Lambda(D_f, D_g)$.

(ii) Sean $D_f, D_g \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ tales que $i_{D_f}\Lambda = -df$ e $i_{D_g}\Lambda = -dg$, entonces para cada $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ se tiene por (b) y (d) de (6.54)

$$\begin{aligned} d(f, g)D = D(f, g) &= D(D_f g) = [D, D_f](g) + D_f(Dg) \\ &= \Lambda([D, D_f], D_g) + D_f(\Lambda(D, D_g)) \\ &\qquad \text{(por ser } D_f^L \Lambda = 0) \\ &= \Lambda(D, [D_f, D_g]) = -i_{[D_f, D_g]}\Lambda(D) = -[df, dg](D). \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} (f, (g, h)) &= D_f(g, h) = D_f(D_g(h)), \\ (g, (h, f)) &= -D_g(D_f(h)), \\ (h, (f, g)) &= -D_{(f,g)}(h) = -[D_f, D_g](h). \end{aligned}$$

∎

Ejercicio 6.9.1 Demostrar que:

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial z_i}.$$

Ejercicio 6.9.2 Demostrar que si D es localmente hamiltoniano, entonces

$$D(f,g) = (Df, g) + (f, Dg).$$

6.9.2. El Fibrado Cotangente.

Sea $\mathcal{U}$ una variedad diferenciable n–dimensional y consideremos su *fibrado cotangente*, es decir el conjunto

$$\mathcal{T}^*\mathcal{U} = \{\omega_p \in T_p^*(\mathcal{U}) : p \in \mathcal{U}\},$$

de todas las uno–formas de todos los espacios cotangentes $T_p^*(\mathcal{U})$, con la aplicación

$$\pi : \mathcal{T}^*\mathcal{U} \to \mathcal{U}, \quad \pi(\omega_p) = p.$$

Ahora para cada abierto coordenado $(U; x_i)$ de $\mathcal{U}$ consideremos el abierto $\pi^{-1}(U)$ con las funciones (coordenadas), que en $\omega_p \in \pi^{-1}(U)$ valen

$$x_i(\omega_p) = x_i(p), \quad z_i(\omega_p) = \omega_p(\partial x_i),$$

las cuales establecen una biyección con un abierto $U_n \times \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^{2n}$. Se demuestra que estas cartas definen una estructura diferenciable y que para ella π es una *proyección regular*.

Teorema 6.55 *$\mathcal{V} = \mathcal{T}^*\mathcal{U}$ tiene una uno–forma canónica, llamada forma de Liouville, que para la proyección π está definida en cada punto $\omega_p \in \mathcal{T}^*\mathcal{U}$ de la forma*

$$\lambda_{\omega_p} = \pi^*\omega_p.$$

Además $\Lambda = d\lambda$ es cerrada y sin radical, por tanto $(\mathcal{V}, \Lambda)$ es una variedad simplética.

Demostración. Basta demostrar que el campo de 1–formas λ_{ω_p} es diferenciable. Para ello consideremos un entorno coordenado $(U; x_i)$ y las correspondientes coordenadas (x_i, z_i) en $\mathcal{T}^*(U) = \pi^{-1}(U)$, entonces

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} z_i dx_i. \quad \blacksquare$$

Nota 6.56 Observemos que la 1–forma intrínseca $\lambda = \sum_{i=1}^{n} z_i dx_i$ es regular de clase $2n$ (ver el **Teorema de Darboux**, pág.387), y que en las coordenadas naturales (x_i, z_i) tiene la forma canónica, y además esas coordenadas son simpléticas.

Ejercicio 6.9.3 Demostrar que el campo H que le corresponde a la forma de Liouville $\lambda \in \Omega[\mathcal{T}^*\mathcal{U}]$, por el isomorfismo $D \in \mathcal{D} \to i_D\Lambda \in \Omega$, es el de las homotecias en fibras (ver la pág.553).

6.9.3. Fibrado de Jets de funciones de orden 1

Definición. Sea $\mathcal{U}$ una variedad diferenciable n–dimensional. Consideremos en cada punto $p \in \mathcal{U}$ el conjunto de las funciones diferenciables definidas en algún entorno abierto de p y en él la relación de equivalencia

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f(p) = g(p), \quad d_p f = d_p g.$$

Llamamos *jet de orden 1, de funciones en* $p \in \mathcal{U}$ al conjunto cociente por esa relación de equivalencia, el cual denotamos $\mathcal{J}^1_p$, y tiene estructura natural de espacio vectorial (realmente de álgebra) pues si denotamos la clase de equivalencia de f con $J^1_p(f)$, podemos definir $J^1_p(f) + J^1_p(g) = J^1_p(f+g)$, $aJ^1_p(f) = J^1_p(af)$ y se tiene el isomorfismo canónico[3]

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}^1_p & \longrightarrow & \mathbb{R} \times T^*_p(\mathcal{U}) \\ J^1_p(f) & \to & (f(p), d_p f) \end{array}$$

Definición. Llamamos *fibrado de jets de orden* 1 al conjunto

$$\mathcal{J}^1(\mathcal{U}) = \cup_{p\in\mathcal{U}} \mathcal{J}^1_p,$$

con la proyección canónica

$$\pi \colon \mathcal{J}^1(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}, \quad \pi(J^1_p(f)) = p.$$

Este conjunto tiene una biyección canónica

$$\mathcal{J}^1(\mathcal{U}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \times T^*(\mathcal{U}), \quad \varphi(J^1_p(f)) = (f(p), d_p f)$$

que nos define una única estructura diferenciable para la que φ es difeomorfismo y π proyección regular. Además tiene una función canónica

$$z \colon \mathcal{J}^1(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}, \quad z(J^1_p(f)) = f(p).$$

[3] También se tiene el isomorfismo, para $\mathcal{C}^\infty_p$ el álgebra de gérmenes de funciones en p y $\mathfrak{m}_p$ el ideal de gérmenes de funciones que se anulan en p,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}^1_p & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty_p/\mathfrak{m}^2_p \\ J^1_p(f) & \longrightarrow & [f] \end{array}$$

Ahora para cada abierto coordenado $(U; x_i)$ de $\mathcal{U}$ consideremos el abierto coordenado $\pi^{-1}(U)$ con las funciones $\varphi^* x_i$ y $\varphi^* z_i$, es decir

$$x_i(J^1_p(f)) = x_i(p), \quad z_i(J^1_p(f)) = f_{x_i}(p),$$

las cuales junto con z establecen un sistema de coordenadas

$$(x_i, z, z_i)\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n+1}.$$

Nota 6.57 Por último $\mathcal{J}^1(\mathcal{U})$ tiene una 1–forma intrínseca

$$\omega = dz - \varphi^* \pi_2^* \lambda,$$

para λ la forma de Liouville, que es regular de clase $2n+1$ (ver el **Teorema de Darboux**, pág.387), y que en las coordenadas naturales (x_i, z, z_i) tiene la forma canónica

$$\omega = dz - \sum z_i dx_i.$$

6.9.4. Fibrado tangente de una var.Riemanniana.

Sea $\mathcal{U}$ una variedad diferenciable n–dimensional y consideremos su *fibrado tangente* (ver la pág.369), es decir el conjunto

$$\mathcal{TU} = \{D_p \in T_p(\mathcal{U}) : \ p \in \mathcal{U}\},$$

de todas los vectores de todos los espacios tangentes $T_p(\mathcal{U})$ y la aplicación (proyección regular)

$$\pi\colon \mathcal{TV} \to \mathcal{V}, \quad \pi(D_p) = p.$$

Recordemos que para cada abierto coordenado $(U; x_i)$ de $\mathcal{U}$, consideramos el abierto $\pi^{-1}(U)$ con las funciones (coordenadas)

$$x_i(D_p) = x_i(p), \quad z_i(D_p) = D_p x_i,$$

para cada $D_p \in \pi^{-1}(U)$. Las cuales establecen una biyección con un abierto $U_n \times \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^{2n}$. Se demuestra que estas cartas definen una estructura diferenciable y que para ella π es una proyección regular.

Ahora bien si $(\mathcal{U}, g)$ es una **variedad Riemanniana** (ver la pág.178), entonces el fibrado tangente $\mathcal{TU}$ y el cotangente $\mathcal{T}^*\mathcal{U}$, se identifican canónicamente por el difeomorfismo

$$\varphi\colon \mathcal{TU} \to \mathcal{T}^*\mathcal{U}, \qquad D_p \to \omega_p = \varphi(D_p) = i_{D_p} g, \qquad \omega_p(E_p) = D_p \cdot E_p,$$

mediante el cual el fibrado tangente adquiere por una parte la 1–forma de Liouville correspondiente $\bar{\lambda} = \varphi^*\lambda$ y una estructura natural de variedad simplética, $\bar{\Lambda} = \varphi^*\Lambda$. Veamos su expresión en coordenadas: Tomemos un sistema de coordenadas (x_i) en $\mathcal{U}$, en las que la métrica vale $g_{ij} = g(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})$ y consideremos las coordenadas simplécticas (x'_i, z'_i) correspondientes del fibrado cotangente (las denotamos así para no confundirlas con las del tangente). Entonces en el fibrado tangente tenemos las coordenadas (simplécticas) $x_i = \varphi^* x'_i$ y $p_i = \varphi^* z'_i = \sum g_{ij} z_j$, pues

$$\begin{aligned} \varphi^* x'_i(D_p) &= x'_i(\omega_p) = x_i(p) = x_i(D_p), \\ p_i(D_p) &= z'_i(\omega_p) = \omega_p(\partial_{x_i}) = D_p \cdot \partial_{x_i} \end{aligned}$$

en las que $\bar{\Lambda} = \sum dp_i \wedge dx_i$ y $\bar{\lambda} = \sum p_i dx_i$.

Observemos que si la métrica es la Euclídea $g_{ij} = \delta_{ij}$, entonces $p_i = z_i$, (por lo que podemos quitar la barra en las formas diferenciales).

En los siguientes ejemplos físicos consideramos esta estructura simpléticа $\Lambda = \sum dz_i \wedge dx_i$, del fibrado tangente de los espacios Euclídeos, para los cuales campos Hamiltonianos y localmente Hamiltonianos son los mismos por el Lema de Poincaré (3.22), pág.165, ya que como variedad diferenciable $\mathcal{T}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^6$.

6.9.5. Mecánica Hamiltoniana.

Consideremos en el espacio Euclídeo tridimensional (ver pág.295) una partícula de masa m cuya trayectoria $\sigma(t) = (x_i(t))$ satisface la ley de Newton $m\sigma''(t) = F[\sigma(t)]$, para una fuerza $F = (f_i) = \sum f_i \partial_{x_i} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Esta ecuación de segundo orden en el espacio (ver la pág.39), define un campo tangente $D \in \mathcal{D}(T(\mathbb{R}^3))$ en el fibrado tangente del espacio, pues introduciendo las componentes de la velocidad $z_i = x'_i$, tenemos que $(x_i(t), z_i(t))$ es una curva integral del campo

$$D = \sum z_i \partial_{x_i} + \sum \frac{f_i}{m} \partial_{z_i}.$$

Veamos que las únicas fuerzas F que definen campos D que dejan invariante la estructura simplética del fibrado tangente son los conservativos (ver la pág.295), $F = -\operatorname{grad} u$.

Proposición 6.58 *Condición necesaria y suficiente para que la fuerza F sea conservativa, es decir que derive de un potencial $u(x)$, $F = -\operatorname{grad} u$, es que el campo D sea Hamiltoniano*[4]*, $D^L\Lambda = 0$.*

Demostración. En primer lugar si denotamos con $e_c = \sum z_i^2/2$ (la energía cinética), la cual es una función canónica en el fibrado tangente (pues es $e_c(D_p) = D_p \cdot D_p/2$), entonces

$$\begin{aligned} i_D\Lambda &= \sum Dz_i dx_i - \sum Dx_i dz_i = \sum \frac{f_i}{m} dx_i - \sum z_i dz_i \\ &= \frac{1}{m}\sum f_i dx_i - de_c, \end{aligned}$$

es cerrada (ó exacta —por el Lema de Poincaré (3.22), pág.165—) sii lo es $\sum f_i dx_i$, es decir D es Hamiltoniano de una función h (salvo adición de una constante) sii $\sum f_i dx_i = -du$ sii $F = -\operatorname{grad} u$ para u tal que $h = e_c + u/m$. ∎

Casos particulares de estas fuerzas son (ver la pág.295): la de la **mecánica celeste** con $u(\rho) = -GMm/\rho$ (que estudiaremos a continuación en el **problema de dos cuerpos ó problema de Kepler**) ó la de la **mecánica terrestre** con $u(z) = mgz$, para z la altura sobre el plano xy de la superficie de la tierra (que se considera plana) y $g = GM/R^2$ la aceleración constante terrestre, (ver la pág.295).

En cualquier caso acabamos de ver que estos campos

$$D = z_1\partial_{x_1} + z_2\partial_{x_2} + z_3\partial_{x_3} - \frac{u_{x_1}}{m}\partial_{z_1} - \frac{u_{x_2}}{m}\partial_{z_2} - \frac{u_{x_3}}{m}\partial_{z_3},$$

son Hamiltonianos de la función energía (por unidad de masa) $h = e_c + u/m$, pues

$$i_D\Lambda = -\frac{1}{m}\sum u_{x_i} dx_i - de_c = -d(e_c + u/m) = -dh.$$

Ahora, como $Dh = 0$ tendremos que a lo largo de cada curva integral $\gamma(t)$ de D, h es constante y por tanto γ está en una hipersuperficie $\mathcal{E} = \{h = E\}$ en la que consideramos las restricciones de la forma de Liouville $\lambda_{\mathcal{E}}$ y la de su diferencial $\Lambda_{\mathcal{E}}$ que ya no es simplética pues tiene radical, que es nuestro campo D, pues es tangente a $\mathcal{E}$ y $i_D\Lambda_{\mathcal{E}} = -dh_{|\mathcal{E}} = 0$. Por

[4] Que en este caso equivale a localmente Hamiltoniano según hemos observado anteriormente.

otra parte en esta hipersuperficie la energía cinética es una función $f(x)$, pues $e_c = E - u(x)/m = f(x)$.

Consideremos ahora en nuestro espacio $\mathbb{R}^3$ la nueva métrica $\tilde{g} = f(x)g$, proporcional a la Eucídea original es decir con componentes $\tilde{g}_{ij}(x) = f(x)\delta_{ij}$, las nuevas coordenadas simplécticas $x_i, p_i = \sum \tilde{g}_{ij} z_j = f(x) z_i$, la nueva forma de Liouville $\gamma = \sum p_i dx_i = f(x)\lambda$, la nueva forma simplética $\Gamma = d\gamma$ y la correspondiente energía cinética en el fibrado tangente $\tilde{h}(D_x) = \tilde{g}(D_x, D_x)/2 = f(x)|D_x|^2/2$, cuyo campo Hamiltoniano $i_Z\Gamma = -d\tilde{h}$ es el geodésico Z (ver (7.64), pág.559). En estos términos se tiene que:

Proposición 6.59 *Para la hipersuperficie $\widetilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{h} = 1\}$ del fibrado tangente,*

$$\varphi\colon (\widetilde{\mathcal{E}}, \gamma_{\widetilde{\mathcal{E}}}, \Gamma_{\widetilde{\mathcal{E}}}) \to (\mathcal{E}, \lambda_{\mathcal{E}}, \Lambda_{\mathcal{E}}), \quad D_x \to f(x) D_x,$$

es un difeomorfismo, que conserva ambas formas diferenciales y $\varphi_* Z$ es proporcional a D.

Demostración. $1 = \tilde{h}(D_x) = f(x)|D_x|^2/2$ sii $f(x) = |f(x)D_x|^2/2 = |\varphi(D_x)|^2/2 = e_c(\varphi(D_x))$.

Extendamos la aplicación a todo el fibrado tangente entonces en coordenadas la aplicación es $\varphi(x,z) = (x, f(x)z)$, por tanto $\varphi^* x_i = x_i$ y $\varphi^* z_i = f(x) z_i$, de donde

$$\varphi^*\lambda = \varphi^* \sum z_i dx_i = f(x)\lambda = \gamma,$$
$$\varphi^*\Lambda = \varphi^* d\lambda = d\varphi^*\lambda = d\gamma = \Gamma,$$

Por último Z es tangente a la hipersuperficie (de dimensión impar $2n-1$), $\widetilde{\mathcal{E}}$ y es el único que está en el radical de $\Gamma_{\widetilde{\mathcal{E}}}$ (salvo múltiplos, por el ejercicio (6.8.1), pág.385). Del mismo modo D es tangente a $\mathcal{E}$ y también es el único que está en el radical de $\Lambda_{\mathcal{E}}$, pero para $E = \varphi_* Z$, y cualquier campo $B = \varphi_* A$

$$i_E \Lambda_{\mathcal{E}}(B) = \Lambda_{\mathcal{E}}(\varphi_* Z, \varphi_* A) = i_Z \Gamma_{\widetilde{\mathcal{E}}} = 0,$$

por tanto E es múltiplo de D. ∎

Como consecuencia se tiene el siguiente resultado de Jacobi.

Corolario 6.60 *En el espacio Euclídeo tridimensional toda trayectoria de una partícula de masa m que se mueve siguiendo la ley de Newton $m\sigma''(t) = F[\sigma(t)]$, para una fuerza $F = -\operatorname{grad} u$, que derive de un*

potencial u, tiene energía constante $E = h(\sigma, \sigma')$ y es una geodésica reparametrizada para la nueva métrica

$$\tilde{g}(D_x, E_x) = \left(E - \frac{u(x)}{m}\right) D_x \cdot E_x.$$

Volveremos sobre este resultado, en términos Lagrangianos, en las pág.537 y 562.

Proposición 6.61 *Si F es central, es decir para cada $p \in \mathbb{R}^3$, F_p es proporcional a p, entonces las funciones*

$$x_2z_3 - z_2x_3, \qquad z_1x_3 - x_1z_3, \qquad x_1z_2 - z_1x_2,$$

son integrales primeras de D. La trayectoria $\sigma(t)$ está en un plano que pasa por el origen y satisface la **Segunda Ley de Kepler** *: El segmento OP que une el origen con la masa, barre áreas iguales en tiempos iguales.*

Demostración. Consideremos una curva solución σ, entonces σ'' es proporcional a F que es proporcional a σ por ser central, por tanto $\sigma \times \sigma'' = 0$ y es constante el vector $W = \sigma \times \sigma'$ (proporcional al momento angular (ver la pág.182) $\Omega = m\sigma \times \sigma'$), pues $W' = (\sigma \times \sigma')' = \sigma' \times \sigma' + \sigma \times \sigma'' = 0$, por lo tanto la trayectoria se mueve en un plano constante que es perpendicular a W y pasa por el origen, pues contiene al vector σ. Esto nos da las 3 integrales primeras del enunciado (que son las componentes de W) (el resultado también es obvio aplicando D, pues por ejemplo $D(x_2z_3 - z_2x_3) = z_3Dx_2 + x_2Dz_3 - x_3Dz_2 - z_2Dx_3 = 0$, ya que $Dx_i = z_i$ y $Dz_i = \lambda x_i$).

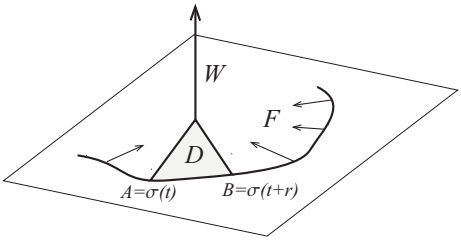


Figura 6.13. Segunda Ley de Kepler

Ahora haciendo un giro en el espacio podemos suponer que W es perpendicular al plano xy y por tanto que $x_3(t) = z(t) = 0$ y llamando $x = x_1$ e $y = x_2$, tendremos que $xy' - x'y = w = |W|$ es constante. Si

consideramos dos instantes t y $t+r$, y los puntos correspondientes $A = \sigma(t)$, $B = \sigma(t+r)$, D la región interior a la curva S del triángulo curvo formado por los segmentos $0A$, $0B$ y la curva entre A y B, tendremos, parametrizando como sea la curva en las partes rectas, en las que $y/x = y'/x'$ (por tanto $xy' - x'y = 0$), por el *Teorema de Stokes* (14.12)(ver la pág.988) que

$$w\,r = \int_t^{t+r} (xy' - x'y)\,dt = \int_S x\,dy - y\,dx = 2\int_D dx \wedge dy = 2m[D]), \tag{6.8}$$

por tanto el área $m[D]$, que barre el segmento OP, sólo depende de r. ∎

Nota 6.62 Hemos visto que para una fuerza conservativa $F = -\operatorname{grad} u$, $h = e_c + u/m$ es una de las 5 leyes de conservación que tiene D. Ahora bien en el caso de que el potencial sólo dependa de la distancia al origen, $u = u(\rho)$, para $\rho = \sqrt{\sum x_i^2}$, tendremos que además la fuerza F es central, ya que $u_{x_i} = u'(\rho)x_i/\rho = k(\rho)x_i$ y podemos continuar en los términos del resultado anterior (6.61) y considerar coordenadas polares en el plano de σ, $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$.

A lo largo de nuestra trayectoria,

$$x' = \rho'\cos\theta - \rho\theta'\operatorname{sen}\theta, \qquad y' = \rho'\operatorname{sen}\theta + \rho\theta'\cos\theta,$$

y si en ella $|\Omega|/m = w$ y $h = E$, tendremos las dos ecuaciones

$$w = xy' - x'y = \rho^2\theta', \qquad E = \frac{x'^2 + y'^2}{2} + \frac{u(\rho)}{m} = \frac{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}{2} + \frac{u(\rho)}{m}$$

lo cual da, $2E = \rho'^2 + w^2/\rho^2 + 2u(\rho)/m$ y

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho'}{\theta'} = \pm\frac{\rho^2}{w}\sqrt{2E - \frac{2u(\rho)}{m} - \frac{w^2}{\rho^2}}, \tag{6.9}$$

que a su vez nos da la trayectoria —y la correspondiente constante de integración la tercera (quinta) integral primera de la ecuación—.

El problema de los dos cuerpos.

Consideremos dos cuerpos de masas m_i que se mueven en el espacio tridimensional, con la métrica Euclídea $g_{ij} = \delta_{ij}$, atrayéndose mutuamente siguiendo la ley del inverso del cuadrado de la distancia de NEWTON. En (3.27), pág.182, hemos demostrado que su centro de gravedad

$$\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2},$$

sigue una linea recta con velocidad constante, por lo tanto podemos considerar un sistema de referencia en el que el centro de masa esté en el origen, por tanto $m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$ y r_1 y r_2 son proporcionales, así como sus derivadas, y el momento angular de los dos cuerpos respecto de su centro de masa vale

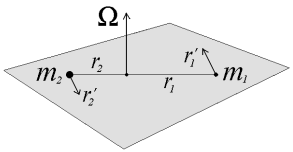


Figura 6.14. Plano del movimiento

$$\Omega = m_1 r_1 \times r_1' + m_2 r_2 \times r_2' = \frac{m_1}{m_2}(m_1 + m_2) r_1 \times r_1',$$

y como la fuerza $F_{21} = m_1 r_1''$ que actúa sobre m_1 es central y es proporcional a $r_2 - r_1$, por tanto a r_1, tendremos que

$$\Omega' = \frac{m_1}{m_2}(m_1 + m_2) r_1 \times r_1'' = 0,$$

por tanto Ω es constante —que es el *Principio de la conservación del momento angular*—. y las órbitas de ambas masas están en el plano perpendicular a Ω.

Ahora bien si uno de los cuerpos tiene masa $m_2 = M$ muy grande, entonces el centro de masa de ambos cuerpos estará próximo a M. Esto justifica el que en una primera aproximación podamos considerar que M está en el origen[5], en cuyo caso $r_2 = 0$ y para $m = m_1$ y $r(t) = r_1(t) = (x_i(t))$

$$\Omega = m\, r \times r',$$

es decir el momento angular es el del cuerpo $m = m_1$ que se mueve describiendo una curva $r(t) = (x_i(t)) \in \mathbb{R}^3$, siendo las funciones que definen las componentes de $W = \Omega/m = r \times r'$

$$w_1 = x_2 z_3 - x_3 z_2, \quad w_2 = x_3 z_1 - x_1 z_3, \quad w_3 = x_1 z_2 - x_2 z_1,$$

[5]Este problema lo hemos estudiado en la pág.265. Para un análisis más profundo, sin la simplificación de que m_2 sea el centro de masas, remitimos al lector al GARABEDIAN, pág.*51*.

integrales primeras del campo Hamiltoniano (ver (6.58))

$$D = \sum z_i \partial_{x_i} - k \sum \frac{x_i}{\rho^3} \partial_{z_i} = \sum h_{z_i} \partial_{x_i} - \sum h_{x_i} \partial_{z_i}$$

asociado a la ecuación de Newton (para $\rho = |r| = \sqrt{\sum x_i^2}$, $u = -GMm/\rho$ y $k = GM$)

$$m\, r'' = F = -\operatorname{grad} u = -G \frac{mM}{\rho^2} \frac{r}{\rho},$$

que es el Hamiltoniano de la función energía (por unidad de masa)

$$h = \frac{\sum z_i^2}{2} - \frac{k}{\rho},$$

y por tanto $(r, r') = (x_i, z_i = x_i')$ es solución del sistema de ecuaciones diferenciales de Hamilton,

$$x_i' = z_i = h_{z_i}, \quad z_i' = -\frac{k x_i}{\rho^3} = -h_{x_i},$$

y como tenemos que $Dh = 0$, h es constante en las curvas integrales de D, que es el *Principio de conservación de la energía*. Como además la fuerza F es central, se sigue de (6.61), la **Segunda Ley de Kepler**: *El radio vector posición de m barre areas iguales en tiempos iguales.*

Veamos ahora que existe otro vector R, constante a lo largo de la trayectoria de r, llamado *vector de LaPlace–Runge–Lenz*:

Sabemos que $W = r \times r'$ es constante (denotaremos $|W| = w$) y como $r'' = -kr/\rho^3$, entonces r'' es proporcional a r, de donde $r \times r'' = 0$, y como en general $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$ (ver la pág.173), tendremos que

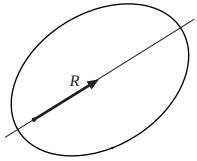


Figura 6.15. Vector de Laplace

$$\begin{aligned}(W \times r')' = W \times r'' &= -\frac{k}{\rho^3} W \times r = \frac{k}{\rho^3} r \times (r \times r') \\ &= k \frac{(r \cdot r')r - (r \cdot r)r'}{\rho^3} = k \frac{\rho' r - \rho r'}{\rho^2} \\ &= -k \left(\frac{r}{\rho}\right)' \quad \Rightarrow \quad \left(W \times r' + k \frac{r}{\rho}\right)' = 0,\end{aligned}$$

pues

$$r \cdot r' = \frac{1}{2}(r \cdot r)' = \frac{1}{2}(\rho^2)' = \rho \rho',$$

de donde se sigue que a lo largo de las órbitas es constante el *vector de LaPlace–Runge–Lenz*,

$$R = W \times r' + k\frac{r}{\rho} \quad (= (r \times r') \times r' - \rho^2 r''),$$

que es perpendicular a W pues lo son r y $W \times r'$; y sus componentes

$$r_1 = w_2 z_3 - w_3 z_2 + \frac{k x_1}{\rho}, \quad r_2 = w_3 z_1 - w_1 z_3 + \frac{k x_2}{\rho}, \quad r_3 = w_1 z_2 - w_2 z_1 + \frac{k x_3}{\rho},$$

son otras 3 integrales primeras de D. Además

$$\begin{aligned} |R|^2 &= (W \times r' + \frac{k}{\rho} r) \cdot (W \times r' + \frac{k}{\rho} r) \\ &= |W \times r'|^2 + \frac{2k}{\rho}(W \times r') \cdot r + k^2 \qquad \text{(por ser } W \perp r') \\ &= |W|^2 |r'|^2 + \frac{2k}{\rho}(r' \times r) \cdot W + k^2 \\ &= w^2 |r'|^2 - \frac{2k}{\rho} w^2 + k^2 = w^2 2h + k^2 = k^2 \left(1 + 2h\frac{w^2}{k^2}\right), \end{aligned}$$

por tanto su módulo es $|R| = ke$, para la también integral primera de D

$$e = \sqrt{1 + 2h\frac{w^2}{k^2}}.$$

Estas 6 funciones que definen los vectores ortogonales W y R definen suficientes integrales primeras de D (necesitamos 5) para integrar este campo.

Consideremos un nuevo sistema de referencia girando el anterior de modo que las direcciones positivas de los ejes x y z las definan respectivamente R y W. En este nuevo sistema de coordenadas (en el que la ρ no ha cambiado, $R = (ke, 0, 0)$ y $W = (0, 0, w)$ y nuestra curva $r(t)$ está en el plano x, y y tiene componentes $r(t) = (x(t), y(t))$, por tanto $x(t) = e_1 \cdot r = (R \cdot r)/|R|$ y

$$x' = \frac{1}{ke} R \cdot r' = \frac{1}{ke}\left(W \times r' + k\frac{r}{\rho}\right) \cdot r' = \frac{1}{e\rho} r \cdot r' = \frac{\rho'}{e}$$

pues por (6.13), $\rho\rho' = r \cdot r'$ y se tiene que nuestra curva satisface, $(\rho - ex)' = 0$ y para nuestra curva existe una constante p tal que

$$\rho = e\, x + p,$$

que es la ecuación de una *cónica*[6] con foco el origen y eje x, pues $\rho = e(x + p/e)$ y desde sus puntos es constante el cociente de distancias $e = \rho/(x + p/e)$, a un punto (el origen) y a la recta vertical de ecuación $x = -p/e$, siendo e la *excentricidad* y p el *latus rectum*.

Observemos que la curva $\rho = p - ex$ es $\rho = p + ex$ girada un ángulo π y además es su reflexión respecto del eje y; pues si (x, y) satisface $\rho = p + ex$, $(-x, -y)$ y $(-x, y)$ satisfacen $\rho = p - ex$.

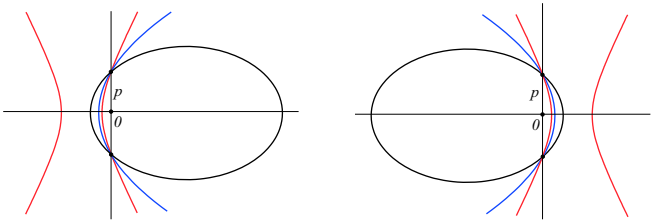


Figura 6.16. Haz de cónicas con foco el origen: Izqda. $\rho = ex + p$. Dcha. $\rho = -ex + p$

Tenemos así la **Primera Ley de Kepler** (ver la pág.265): *La trayectoria de la masa es una cónica y M está en un foco.*

Esta cónica es:

$$\text{elipse} \quad \Leftrightarrow \quad e < 1 \quad \Leftrightarrow \quad h < 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1^2 + z_2^2 < \frac{2k}{\rho}$$

$$\text{parábola} \quad \Leftrightarrow \quad e = 1 \quad \Leftrightarrow \quad h = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1^2 + z_2^2 = \frac{2k}{\rho}$$

$$\text{hipérbola} \quad \Leftrightarrow \quad e > 1 \quad \Leftrightarrow \quad h > 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1^2 + z_2^2 > \frac{2k}{\rho}$$

y la cantidad $\sqrt{2k/\rho}$ es la *velocidad de escape* a distancia ρ, es decir la velocidad a partir de la cual la masa que está a distancia ρ seguiría una órbita no elíptica y por tanto no regresaría más.

Observemos que además esta cónica corta al eje y ($x = 0$) a distancia del origen–foco, $\rho = p$, y por (6.13), en nuestras coordenadas, $w = w_3 = xy' - yx'$ es constante, y para $x = 0$, $\rho = p = y = -w/x'$, por otro

[6] Una *cónica* es el corte de un cono con un plano y también el lugar geométrico de puntos del plano para los que es constante la relación de distancias a un punto fijo, llamado *foco*, y a una recta fija, llamada *directriz*; y a esa relación constante, que denotamos e se llama *excentricidad*. Remitimos al lector a la página web http://matematicas.unex.es/~ricarfr/ElipseDemo.pdf para una demostración visual de las propiedades anteriores y a la pág. 568, donde también se llega de forma natural, estudiando la refracción, a la expresión ¡lineal! $\rho = ex + p$, en las coordenadas (x, ρ), de las cónicas con un foco en el origen y eje x.

lado por (6.13), también es constante $r_2 = w_3 z_1 - w_1 z_3 + (k x_2)/\rho$ y en nuestras coordenadas $r_2 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = w$, $\rho = p = y = x_2$, por tanto $0 = wx' + k$, y por tanto el latus rectum vale $p = w^2/k$.

Estas cónicas ($\rho = p + ex$) de ecuaciones cartesianas $x^2 + y^2 = (ex + p)^2$, son simétricas respecto del eje x y se cortan con él en los puntos $(x_i, 0)$, con $x_i^2 = (ex_i + p)^2$, es decir

$$x_i = \pm(ex_i + p) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{p}{1-e} \ \text{(si } e \neq 1), \qquad x_2 = -\frac{p}{1+e}.$$

Observemos que en el caso parabólico x_1 está en el infinito y en los otros dos casos (hiperbólico ó elíptico, $e \neq 1$), tendremos que para $x = x_1$, $\rho_1 = ex_1 + p = x_1$ y para $x = x_2 < 0$, $\rho_2 = ex_2 + p = -x_2$; por lo tanto la cónica tiene centro (veremos mas adelante que es centro de simetría), que está en el eje x y es negativo si es una hipérbola ($e > 1$) y positivo si es una elipse ($e < 1$),

$$c = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{pe}{1-e^2}, \tag{6.10}$$

y tiene semieje mayor (en el caso de elipse, $e < 1$)

$$a = \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{p}{1-e^2} = \frac{c}{e} \tag{6.11}$$

Observemos también que R apunta (si es elipse) hacia el punto más alejado del foco en el que hemos localizado el origen (es decir el *afelio*[7]).

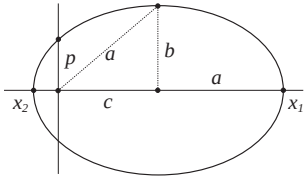


Figura 6.17.

Además si es una elipse (Fig.6.17), para el centro $x = c$ el valor correspondiente de ρ es $ce + p = a$, pues

$$\rho = ex + p = \frac{pe^2}{1-e^2} + p = \frac{p}{1-e^2} = a,$$

[7]Del griego, *apo*=lejos de, y *helios*=sol, que es el punto $(x_2, 0)$. Su simétrico respecto del centro de la elipse es el *perihelio*, de *peri*=alrededor y *helios*, y es el $(x_1, 0)$. La Tierra pasa por su perihelio sobre el 3 de enero y por su afelio sobre el 3 de julio.

que es el semieje mayor de la elipse[8]. Si ahora definimos b por $a^2 = b^2+c^2$ (que será el semieje menor), entonces por la igualdad (6.11), $c = ea$, y

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + e^2a^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = a^2(1-e^2) = ap,$$

y la ecuación de la curva en coordenadas cartesianas es

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = (ex+p)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (1-e^2)x^2 - 2exp - p^2 + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{p}{a}x^2 - 2exp - p^2 + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 2xea - ap + a^2}{a^2} + \frac{y^2}{ap} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{aligned}$$

Si ahora consideramos el tiempo T, en el que la masa da una vuelta alrededor de M, por la elipse correspondiente, tendremos por la segunda Ley de Kepler (6.8), considerando que el área que encierra la elipse es πab, que

$$2\pi ab = wT \quad \Leftrightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2a^2b^2}{w^2} = \frac{4\pi^2a^3p}{w^2} = \frac{4\pi^2}{k}a^3,$$

pues $b^2 = ap$; que es la **tercera Ley de Kepler**: *Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias.*

Observemos que $p/a = 1 - e^2 = -2hw^2/k^2 = -2hp/k$ (la segunda igualdad por **??**), por lo que la energía h determina el semieje mayor pues $a = -k/2h$; el momento (dividido por m), w, determina el latus rectum $p = w^2/k$ y los dos valores determinan la excentricidad e. Esas dos leyes de conservación, por tanto, determinan la forma de la trayectoria cónica, aunque no su dirección, que nos la da el vector de LaPlace–Runge–Lenz.

Por otra parte la velocidad v de la masa a una distancia dada ρ, determina la energía $E = v^2/2 - k/\rho$, la cual determina el semieje a, que a su vez determina el período T. De esto se sigue que si en un punto estalla una masa dirigiéndose los trozos en direcciones distintas pero con la misma velocidad v, al cabo de un mismo tiempo T, en el que han seguido distintas elipses, se reúnen en el punto original.

[8] Llamado *distancia media*, pues es la semisuma de la distancia máxima y la mínima

Completemos estos resultados con uno enunciado por **Hamilton** que afirma que la hodógrafa[9] de toda masa es una circunferencia, llamando *hodógrafa* a la curva definida por su vector velocidad.

Teorema 6.63 *La curva definida por r' es una circunferencia.*

Demostración. Basta demostrar que existe un vector constante B tal que $B + r'$ tiene módulo constante d. Ahora bien tenemos que para los vectores constantes $W = r \times r' = (0, 0, w)$ y $R = (ke, 0, 0)$

$$R = W \times r' + \frac{k}{\rho} r \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{w} = e_3 \times r' + \frac{k}{w\rho} r \quad \Rightarrow$$
$$\frac{R}{w} \times e_3 = r' + \frac{k}{w\rho} r \times e_3 \quad \Rightarrow \quad r' + \frac{ke}{w} e_2 = \frac{k}{w} e_3 \times \frac{r}{|r|},$$

siendo $B = (ke/w)e_2$ un vector constante (perpendicular a R y W, además $B \times W = R$) y $\frac{k}{w} e_3 \times \frac{r}{|r|}$ de módulo constante $d = k/w$. ∎

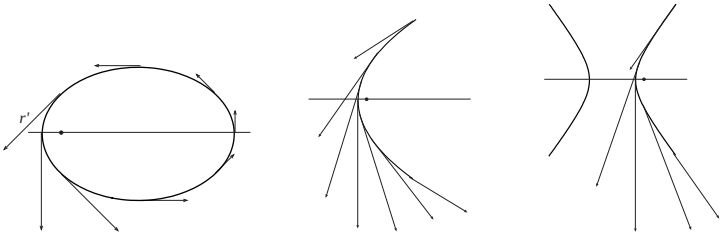


Figura 6.18. Velocidades en trayectorias elíptica, parabólica e hiperbólica.

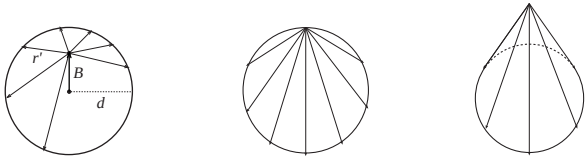


Figura 6.19. Hodógrafas correspondientes a elipse, parábola e hipérbola.

Nota 6.64 Por último observemos que en el caso de elipse, el vector de LaPlace–Runge–Lenz, que tiene módulo ke y dirección el semieje mayor

$$R = W \times r' + k\frac{r}{\rho},$$

[9] *Hodógrafa* del griego *odos* camino y *grafein* dibujar (una linea).

es suma de $W \times r'$, que es perpendicular a r', y el vector en la dirección de r de módulo k. Se sigue por semejanza de triángulos que si P es el punto de la elipse (definido por r) y Q el punto en el que la normal a la elipse en P corta al eje mayor de la elipse, entonces $0Q/0P = e$ es la excentricidad.

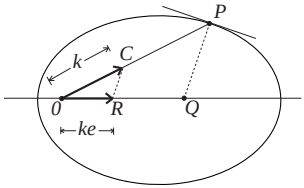


Figura 6.20. Propiedad de la elipse

Ejercicio 6.9.4 Demostrar que las cónicas $\rho = ex + 1$ y $\rho = ex + p$ son homotéticas de razón p.

Ejercicio 6.9.5 Demostrar que en una elipse la suma de distancias de cada punto a los focos es constante.

Ejercicio 6.9.6 Cortamos un cono de base circular con un plano y proyectamos la curva intersección a un plano perpendicular al eje del cono. Demostrar que la curva es una cónica con foco en el eje del cono.

Ejercicio 6.9.7 Dado un punto P de una elipse, consideremos el punto Q corte del semieje mayor y la normal a la elipse por P. Demostrar que para F un foco, FQ/FP es constante y es la excentricidad.

Ejercicio 6.9.8 Sea $n \in \mathbb{N}$, consideremos en cada punto P de $\mathbb{R}^2$ la recta cuya perpendicular por P corta al eje x en un punto Q, tales que es constante $|Q|/|P|^n = e$. Encontrar las curvas tangentes. ¿Qué interpretación tiene e para $n = 1$?.

Ejercicio 6.9.9 Suponiendo que una masa M esté en reposo, demostrar que la velocidad inicial que debe tener un satélite que está a una distancia r de M, para que su órbita sea circular es, $\sqrt{GM/r}$..

Ejercicio 6.9.10 Sabiendo que para la Tierra, $GM = 398\,600,4418\ \frac{\text{km}^3}{\text{seg}^2}$ (ver la pág.48), calcular a que altura debemos poner un satélite para que sea geoestacionario, es decir se mueva como si estuviera unido rígidamente a la Tierra.

Ejercicio 6.9.11 Demostrar el recíproco del Teorema de la Hodografa (6.63), es decir que si una trayectoria r (de una masa que se mueve debido a una fuerza central, es decir $r'' \sim r$) tiene hodógrafa que es una circunferencia, entonces r es una cónica con la fuente de atracción en el foco.

Los 5 puntos de Lagrange

El problema de los 3 cuerpos no tiene solución conocida, sin embargo para casos particulares se tiene algún resultado, como por ejemplo cuando tenemos dos masas M y m que giran sobre su centro de masas en trayectorias circulares del plano perpendicular a su momento angular (que consideramos en el eje z). En tal caso hay 5 puntos, en el plano xy de su movimiento, en los que masas despreciables siguen un movimiento unido rígidamente a las dos. Tres de esos puntos (ver la Fig.6.22), llamados L_1, L_2 y L_3, están en la recta que une las dos masas, y los otros dos L_4 y L_5 forman cada uno con M y m triángulos equiláteros. Lo veremos de dos formas:

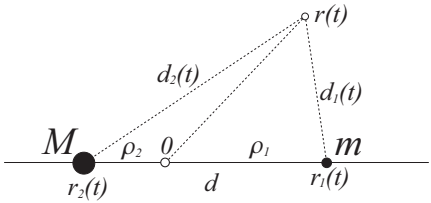


Figura 6.21. Posiciones de las masas M y m.

Primera forma.- Sean r_1 y r_2 las posiciones de m y M, respecto de su centro de masas, por lo tanto $mr_1 + Mr_2 = 0$. Denotemos sus módulos respectivamente con ρ_1 y $\rho_2 = (m/M)\rho_1$, los cuales estamos suponiendo que son constantes y con $d = \rho_1 + \rho_2$ la distancia entre las dos masas. Se sigue que

$$r_1'' = -\frac{GM}{d^2}\frac{r_1}{\rho_1} = -GM_1\frac{r_1}{\rho_1^3}, \qquad \text{para} \quad M_1 = M\frac{\rho_1^2}{d^2}$$

y la aceleración es la misma que si hubiera una masa M_1 en el centro de masas. Para este tipo de ecuación hemos visto que si la órbita de m es circular y su velocidad es v_1, entonces (ver el ejercicio 6.9.9)

$$v_1^2 = \frac{GM_1}{\rho_1} = GM\frac{\rho_1}{d^2}. \tag{6.12}$$

Consideremos ahora una nueva masa en el punto r del plano, insignificante a efectos gravitatorios sobre m y M. Las fuerzas que actúan sobre ella son debidas a las dos masas, por tanto

$$r'' = GM\frac{r_2 - r}{d_2^3} + Gm\frac{r_1 - r}{d_1^3}, \qquad d_i = |r_i - r| \tag{6.13}$$

y si su movimiento es circular con centro en el centro de masas y velocidad angular constante ω, la misma de las masas, entonces r'' es proporcional a r (que tiene módulo constante $\rho = |r|$)

$$r'' = -GM_0\frac{r}{\rho^3}, \qquad \text{para} \quad \frac{M(r - r_2)}{d_2^3} + \frac{m(r - r_1)}{d_1^3} = M_0\frac{r}{\rho^3}$$

y por tener la misma velocidad angular que r_1, a distancia ρ su velocidad es $v = (\rho/\rho_1)v_1$; como por otra parte (ver el ejercicio 6.9.9), $v^2 = GM_0/\rho$, tendremos por (6.12) que

$$\frac{M_0}{\rho} = \frac{v^2}{G} = \frac{\rho^2 v_1^2}{G\rho_1^2} = \frac{\rho^2 M}{\rho_1 d^2} \quad \Leftrightarrow \quad M_0 = M\frac{\rho^3}{\rho_1 d^2}.$$

En definitiva tendremos que r satisface

$$\frac{M(r - r_2)}{d_2^3} + \frac{m(r - r_1)}{d_1^3} = \frac{M_0 r}{\rho^3} = \frac{Mr}{\rho_1 d^2} \tag{6.14}$$

$$\frac{-Mr_2}{d_2^3} - \frac{mr_1}{d_1^3} = \frac{Mr}{\rho_1 d^2} - \frac{Mr}{d_2^3} - \frac{mr}{d_1^3}$$

$$\left(\frac{m}{d_2^3} - \frac{m}{d_1^3}\right) r_1 = \left(\frac{M}{\rho_1 d^2} - \frac{M}{d_2^3} - \frac{m}{d_1^3}\right) r \tag{6.15}$$

y si r no es proporcional a r_1, ambos coeficientes son nulos, por tanto por la anulación del primero, $d_2 = d_1$ y por la del segundo

$$\frac{M}{\rho_1 d^2} = \frac{M + m}{d_1^3} \quad \Leftrightarrow \quad d_1^3 = \rho_1 d^2\frac{M + m}{M} = \rho_1 d^2\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1} = d^3,$$

por lo tanto $d_1 = d_2 = d$ y r forma con las dos masas un triángulo equilátero. Estos dos puntos se llaman *puntos triangulares de Lagrange* y se denotan L_4 y L_5.

Si por el contrario r es proporcional a r_1, $r = xr_1 + (1-x)r_2$, entonces $r - r_1 = (r_1 - r_2)(x - 1)$, $r - r_2 = (r_1 - r_2)x$, $r = (x + (\rho_1/d))(r_1 - r_2)$,

$d_1 = |r - r_1| = d|x - 1|$ y $d_2 = |r - r_2| = d|x|$; y por (6.14), tenemos que

$$\frac{\rho_1 M(r_1 - r_2)x}{d^3|x|^3} + \frac{\rho_1 m(r_1 - r_2)(x-1)}{d^3|x-1|^3} = \frac{M(dx + \rho_1))(r_1 - r_2)}{d^3}$$

$$\frac{\rho_1 x}{|x|^3} + \frac{\rho_2(x-1)}{|x-1|^3} = dx + \rho_1$$

y distinguimos tres casos: que $x \in (0,1)$, que $x > 1$ y que $x < 0$.

En el primer caso $x \in (0,1)$,

$$f_1(x) = \frac{\rho_1}{x^2} - \frac{\rho_2}{(1-x)^2} - dx - \rho_1 = 0$$

tiene una única solución x_1 (llamada[10] $L_1 = x_1 r_1$), pues $f_1(0^+) = \infty$, $f_1(1^-) = -\infty$ y en $(0,1)$,

$$f_1' = -\frac{\rho_1 2x}{x^4} - \frac{\rho_2 2(1-x)}{(1-x)^4} - d < 0.$$

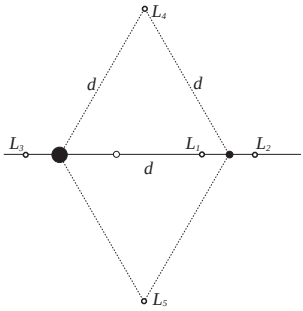


Figura 6.22. Puntos de Lagrange

En el segundo caso $x > 1$,

$$f_2(x) = \frac{\rho_1}{x^2} + \frac{\rho_2}{(x-1)^2} - dx - \rho_1 = 0$$

tiene una única solución (llamada[11] L_2), pues $f_2(1^+) = \infty$, $f_2(\infty) = -\infty$ y en $x > 1$.

$$f_2' = -\frac{\rho_1 2x}{x^4} - \frac{\rho_2 2(x-1)}{(x-1)^4} - d < 0,$$

[10] En este punto del sistema Sol–Tierra está localizado el satélite Soho de observación solar y muy cerca en órbitas en forma de 8 el ACE.

[11] En este punto del sistema Sol–Tierra está localizado el satélite WMAP y el Observatorio Espacial Herschel

Y en el tercero caso $x < 0$

$$f_3(x) = -\frac{\rho_1}{x^2} - \frac{\rho_2}{(1-x)^2} - dx - \rho_1 = 0,$$

también tiene una única solución (llamada L_3), pues $f_3(-\infty) = \infty$, $f_3(0^-) = -\infty$ y en $x < 0$, $f_3' < 0$.

Segunda forma.- consideremos una base unida a las masas que giran a velocidad angular constante ω,

$$e_1(t) = (\cos\omega t, \sin\omega t), \quad e_2(t) = (-\operatorname{sen}\omega t, \cos\omega t),$$
$$e_1' = \omega e_2, \quad e_2' = -\omega e_1, \quad e_1'' = -\omega^2 e_1, \quad e_2'' = -\omega^2 e_2,$$
$$r_1(t) = \rho_1 e_1(t), \quad r_2(t) = -\rho_2 e_1(t).$$

y como $\omega\rho_1 = |r_1'| = v_1$, tendremos por (6.12), que

$$\omega^2 = \frac{GM}{\rho_1 d^2}.$$

Consideremos la curva r, en el sistema de referencia relativo a esta base[12], por tanto se sigue de lo anterior y de (6.13), que

$$\begin{aligned}
r(t) &= x(t)e_1(t) + y(t)e_2(t),\\
r'(t) &= x'e_1 + xe_1' + y'e_2 + ye_2',\\
r''(t) &= x''e_1 + 2x'e_1' + xe_1'' + y''e_2 + 2y'e_2' + ye_2''\\
&= (x'' - \omega^2 x - 2y'\omega)e_1 + (y'' + 2\omega x' - \omega^2 y)e_2\\
&= GM\frac{r_2 - r}{d_2^3} + Gm\frac{r_1 - r}{d_1^3}\\
&= -GM\frac{(\rho_2 + x)e_1 + ye_2}{d_2^3} + Gm\frac{(\rho_1 - x)e_1 - ye_2}{d_1^3}
\end{aligned}$$

para $d_i = |r_i - r|$, pues $r_1 - r = (\rho_1 - x)e_1 - ye_2$ y $r_2 - r = -(\rho_2 + x)e_1 - ye_2$, por tanto

$$d_1 = \sqrt{(\rho_1 - x)^2 + y^2}, \qquad d_2 = \sqrt{(\rho_2 + x)^2 + y^2},$$

y se sigue que para un observador ligado a las masas

$$x'' - \omega^2 x - 2y'\omega = -GM\frac{\rho_2 + x}{d_2^3} + Gm\frac{\rho_1 - x}{d_1^3} = u_x$$
$$y'' + 2\omega x' - \omega^2 y = -GM\frac{y}{d_2^3} - Gm\frac{y}{d_1^3} = u_y$$

[12] El cual no es inercial.

para la función

$$u(x,y) = G\left(\frac{m}{d_1} + \frac{M}{d_2}\right),$$

y nuestra ecuación de segundo orden en coordenadas (no inerciales) es

$$x'' = \omega^2 x + 2y'\omega + u_x \qquad y'' = -2\omega x' + \omega^2 y + u_y. \tag{6.16}$$

Observemos que esta aceleración (x'', y'') es suma de las tres fuerzas por unidad de masa (ver la pág.188): $\omega^2(x,y)$ (llamada *fuerza centrífuga*), $2\omega(y', -x')$ (llamada *fuerza de Coriolis*); y (u_x, u_y) (la fuerza de la gravedad).

Esta ecuación corresponde al campo tangente

$$D = z_1\partial_x + z_2\partial_y + (\omega^2 x + 2z_2\omega + u_x)\partial_{z_1} + (\omega^2 y - 2\omega z_1 + u_y)\partial_{z_2}.$$

Si consideramos la energía cinética $e_c = (z_1^2 + z_2^2)/2$, y la distancia al origen ρ, tendremos

$$\begin{aligned} De_c &= z_1 Dz_1 + z_2 Dz_2 = z_1(\omega^2 x + 2z_2\omega + u_x) + z_2(\omega^2 y - 2\omega z_1 + u_y) \\ &= \omega^2(z_1 x + z_2 y) + z_1 u_x + z_2 u_y \\ &= \omega^2(xDx + yDy) + u_x Dx + u_y Dy = \omega^2 D\left(\frac{\rho^2}{2}\right) + Du \\ &= D\left(\frac{\omega^2\rho^2}{2} + u\right) = -Dv, \end{aligned}$$

para la función de (x,y), que llamaremos *función potencial*

$$v = -\frac{\omega^2\rho^2}{2} - u = -\frac{\omega^2\rho^2}{2} - G\left(\frac{m}{d_1} + \frac{M}{d_2}\right), \tag{6.17}$$

pues tenemos la integral primera de D, que llamamos *energía*

$$h = e_c + v = \frac{z_1^2 + z_2^2}{2} - \frac{\omega^2\rho^2}{2} - G\left(\frac{m}{d_1} + \frac{M}{d_2}\right).$$

Busquemos los puntos singulares p del campo, es decir $D_p = 0$. En ellos

$$z_1 = z_2 = 0, \quad \omega^2 x + u_x = 0, \quad \omega^2 y + u_y = 0,$$

es decir la velocidad es nula y como $\omega^2 x = -u_x$

$$\omega^2 x = GM\frac{\rho_2 + x}{d_2^3} - Gm\frac{\rho_1 - x}{d_1^3} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{x}{\rho_1 d^2} = \frac{\rho_2 + x}{d_2^3} - \frac{m(\rho_1 - x)}{M d_1^3} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{x}{d^2} = \frac{\rho_1(\rho_2 + x)}{d_2^3} - \frac{\rho_2(\rho_1 - x)}{d_1^3},$$

de modo similar desarrollando $\omega^2 y = -u_y$,

$$\omega^2 y = GM\frac{y}{d_2^3} + Gm\frac{y}{d_1^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{d^2} = \frac{y\rho_1}{d_2^3} + \frac{y\rho_2}{d_1^3}$$

y si $y \neq 0$, tendremos por la última igualdad

$$\frac{1}{d^2} = \frac{\rho_1}{d_2^3} + \frac{\rho_2}{d_1^3}, \tag{6.18}$$

y por tanto

$$\frac{x\rho_1}{d_2^3} + \frac{x\rho_2}{d_1^3} = \frac{x}{d^2} = \frac{\rho_1(\rho_2 + x)}{d_2^3} - \frac{\rho_2(\rho_1 - x)}{d_1^3} \quad \Rightarrow$$
$$0 = \frac{\rho_1\rho_2}{d_2^3} - \frac{\rho_2\rho_1}{d_1^3} \quad \Rightarrow \quad d_1 = d_2$$

y como $\rho_1 + \rho_2 = d$, tendremos por (6.18), que $d_1 = d_2 = d$ y hay dos puntos con esta propiedad $p_4 = (x_4, y_4, 0, 0)$ y $p_5 = (x_5, y_5, 0, 0)$. Como dijimos antes denotamos $L_4 = (x_4, y_4)$ y $L_5 = (x_5, y_5)$.

Si por el contrario $y = 0$ el punto está en el eje x y satisface

$$\frac{x}{d^2} = \frac{\rho_1(\rho_2 + x)}{d_2^3} - \frac{\rho_2(\rho_1 - x)}{d_1^3},$$

y llegamos a lo mismo que en (6.15), para $r = xr_1/\rho_1$. Denotamos estos puntos respectivamente $p_i = (x_i, 0, 0, 0)$ y en el plano $L_i = (x_i, 0)$, para $i = 1, 2, 3$.

Estabilidad de los puntos L_4 y L_5

Ahora queremos estudiar la estabilidad de los puntos $L_4, L_5 = (x, \pm y) \in \mathbb{R}^2$. El estudio no será completo, pues es muy complejo y como veremos no siempre es cierto.

Estos puntos forman un triángulo equilátero con las masas y corresponden a los puntos $p = (x, \pm y, 0, 0)$ con velocidad nula (en reposo respecto de las masas), y satisfacen $d_1 = d_2 = d = \rho_1 + \rho_2$, por tanto

$$\rho_1 - x = \rho_2 + x = \frac{d}{2}, \quad x = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} d. \tag{6.19}$$

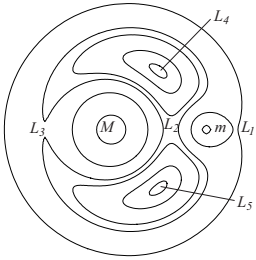


Figura 6.23. Curvas de nivel de v

Teorema 6.65 *La función potencial v (6.17), tiene en los puntos L_4, L_5 un máximo local absoluto.*

Demostración. En primer lugar las derivadas primeras se anulan, (para $z = L_4$)

$$\begin{aligned} v_x(z) &= -\omega^2 x + GM\frac{\rho_2 + x}{d_2^3} + Gm\frac{x - \rho_1}{d_1^3} \\ &= -\omega^2 x + G\left(\frac{M(\rho_2 + x)}{d^3} + \frac{\rho_2 M(x - \rho_1)}{\rho_1 d^3}\right) \\ &= -\omega^2 x + GM\left(\frac{\rho_1(\rho_2 + x) + \rho_2(x - \rho_1)}{\rho_1 d^3}\right) = 0, \end{aligned}$$

la otra derivada es similar. Ahora basta analizar el Hessiano de v:

$$v_{xx} = -\omega^2 - u_{xx}, \quad v_{xy} = -u_{xy}, \quad v_{yy} = -\omega^2 - u_{yy},$$

y comprobar que el primer menor principal es negativo y el segundo positivo. Ahora bien como $\omega^2 = GM/(\rho_1 d^2)$, y $m = M\rho_2/\rho_1$,

$$\begin{aligned} &u = G\left(\frac{m}{d_1} + \frac{M}{d_2}\right) = \frac{GM}{\rho_1}\left(\frac{\rho_2}{d_1} + \frac{\rho_1}{d_2}\right) = \omega^2 \bar{u}, \quad \text{para} \\ &\bar{u} = d^2\left(\frac{\rho_2}{d_1} + \frac{\rho_1}{d_2}\right). \end{aligned}$$

calculemos las derivadas de $\bar{u}$

$$\bar{u}_x = -d^2\left(\rho_2\frac{d_{1x}}{d_1^2}+\rho_1\frac{d_{2x}}{d_2^2}\right), \qquad \bar{u}_y = -d^2\left(\rho_2\frac{d_{1y}}{d_1^2}+\rho_1\frac{d_{2y}}{d_2^2}\right),$$

y sus segundas derivadas en z, sabiendo que $d_1(z) = d_2(z) = d$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{xx}(z) &= -\left(\rho_2\frac{d_{1xx}d^2-2d_{1x}^2d}{d^2}+\rho_1\frac{d_{2xx}d^2-2d_{2x}^2d}{d^2}\right)\\
&= \frac{2(\rho_2d_{1x}^2+\rho_1d_{2x}^2)}{d}-(\rho_2d_{1xx}+\rho_1d_{2xx})\\
\bar{u}_{xy}(z) &= -\left(\rho_2\frac{d_{1xy}d^2-2d_{1x}d_{1y}d}{d^2}+\rho_1\frac{d_{2xy}d^2-2d_{2x}d_{2y}d}{d^2}\right)\\
&= \frac{2(\rho_2d_{1x}d_{1y}+\rho_1d_{2x}d_{2y})}{d}-(\rho_2d_{1xy}+\rho_1d_{2xy})\\
\bar{u}_{yy}(z) &= -\left(\rho_2\frac{d_{1yy}d^2-d_{1y}^2 2d}{d^2}+\rho_1\frac{d_{2yy}d^2-d_{2y}^2 2d}{d^2}\right)\\
&= \frac{2(\rho_2d_{1y}^2+\rho_1d_{2y}^2)}{d}-(\rho_2d_{1yy}+\rho_1d_{2yy})
\end{aligned}$$

para terminar este cálculo necesitamos las derivadas de

$$d_1 = \sqrt{(x-\rho_1)^2+y^2}, \qquad d_2 = \sqrt{(\rho_2+x)^2+y^2},$$

sabiendo que en z, $\rho_2 + x = \rho_1 - x = d/2$ y que $d^2/4 + y^2 = d^2$,

$$d_{1x} = \frac{x-\rho_1}{d_1}, \qquad d_{2x} = \frac{\rho_2+x}{d_2}, \qquad d_{1x}(z) = -\frac{1}{2}, \qquad d_{2x}(z) = \frac{1}{2}$$
$$d_{1y} = \frac{y}{d_1}, \qquad d_{2y} = \frac{y}{d_2}, \qquad d_{1y}(z) = d_{2y}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y de las segundas

$$\begin{aligned}
d_{1xx}(z) &= \frac{d-(x-\rho_1)d_{1x}}{d^2} = \frac{d-\frac{d}{4}}{d^2} = \frac{3}{4d},\\
d_{1xy}(z) &= d_{1yx} = \frac{-yd_{1x}}{d^2} = \frac{y}{2d^2} = \frac{\sqrt{3}}{4d},\\
d_{1yy}(z) &= \frac{d-yd_{1y}}{d^2} = \frac{1}{4d},\\
d_{2xx}(z) &= \frac{d-(\rho_2+x)d_{2x}}{d^2} = \frac{3}{4d},\\
d_{2xy}(z) &= d_{2yx} = \frac{-yd_{2x}}{d^2} = -\frac{\sqrt{3}}{4d},\\
d_{2yy}(z) &= \frac{d-yd_{2y}}{d^2} = \frac{1}{4d}.
\end{aligned}$$

de donde que, para $0 < k = (\rho_1 - \rho_2)/d < 1$

$$\bar{u}_{xx}(z) = -\frac{1}{4}, \qquad \bar{u}_{xy}(z) = \frac{3\sqrt{3}}{4}k \qquad \bar{u}_{yy}(z) = \frac{5}{4},$$

y podemos calcular el Hessiano de v teniendo en cuenta que $u = \omega^2\bar{u}$

$$\begin{aligned}
v_{xx}(z) &= -\omega^2 - u_{xx} = -\omega^2(1+\bar{u}_{xx}) = -\omega^2\frac{3}{4},\\
v_{xy}(z) &= -u_{xy} = -\omega^2\bar{u}_{xy} = -\omega^2\left(\frac{3\sqrt{3}k}{4}\right),\\
v_{yy}(z) &= -\omega^2 - u_{yy} = -\omega^2(1+\bar{u}_{yy}) = -\omega^2\frac{9}{4},
\end{aligned}$$

y los menores principales de este Hessiano, que son

$$\begin{aligned}
H_1 &= -\omega^2\frac{3}{4} < 0,\\
H_2 &= \omega^4\left(\frac{27}{16} - \frac{27}{16}k^2\right) = \omega^4\frac{27}{16}(1-k^2) > 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Como $D_{p_i} = 0$, podemos considerar la linealización (ver la pág.278), del campo

$$\begin{aligned}
D &= z_1\partial_x + z_2\partial_y + (\omega^2 x + 2z_2\omega + u_x)\partial_{z_1} + (\omega^2 y - 2\omega z_1 + u_y)\partial_{z_2}\\
&= z_1\partial_x + z_2\partial_y + f\partial_{z_1} + g\partial_{z_2}.
\end{aligned}$$

en p_4 (ó p_5). La matriz de la linealizada en esos puntos es el Jacobiano de (z_1, z_2, f, g),

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -v_{xx} & -v_{xy} & 0 & 2\omega \\ -v_{xy} & -v_{yy} & -2\omega & 0 \end{pmatrix}$$

y sus autovalores son las soluciones de $|\det A - \lambda I| = 0$, es decir

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ v_{xx} & v_{xy} & -\lambda & 2\omega \\ v_{xy} & v_{yy} & -2\omega & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + \lambda^2(v_{xx} + v_{yy} + 4\omega^2) + v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2$$

$$0 = \mu^2 + \mu\omega^2 + \omega^4 \frac{27}{16}(1 - k^2), \qquad \lambda = \pm\sqrt{\mu},$$

y si un λ tiene parte real no nula, él o su contrario la tiene positiva, en cuyo caso se tiene que el punto es inestable por (5.7). Por lo tanto para que sea estable debe ser imaginario puro, es decir $\mu < 0$, en particular debe ser real y el discriminante debe ser positivo

$$1 - \frac{27(1-k^2)}{4} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{27} > 1 - k^2 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 > \frac{23}{27}$$

y para que nuestro punto sea estable debe ser

$$k = \frac{\rho_1 - \rho_2}{d} = \frac{M - m}{M + m} > \sqrt{\frac{23}{27}}\ (\approx 0,92).$$

lo cual es necesario aunque desconozco si es suficiente.

Las masas del Sol, Tierra, Jupiter y Luna son respectivamente en kg

$$M_S = 1989{\cdot}10^{27}, \quad M_T = 5972{\cdot}10^{21}, \quad M_J = 1898{\cdot}10^{24}, \quad M_L = 7349{\cdot}10^{19},$$

y los valores de k para la Tierra–Luna (k_{TL}), Sol–Tierra (k_{ST}) y Sol–Jupiter (k_{SJ}) son

$$k_{TL} = 0,97\ldots, \qquad k_{ST} = 0,99\ldots, \qquad k_{SJ} = 0,99\ldots$$

lo cual indica la posible estabilidad de L_4 y L_5 en esos sistemas binarios, en cualquier caso se han observado en el sistema Sol–Jupiter, satélites llamados *troyanos*, en esos puntos.

6.10. Apéndice: Variedades diferenciables

Definición. Llamamos *estructura diferenciable* en un espacio topológico *Hausdorff* y de *base numerable* $\mathcal{X}$, a una colección

$$\{\mathcal{C}^\infty(U) \subset \mathcal{C}(U), \text{ con } U \text{ abierto de } \mathcal{X}\},$$

de subconjuntos de las funciones continuas de cada abierto U de $\mathcal{X}$, cada una de las cuales es una $\mathbb{R}$-álgebra, que llamaremos de *funciones diferenciables*, que satisfacen las siguientes propiedades:

i.- La restricción de una función diferenciable es diferenciable, es decir dados dos abiertos $U \subset V$,

$$f \in \mathcal{C}^\infty(V) \quad \Rightarrow \quad f_{|U} \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

ii.- Dada una colección U_i de abiertos, $U = \cup U_i$ y $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$, tales que $f_{i|U_i \cap U_j} = f_{j|U_i \cap U_j}$, entonces existe una única $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ cuya restricción a cada U_i es f_i.

iii.- Para cada punto $x \in \mathcal{X}$ existe un abierto U_x, (en la foto, la olla) que lo contiene y al que llamaremos *entorno coordenado de* x, un abierto V de un $\mathbb{R}^n$ (en la foto, el mantel) y un homeomorfismo $H : U_x \to V$ (que lleva el punto rojo de la olla en el del mantel), tal que para cada abierto $U \subset U_x$

Figura 6.24.

$$f \in \mathcal{C}^\infty(H(U)) \quad \Leftrightarrow \quad f \circ H \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Llamaremos *variedad diferenciable* a un espacio topológico dotado de una estructura diferenciable.

Proposición 6.66 *Toda variedad es unión disjunta numerable de sus componentes conexas, que son abiertos y cerrados de la variedad.*

Demostración. Consideremos, para cada x de la variedad, la unión U_x de todos los conjuntos conexos de la variedad que contienen a x. Se demuestra fácilmente que cada U_x es conexo, que es abierto (por la

propiedad iii) y es un cerrado pues su complementario es abierto. Por tanto a lo sumo la colección de estas componentes conexas es numerable si el espacio tiene una base numerable de abiertos. ∎

Definición. Diremos que una aplicación continua entre variedades diferenciables

$$F\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y},$$

es *diferenciable* si para cada abierto $V \subset \mathcal{Y}$

$$f \in \mathcal{C}^\infty(V) \quad \Rightarrow \quad F^*(f) = f \circ F \in \mathcal{C}^\infty(f^{-1}(V)).$$

Definición. Llamamos *germen* en un punto x, de una función continua (diferenciable) f definida en un entorno abierto de x, a la clase de equivalencia de todas las funciones de su tipo, definidas en entornos abiertos de x, que coincidan con f en algún entorno de x. Denotaremos con $\mathcal{C}_x(\mathcal{X})$ (ó $\mathcal{C}_x$ si no hay confusión) y $\mathcal{C}_x^\infty$ las $\mathbb{R}$–álgebras de gérmenes de funciones continuas y diferenciables respectivamente en x.

Llamamos *espacio tangente* de una variedad $\mathcal{X}$ en un punto x al $\mathbb{R}$–espacio vectorial $T_x(\mathcal{X})$, de las derivaciones

$$D_x\colon \mathcal{C}_x^\infty \longrightarrow \mathbb{R},$$

en el punto x, es decir aplicaciones verificando:

a) Linealidad.- $D_p(tf + sg) = tD_pf + sD_pg$.

b) Anulación constantes.- $D_pt = 0$.

c) Regla de Leibnitz en p.- $D_p(fg) = f(p)D_pg + g(p)D_pf$,

para cualesquiera $t, s \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{C}_x^\infty$. el cual —si $\mathcal{X}$ es Hausdorff y de base numerable como suponemos—, se demuestra que coincide con las derivaciones en x de todo el álgebra $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{X})$ en $\mathbb{R}$. Llamamos *espacio cotangente* a su dual, que denotamos $T_x^*(\mathcal{X})$.

Llamamos *campos tangentes en un abierto* U a las derivaciones

$$D\colon \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U),$$

es decir aplicaciones verificando:

1.- $D(tf + rg) = tDf + rDg$,

2.- $Dt = 0$,

3.- Regla de Leibnitz: $D(fg) = f(Dg) + g(Df)$,

para $f, g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $t, r \in \mathbb{R}$, las cuales forman un $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{X})$–módulo, que denotamos $\mathcal{D}(\mathcal{X})$, y un álgebra con el producto definido por el *corchete de Lie*

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1.$$

Llamamos 1–*formas* a los elementos de su módulo dual, $\Omega(\mathcal{X})$.
Dada una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{X})$ llamamos *diferencial* de f a la 1–forma

$$df\colon \mathcal{D}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{X}), \qquad df(D) = Df.$$

Definición. Dada una aplicación diferenciable

$$F\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y},$$

llamamos *aplicación lineal tangente* en $x \in \mathcal{X}$ a

$$F_*\colon T_x(\mathcal{X}) \longrightarrow T_{F(x)}(\mathcal{Y}), \qquad F_*(D_x) = D_x \circ F^*,$$

a la aplicación dual entre espacios cotangentes la denotamos F^*. Llamamos *rango* de F en x al rango de F_*.

6.10.1. Particiones de la unidad

Lema 6.67 *Sea $(\mathcal{V}, \mathcal{C}^\infty)$ una variedad diferenciable, U un abierto y $K \subset U$ un compacto. Entonces existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ tal que $\varphi(\mathcal{V}) \subset [0,1]$, $\varphi = 1$ en K y $\operatorname{sop}(\varphi) \subset U$.*

Demostración. El resultado lo hemos visto para U abierto coordenado en (1.8), pág.7). Para cada $x \in K$ sea $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ tal que $\varphi(x) = 1$ y $\operatorname{sop}(\varphi) \subset U$. Por compacidad de K existirán, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ y abiertos $U_1 = \{\varphi_1 > 0\}, \ldots, U_n = \{\varphi_n > 0\}$, tales que $K \subset \cup U_i$ y en K, $f = \sum \varphi_i > 0$. Además $\operatorname{sop}(f) \subset \cup \operatorname{sop}(\varphi_i) \subset U$. Ahora bien por ser f continua existe $\min\{f(x) : x \in K\} = \epsilon > 0$; y como existe $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, tal que $h(\mathbb{R}) = [0,1]$, $h(x) = 1$ para $x \geq \epsilon$ y $h(x) = 0$, para $x \leq 0$ (ver pág.7), podemos definir la función $\varphi = h \circ f$ que es la buscada, pues $\operatorname{sop}(\varphi) \subset U$ y en K, $\varphi = 1$. ∎

Corolario 6.68 *Sea $(\mathcal{V}, \mathcal{C}^\infty)$ una variedad, K un compacto y $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ no negativa, tal que $f > 0$ en K. Entonces existe $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, tal que $h > 0$ en $\mathcal{V}$ y $h = f$ en K.*

Demostración. Sea $U = \{f > 0\}$, entonces por (6.67) existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, tal que $\varphi = 1$ en K y $\operatorname{sop}(\varphi) \subset U$. La función $h = f + (1 - \varphi)$ es la buscada. ∎

Teorema 6.69 *Sea $(\mathcal{V}, \mathcal{C}^\infty)$ una variedad, K un compacto de $\mathcal{V}$ y V_j un recubrimiento de K. Entonces existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ no negativas, tales que $\sum v_i = 1$ en K y $\operatorname{sop}(\varphi_i) \subset V_j$, para algún j.*

Demostración. Si $x \in K$, entonces $x \in V_j$ para algún j. Consideremos para este x una $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ no negativa, tal que $\varphi(x) = 1$ y $\text{sop}(\varphi) \subset V_j$ y sea $U_x = \{\varphi > 0\}$, entonces por ser K compacto existirán $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ y $U_1 = \{\varphi_1 > 0\}, \ldots, U_n = \varphi_n > 0$ tales que $K \subset \cup U_i$, $f = \sum g_i > 0$ en K y $\text{sop}(\varphi_i) \subset V_{ji}$. Ahora por (6.68), existe $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ positiva, tal que $h = f$ en K. Las funciones buscadas son $\varphi_i = g_i/h$. ∎

Definición. Diremos que una familia de subconjuntos V_j, de un espacio topológico X es *localmente finita* si cada punto de X tiene un entorno que corta a lo sumo a un número finito de conjuntos V_j.

Ejercicio 6.10.1 Demostrar que la adherencia de conjuntos de una familia localmente finita, también lo es.

Definición. Diremos que una familia φ_j de funciones diferenciables, en una variedad $\mathcal{V}$, constituyen una *partición de la unidad* en $\mathcal{V}$, si se verifican las propiedades:

(a) $\varphi_j \geq 0$ para todo j. (b) $\text{sop}(\varphi_j)$ es una familia localmente finita. (c) $\sum v_j = 1$ en $\mathcal{V}$.

Una partición de la unidad φ_j está subordinada a un recubrimiento por abiertos V_i de $\mathcal{V}$ si: (d) para cada $j$existe un i tal que $sop(\varphi_j) \subset V_i$.

Recordemos que el espacio topológico subyacente a una variedad diferenciable es Hausdorff, localmente compacto y tiene una base numerable de abiertos. Por ello se tiene el,

Lema 6.70 *Toda variedad $\mathcal{V}$ es unión numerable de compactos K_n, tales que $K_{n-1} \subset \overset{\circ}{(}\, K_n)$.*

Demostración. En primer lugar como $\mathcal{V}$ tiene una base numerable de abiertos V_n, y cada punto $x \in \mathcal{V}$ tiene un entorno compacto V_x, existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V_n \subset V_x$, y $C_n = \bar{V}_n$ será compacto. Por tanto $\mathcal{V}$ es unión numerable de los compactos C_n. Tomemos ahora $K_1 = C_1$. Para construir K_2 tomamos para cada $x \in K_1$ un abierto U_x relativamente compacto (es decir con adherencia compacta). Por ser K_1 compacto podemos extraer un subrecubrimiento finito $U_1, \ldots, U_n$, y definimos $K_2 = \cup_i \overline{U_i} \cup C_2$, entonces $K_1 \subset \cup U_i \subset \overset{\circ}{(}\, K_2)$. Ahora por inducción construimos K_n en función de K_{n-1} y el resultado se sigue. ∎

Teorema 6.71 *Dado un recubrimiento abierto V_i de una variedad $\mathcal{V}$, existe una partición de la unidad subordinada a él.*

Demostración. En los términos del lema anterior para K_n consideremos los compactos

$$C_1 = K_1, \quad C_n = K_n \setminus \overset{\circ}{(}K_{n-1})(n \geq 2),$$

Los abiertos V_i recubren a C_1 y a C_2 y los $V_{ni} = V_i \cap K_{n-2}^c$ para $n \geq 3$ recubren a C_n. Aplicando (6.69), existen para cada $n \in \mathbb{N}$, $\Phi_{n1}, \ldots, \Phi_{nm} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, no negativas, con m dependiendo de n, tales que en C_n, $\sum F_{ni} = 1$, y para $n = 1, 2$ y cada Φ_{nj} existe un abierto V_i, que podemos llamar V_{nj} tal que $\text{sop}(\Phi_n j) \subset V_{nj}$, y para $n \geq 3$ y cada Φ_{nj} existe un V_{ni}, que podemos llamar V_{nj}, tal que $\text{sop}(\Phi_{nj}) \subset V_{nj}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $i = 1, \ldots, m_n$, $\Phi_{ni} \geq 0$. Veamos ahora que $\text{sop}(\Phi_{ni})$ es localmente finita.

Para cada $x \in \mathcal{V}$ existe $n \geq 3$ tal que $x \in \overset{\circ}{(}K_n)$. Ahora bien para $j \geq n-2$ tenemos que $K_n \subset K_{j-2}$, por tanto

$$V_{ji} = V_i \cap K_{j-2}^c \subset K_{j-2}^c \subset K_n^c,$$

es decir que para $j \geq n-2$ tenemos

$$\overset{\circ}{K}_n \subset K_n \subset V_{ji}^c \subset \text{sop}(\Phi_{ji})^c,$$

de donde se sigue que $\text{sop}(\Phi_{ni})$es localmente finita. Por último y como consecuencia de lo anterior $\Phi = \sum F_{ni} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, además para cada $x \in \mathcal{V}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in C_n$ y para algún $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\Phi_{ni}(x) > 0$, pues

$$\Phi_{n1}(x) + \cdots + \Phi_{nm}(x) = 1.$$

Por tanto $\Phi(x) > 0$ y basta considerar las funciones $\varphi_{ni} = (\Phi_{ni}/\Phi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$. ∎

Corolario 6.72 *Dados C_1 y C_2 cerrados disjuntos de $\mathcal{V}$, existe $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ tal que $h(\mathcal{V}) \subset [0,1]$, $h(C_1) = 0$ y $h(C_2) = 1$, además sop$(h) \subset C_1$.*

Demostración. Consideremos una partición de la unidad φ_i subordinada a $U = \mathcal{V} - C_1$ y $V = \mathcal{V} - C_2$, y consideremos los φ_j tales que $\text{sop}(\varphi_j) \subset U$ y su suma $h = \sum v_j$, y por otra parte el resto de los φ_i para los que se tendrá $\text{sop}(\varphi_k) \subset V$, y sea g su suma. Entonces por ser

φ_i una familia localmente finita se tiene que $\cup \mathrm{sop}(\varphi_j)$ y $\cup \mathrm{sop}(\varphi_k)$ son cerrados, por tanto $\mathrm{sop}(h) \subset U$ y $\mathrm{sop}(g) \subset V$. Como además se tiene que $h + g = 1$, el resultado se sigue. ∎

Corolario 6.73 *Sean C un cerrado y U un abierto de $\mathcal{V}$, tales que $C \subset U$. Entonces existe $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, tal que $h(\mathcal{V}) \subset [0,1]$, $h(C) = 1$ y $\mathrm{sop}(h) \subset U$.*

Ejercicio 6.10.2 Sea $\mathcal{X}$ una subvariedad cerrada de $\mathcal{V}$. Demostrar que toda función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{X})$ puede extenderse a una $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ (ver Helgason, p.92).

6.10.2. Inmersiones locales, subvariedades

Definición. Decimos que F es una *inmersión local* en x si la aplicación

$$F^* \colon C^\infty_{F(x)} \longrightarrow C^\infty_x, \qquad F^*(f) = f \circ F,$$

definida entre álgebras de gérmenes de funciones diferenciables, es sobre. Lo cual equivale a que

$$F_* \colon T_x(\mathcal{X}) \longrightarrow T_{F(x)}(\mathcal{Y}),$$

sea inyectiva. Diremos que F es *inmersión* si es inyectiva e inmersión local en todo punto, en cuyo caso diremos que $F(\mathcal{X})$ es una *subvariedad inmersa* en $\mathcal{Y}$. Si además, con la topología inducida por $\mathcal{Y}$, resulta que

$$F : \mathcal{X} \longrightarrow F(\mathcal{X}),$$

es un homeomorfismo, diremos que $F(\mathcal{X})$ es una *subvariedad* (ó *subvariedad regular* como la llaman algunos autores), de $\mathcal{Y}$.

Teorema del rango 6.74 *Si $F \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es diferenciable de rango constante k, entonces para cada $p \in \mathcal{X}$ y $q = F(p)$ existen entornos coordenados V_p y V_q, con coordenadas $(u_1, \ldots, u_n)$ y $(v_1, \ldots, v_m)$, tales que si $x \in V_p$ tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, $F(x)$ tiene coordenadas*

$$(x_1, \ldots, x_k, 0 \ldots, 0).$$

Corolario 6.75 *En las condiciones anteriores, si F es localmente inyectiva $k = n$ y F es inmersión local.*

Teorema de caracterización de subvariedades 6.76 *$\mathcal{S}$ es una subvariedad de una variedad $\mathcal{X}$ si y sólo si para cada $p \in \mathcal{S}$, existe un abierto coordenado V_p de p en $\mathcal{X}$, con coordenadas u_i, tal que*

$$\mathcal{S} \cap V_p = \{x \in V_p : \ u_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, k\}.$$

Proposición 6.77 *Sea $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ diferenciable de rango constante k.*

1.- *Para cada $q \in \mathcal{Y}$, $F^{-1}(q)$ es vacío ó una subvariedad cerrada de $\mathcal{X}$, de dimensión* $\dim \mathcal{X} - k$.

2.- *Cada $p \in \mathcal{X}$ tiene un entorno abierto V_p tal que $F(V_p)$ es una subvariedad de $\mathcal{Y}$ de dimensión k.*

3.- *Si F es sobre,* $\dim \mathcal{Y} = k$.

Demostración. 1.- Sea $p \in F^{-1}(q)$, y consideremos los entornos del teorema del rango, entonces

$$\begin{aligned} F^{-1}(q) \cap V_p &= \{x \in V_p : \ F(x) = q\} \\ &= \{x \in V_p : \ v_j(F(x)) = v_j(q), \ j \leq k\} \\ &= \{x \in V_p : \ u_j(x) = v_j(q), \ j \leq k\}. \end{aligned}$$

2.- Localmente F es composición de una proyección (que lleva abiertos en abiertos) y una inmersión, por tanto existe un abierto $V \subset V_q$ tal que $F(V_p) = \{y \in V : \ v_{k+1} = \cdots = v_n = 0\}$.

3.- Como $\mathcal{X}$ es de base numerable, por el apartado anterior $\mathcal{Y}$ se puede poner como unión numerable de subvariedades de dimensión k y si $k < \dim \mathcal{Y}$ es absurdo porque las subvariedades son de medida nula y la unión numerable de conjuntos de medida nula es de medida nula. También porque las subvariedades son densas en ningún lado y por el Teorema de Baire su unión numerable también es densa en ningún lado. ∎

6.10.3. Variedades integrales máximas

Veremos que si Δ es una distribución involutiva, entonces por cada punto de la variedad pasa una única variedad integral máxima. Pero para ello necesitamos unos resultados previos.

Teorema 6.78 *Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades diferenciables, y consideremos el diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{F} & \mathcal{V} \\ & {\scriptstyle H}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle G} & \\ & \mathcal{W} & \end{array}$$

donde G es inmersión y H es diferenciable, entonces cada afirmación implica la siguiente:

i) $G(\mathcal{V})$ es una subvariedad de $\mathcal{W}$.

ii) F es continua.

iii) F es diferenciable.

Demostración. (i)⇒(ii) Para cada abierto $V \subset \mathcal{V}$ se tiene por ser G inyectiva

$$F^{-1}(V) = F^{-1}[G^{-1}[G(V)]] = H^{-1}[G(V)],$$

y F es continua por serlo H y $G(\mathcal{V})$ tener la topología inducida por $\mathcal{W}$, por lo que $G(V) = A \cap G(\mathcal{V})$, con A abierto de $\mathcal{W}$ y $F^{-1}(V) = H^{-1}(A)$.

(ii)⇒(iii) Si $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ es continua, entonces podemos definir para cada $x \in \mathcal{U}$

$$F^*\colon \mathcal{C}_{F(x)}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{C}_x(\mathcal{U}),$$

tal que $F^*[f] = [F^* f]$, para cualquier representante f. Ahora que F es diferenciable se demuestra fácilmente en germen, pues si f es el germen de una función diferenciable en $y = F(x) \in \mathcal{V}$, para un punto $x \in \mathcal{U}$, entonces $f = G^*(g)$ (por ser G inmersión local), para g el germen de una función diferenciable de $\mathcal{W}$, por lo tanto

$$F^*(f) = F^*[G^*(g)] = H^*(g),$$

es el germen de una función diferenciable. ∎

Teorema 6.79 *Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades diferenciables, y consideremos el diagrama conmutativo de teorema anterior, con G inmersión, H diferenciable y además para cada $y \in \mathcal{V}$,*

$$G_*[T_y(\mathcal{V})] = \Delta_{G(y)},$$

para Δ una distribución involutiva de $\mathcal{W}$. Entonces F es continua y por el resultado anterior diferenciable.

Demostración. Sea $V \subset \mathcal{V}$ un abierto y $x \in F^{-1}(V)$, basta encontrar un entorno abierto de x cuya imagen por F esté en V. Para ello consideremos $y = F(x)$ y un $(W_z; w_i)$, entorno coordenado de $z = H(x) = G(y)$, con coordenadas $(w_1, \ldots, w_m)$, tal que $w_i(z) = 0$ y para cada $p \in W_z$

$$\Delta_p = < \frac{\partial}{\partial w_1}{}_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial w_n}{}_p >,$$

y consideremos el abierto $G^{-1}(W_z)$, el cual tiene por (6.66) una colección numerable de componentes conexas V_k que son abiertos. Llamemos V_0 a la que contiene a y y $V_y = V \cap V_0$.

Ahora consideremos las funciones de $G^{-1}(W_z)$, $v_i = G^*(w_i) = w_i \circ G$, las cuales son constantes, para $i = n+1, \ldots, m$, en cada componente conexa V_k, pues para cada $q \in V_k$ y $D_q \in T_q(\mathcal{V})$

$$D_q v_i = D_q(w_i \circ G) = G_*(D_q) w_i = 0,$$

ya que $G_*(D_q) \in \Delta_{G(q)}$. Por lo tanto existen números $a_{ik} \in \mathbb{R}$, con $i = n+1, \ldots, m$ y $k = 0, 1, 2, \ldots$, tales que

$$v_i[V_k] = a_{ik}, \qquad v_i[V_0] = 0.$$

Por otra parte, las funciones $v_i = w_i \circ G$, para $i = 1, \ldots, n$, son un sistema de coordenadas en V_0, ya que si $q \in V_0$ y E_{iq} es la base de $T_q(V_0)$ tal que

$$G_*(E_{iq}) = \frac{\partial}{\partial w_i}{}_{G(q)}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

tendremos que $d_q v_j \in T_q^*(\mathcal{V})$ es su base dual, pues

$$d_q v_i(E_{jq}) = E_{jq}(w_i \circ G) = G_*[E_{jq}] w_i = \delta_{ij},$$

y en estas coordenadas $G\colon V_0 \to W_z$ se expresa de la forma

$$(y_1, \ldots, y_n) \longrightarrow (y_1, \ldots, y_n, 0, \ldots, 0),$$

por tanto podemos considerar un abierto $W \subset W_z$, entorno de z tal que

$$G(V_y) = \{p \in W : \ w_{n+1}(p) = \cdots = w_m(p) = 0\}.$$

Si ahora llamamos U a la componente conexa del abierto $H^{-1}(W)$ que contiene a x, basta demostrar que $F(U) \subset V_y \subset V$ ó equivalentemente por ser G inyectiva

$$H(U) = G[F(U)] \subset G(V_y).$$

Ahora por una parte tenemos que $F(U) \subset G^{-1}(W_z) = \cup V_k$, pues $G[F(U)] = H(U) \subset W \subset W_z$ y por tanto para $i = n+1, \ldots, m$

$$w_i[H(U)] = v_i[F(U)] \subset \{a_{ik} \in \mathbb{R} : \ k = 0, 1, \ldots\},$$

pero por otra parte $w_i[H(U)]$ es conexo, por ser imagen continua de un conexo, por lo que debe ser constante y como $x \in U$, $w_i[H(U)] = 0$, es decir que

$$H(U) \subset \{p \in W : \ w_{n+1}(p) = \cdots = w_m(p) = 0\} = G(V_y). \quad \blacksquare$$

Teorema 6.80 *Sea Δ una distribución involutiva en una variedad $\mathcal{X}$, entonces por cada punto de la variedad pasa una única variedad integral máxima.*

Demostración. Sea $p \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{K}$ el conjunto de puntos que se unen a p por una curva continua, diferenciable —salvo en un número finito de puntos—, y en los puntos en los que es diferenciable es tangente a la distribución. Veamos que:

(i) $\mathcal{K}$ es una variedad diferenciable, conexa con base numerable.

(ii) La inclusión $i\colon \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{X}$ es inmersión local.

(iii) $\mathcal{K}$ es variedad integral máxima; y que es única.

Por el Teorema de Frobenius Δ es totalmente integrable, por tanto cada punto $x \in \mathcal{X}$, tiene un entorno abierto coordenado cúbico $(U_x; u_i)$, cuyas franjas son tangentes a la distribución, ahora bien como $\mathcal{X}$ tiene base numerable V_m, existe un m tal que $x \in V_m \subset U_x$, ahora elegimos para cada uno de estos m –que es una colección numerable–, un $U_m = U_x$ cualquiera que contenga a V_m. De este modo tendremos un recubrimiento numerable de $\mathcal{X}$, por abiertos coordenados cúbicos $(U_m; u_{mi})$, cuyas franjas son tangentes a la distribución y por comodidad pondremos $p \in U_0$. Sea $q \in \mathcal{K}$, sea $U_{m(q)}$ el abierto del recubrimiento que lo contiene y

$$V_q = \{x \in U_{m(q)} : \ u_{m(q)r+1}(x) = u_{m(q)r+1}(q), \ldots, \\ u_{m(q)n}(x) = u_{m(q)n}(q)\},$$

la franja del abierto que lo contiene, la cual está en $\mathcal{K}$, pues de q se llega a todos esos puntos por curvas tangentes a la distribución. Ahora consideramos en cada V_q la topología para la que

$$\phi = (u_{m(q)1}, \ldots, u_{m(q)r})\colon V_q \to \phi(V_q) \subset \mathbb{R}^r,$$

es un homeomorfismo y definimos un abierto $A \subset \mathcal{K}$ sii $A \cap V_q$ es abierto de V_q, para cada q. Ahora consideramos la estructura diferencial en $\mathcal{K}$

que definen las aplicaciones ϕ. Con esta estructura diferenciable $\mathcal{K}$ es una variedad de dimensión r, conexa —pues es conexa por arcos por definición— y veamos que tiene una base numerable de abiertos.

Basta ver que para cada m, $U_m \cap \mathcal{K}$ es una colección numerable de franjas, para ello observamos que cada punto $x \in U_m \cap \mathcal{K}$, se une a p por una curva, que se recubre con una colección finita de abiertos $U_0, U_{i_1}, \ldots, U_{i_m}$ —este recubrimiento puede hacerse de muchas formas, pero a lo sumo hay una colección numerable de ellos, pues es numerable la colección de subconjuntos finitos de un conjunto numerable—. Ahora en cada uno de los U_{i_j}, la curva por ser continua y tangente a la distribución va por una única franja, por tanto sale de la franja de U_0 que contiene a p y pasa a una franja de U_{i_1} de esta a una del siguiente abierto y así hasta el último. Basta entonces ver que cada franja S se interseca con cada abierto U_i en una colección a lo sumo numerable de franjas. $S \cap U_i$ es un abierto de la subvariedad S, que como tiene base numerable tiene (por (6.66)) una colección numerable de componentes conexas, que como son tangentes a la distribución y son conexas están cada una de ellas en una franja. Por tanto $\mathcal{K}$ tiene base numerable y es una variedad diferenciable conexa, para la que la inclusión es inmersión local y es tangente a Δ. Por tanto es variedad integral pero además es maximal, pues si hubiera otra $\mathcal{N}$ pasando por p, cada punto suyo x puede unirse a p (pues es arco conexa) por una curva diferenciable tangente a la distribución, por tanto de $\mathcal{K}$.

Veamos ahora que es única. Por lo anterior si hubiera otra $\mathcal{N}$ pasando por p, sería $\mathcal{N} \subset \mathcal{K}$ y por ser maximal, se daría la igualdad conjuntista. Ahora bien las dos inclusiones serían aplicaciones diferenciables por (6.79), por tanto son variedades diferenciables iguales. ∎

6.10.4. Otra demostración del Teorema de Frobenius

Terminamos dando una demostración alternativa del *Teorema de Frobenius I* sin utilizar el *Teorema de la Proyección*.

Lema 6.81 *Sea Δ una distribución involutiva de rango r, entonces para cada $x \in U$ existe un abierto $V \subset U$, entorno de x, y r generadores independientes X_i de $\Delta(V)$, tales que $[X_i, X_j] = 0$.*

Demostración. Sean $D_1, \ldots, D_r \in \mathcal{D}$ generadores independientes de Δ en todo punto de un entorno abierto U_x de x, y consideremos la matriz de orden $r \times n$, $(f_{ij} = D_i x_j)$. Entonces la independencia de los

D_i implica que en $(f_{ij}(x))$ hay un menor de orden r con determinante no nulo, supongamos que corresponde a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{r1} & \cdots & f_{rr} \end{pmatrix}$$

Consideremos $\mathbf{A}^{-1} = (g_{ij})$, la cual estará definida en un nuevo entorno U_x de x y definamos en este entorno los r campos, que generan $\Delta(U_x)$ y en todo punto de U_x son independientes,

$$X_i = g_{i1}D_1 + \cdots + g_{ir}D_r = \frac{\partial}{\partial x_i} + c_{i,r+1}\frac{\partial}{\partial x_{r+1}} + \cdots + c_{i,n}\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Para ellos se tiene por hipótesis que

$$\begin{aligned}[X_i, X_j] &= \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_r X_r \\ &= \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_r \frac{\partial}{\partial x_r} + \lambda_{r+1}\frac{\partial}{\partial x_{r+1}} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_n},\end{aligned}$$

donde las λ, para $i = r+1, \ldots, n$ están definidas por las c_{ij} y las $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Se sigue entonces que para $m = 1, \ldots, r$

$$\lambda_m = [X_i, X_j]x_m = X_i(X_j x_m) - X_j(X_i x_m) = 0,$$

y por tanto $[X_i, X_j] = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, r$. ∎

Teorema de Frobenius I 6.82 *Una distribución es totalmente integrable si y sólo si es involutiva.*

Demostración. "⇒" Basta demostrar que si $D, E \in \Delta$, entonces para cada $x \in U$, $[D, E]_x \in \Delta_x$ y esto es obvio en el entorno U_x de la definición, pues $\Delta(U_x)$ es involutivo.

"⇐" Lo haremos por inducción sobre r. Para $r = 1$ es el teorema de clasificación local de campos no singulares.

Sea $r > 1$ y supongamos el resultado cierto para los rangos $s \leq r-1$.

Por el Lema anterior sabemos que para cada $x \in U$ existe un abierto $U_x \subset U$, entorno de x, y r generadores independientes X_i de $\Delta(U_x)$, tales que $[X_i, X_j] = 0$. Se sigue que $X_1, \ldots, X_{r-1}$ generan una distribución involutiva de rango $r-1$ y por inducción existe un entorno coordenado —que seguimos llamando U_x—, con coordenadas $v_1, \ldots, v_n$, tales que

$$< X_1, \ldots, X_{r-1} > = < \frac{\partial}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_{r-1}} >,$$

y se sigue fácilmente que para $i = 1, \ldots, r-1$

$$\left[\frac{\partial}{\partial v_i}, X_r\right] \in < X_1, \ldots, X_{r-1} >,$$

y si $X_r = \sum f_j \partial v_j$,

$$\left[\frac{\partial}{\partial v_i}, X_r\right] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial v_i} \frac{\partial}{\partial v_j} \in < \frac{\partial}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_{r-1}} >,$$

de donde se sigue que para $i = 1, \ldots, r-1$ y $j = r, \ldots, n$,

$$\frac{\partial f_j}{\partial v_i} = 0,$$

por tanto $f_j = f_j(v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ y para

$$X_r = f_1 \frac{\partial}{\partial v_1} + \cdots + f_{r-1} \frac{\partial}{\partial v_{r-1}} + Y,$$

tendremos que

$$\Delta(U_x) = < X_1, \ldots, X_r > = < \frac{\partial}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_{r-1}}, Y >,$$

y como Y solo depende de las coordenadas $v_r, \ldots, v_n$ y es no singular, podemos encontrar, por el teorema de clasificación de campos no singulares, un sistema de coordenadas

$$u_1 = v_1, \ldots, u_{r-1} = v_{r-1}, u_r, \ldots, u_n,$$

en un entorno de x, que seguimos llamando U_x, en el que

$$\frac{\partial}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial v_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial u_{r-1}} = \frac{\partial}{\partial v_{r-1}}, \ Y = \frac{\partial}{\partial u_r}$$

de donde se sigue el resultado puesto que

$$\Delta(U_x) = < \frac{\partial}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_{r-1}}, Y > = < \frac{\partial}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_r} > . \quad \blacksquare$$

6.11. Ejercicios resueltos

Ejercicio 6.2.1.- Sean $\mathcal{P}(V)$ los módulos que define un sistema de Pfaff $\mathcal{P}_x$ en $\mathcal{V}$. Demostrar:

1. Los $\mathcal{P}(V)$ son haz de módulos.
2. Para cada $x \in \mathcal{V}$ y cada abierto V tal que $x \in V \subset U$,

$$\mathcal{P}_x = \{\omega_x \in T_x^*(\mathcal{V}) : \omega \in \mathcal{P}(V)\}.$$

Indicación. b) Esto se demuestra fácilmente en el entorno U_x de x de la definición, luego extendemos la 1–forma a todo $\mathcal{V}$ multiplicándola por una función que en x valga 1 y 0 fuera de U_x. ∎

Ejercicio 6.2.2.- Para cada punto $p \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ consideremos la recta Δ_p que pasa por p y su dirección es la de la bisectriz del ángulo formado por el semieje positivo de x y la semirrecta que une p con el origen. Demostrar que Δ_p es una distribución.

Demostración. La distribución podemos definirla de dos formas: una por la "suma" de los vectores (x, y) y $(\sqrt{x^2+y^2}, 0)$ y otra por la perpendicular a su resta. Por tanto por el campo

$$D = (\sqrt{x^2+y^2} + x)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$

en el abierto A complementario de la semirrecta $S_- = \{x < 0, y = 0\}$, en la que D se anula y por el campo

$$D' = y\frac{\partial}{\partial x} + (\sqrt{x^2+y^2} - x)\frac{\partial}{\partial y},$$

en el abierto B complementario de la semirrecta $S_+ = \{x > 0, y = 0\}$, en la que D' se anula.

Observemos que en S_- la distribución está generada por el campo ∂y y como la función $f(x, y) = x + \sqrt{x^2+y^2}$ se anula en S_-, existe una función diferenciable $h(x, y)$ en $V = \{x < 0\}$, tal que $f = yh$, pues para $g(t) = f(x, ty)$,

$$f(x,y) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt = \int_0^1 y f_y(x, ty)dt$$
$$= y\int_0^1 f_y(x, ty)dt = yh(x, y),$$

pero además como $f_y(x, y) = y/\sqrt{x^2+y^2}$, tendremos que $f_y(x, 0) = 0$, por tanto $h(x, 0) = 0$. Por tanto en $\{x < 0, y \neq 0\}$, D, D' y el campo

$$E = h(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

son proporcionales y en $\{x < 0, y = 0\}$, $E = \partial y$. ∎

Ejercicio 6.4.1.- Sea $F\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ diferenciable, $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ y $E \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ tales que $F_* D_x = E_{F(x)}$ para cada $x \in \mathcal{V}$. Entonces para cada $T \in \mathcal{T}^0_p(\mathcal{U})$

$$D^L(F^*T) = F^*(E^L T) \qquad \text{y} \qquad D \in \mathcal{D}^F \quad \Rightarrow \quad D^L(F^*T) = 0.$$

Ind. $F_* D_x = E_{F(x)}$ equivale a que si τ_t es el grupo uniparamétrico de D y σ_t el de E, entonces $F \circ \tau_t = \sigma_t \circ F$ en el abierto $U_t = \{p :\ (t,p) \in \mathcal{W}_D\}$. Por tanto para cada campo tensorial $T \in \mathcal{T}^0_p(\mathcal{U})$

$$\begin{aligned} D^L(F^*T) &= \lim_{t\to 0} \frac{\tau_t^*[F^*T] - F^*T}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{F^*[\sigma_t^* T] - F^*T}{t} = F^*[E^L T]. \end{aligned}$$ ∎

Ejercicio 6.5.3.- Dada la forma de volumen y la métrica habitual en $\mathbb{R}^3$

$$\omega_3 = dx \wedge dy \wedge dz\ , \qquad g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz,$$

definimos el *rotacional* de $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $R = \operatorname{rot} D$, como el único campo tal que

$$i_R \omega_3 = d(i_D g).$$

a) Demostrar que $R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ y dar sus componentes en función de las de D.

b) Demuestra que existe una familia de superficies a las que D atraviesa perpendicularmente si y sólo si D y R son perpendiculares.

Ind. Sea $D = \sum f_i \partial x_i$, entonces $\omega = i_D g = \sum f_i dx_i$ y como $\omega_3 \wedge \omega = 0$ pues es una cuatro forma en $\mathbb{R}^3$

$$d\omega \wedge \omega = (i_R \omega_3) \wedge \omega = \omega_3 \wedge (i_R \omega) = (d \cdot R)\omega_3,$$

y por el teorema de Frobenius $< \omega >$ es totalmente integrable (lo cual significa que tiene superficies integrales, a las que D atraviesa perpendicularmente) sii $D \cdot R = 0$.

Ejercicio 6.5.4.- Demostrar que tienen solución y encontrarla, los sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\left.\begin{aligned} z_x &= x^2 y, \\ z_y &= \tfrac{z}{y}, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} z_x &= \tfrac{3z}{x} + \tfrac{2x^3}{x+y}, \\ z_y &= \tfrac{2x^3}{x+y}, \end{aligned}\right\}$$

Ind. Para el primero: Consideremos $\omega = dz - x^2 y dx - (z/y)dy$, entonces $d\omega \wedge \omega = 0$, por lo que $\mathcal{P} =< \omega >$ es totalmente integrable, lo cual implica que existe una función u tal que $\mathcal{P} =< du >$ y por tanto que ω es proporcional a una exacta. Dividiendo ω por y tenemos que

$$\frac{1}{y} dz - x^2 dx - (z/y^2) dy = d\left[\frac{z}{y} - \frac{x^3}{3}\right],$$

por tanto las soluciones son para cada constante $a \in \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{y x^3}{3} + ay.$$

Para el segundo la solución es $z = x^3 \log(x+y)^2 + c$. ∎

Ejercicio 6.5.7.- Dados dos puntos a y b fijos en el espacio, para cada $p \in \mathbb{R}^3 - \{a, b\}$ consideremos el plano Δ_p que lo contiene y es bisectriz de los segmentos pa y pb, es decir es perpendicular a su plano y lo corta en la bisectriz. Demostrar que Δ_p es una distribución totalmente integrable e integrarla.

Solución. Consideremos un sistema de coordenadas en los que el origen es el punto medio de ab y $a = (1, 0, 0)$ y $b = (-1, 0, 0)$, entonces la diferencia de los vectores $(p - a)/\|p - a\|$ y $(p - b)/\|p - b\|$ es normal al plano que pasa por $p = (x, y, z)$, por tanto el plano está definido (llamando $r = \|p - a\| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ y $s = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$) por la 1–forma

$$\left(\frac{x-1}{r} - \frac{x+1}{s}\right) dx + \left(\frac{y}{r} - \frac{y}{s}\right) dy + \left(\frac{z}{r} - \frac{z}{s}\right) dz,$$

la cual es exacta y es la diferencial de la función diferencia de distancias de p a a y b,

$$r - s = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}.$$

por tanto las superficies solución son los hiperboloides de revolución, con focos en a y b. ∎

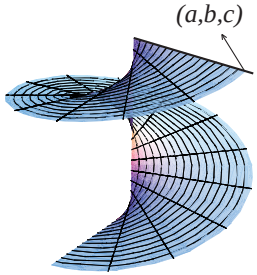


Figura 6.25. Helicoide, $z = \theta$.

Ejercicio 6.5.8.- Para cada $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{x = 0, y = 0\}$, consideremos el plano Δ_p que contiene a los puntos $p = (x, y, z)$ y $(0, 0, z)$ y la pendiente de su normal es una función $f(\rho)$, siendo ρ la distancia de p al eje z. ¿Para que funciones f la distribución es totalmente integrable?. Para esas funciones encontrar las superficies solución.

Solución. El sistema de Pfaff está generado por $\omega = -ydx + xdy + g(\rho)dz$, para $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $g(\rho) = \rho f(\rho)$, pues el vector normal $N = (a, b, c)$ es ortogonal a $(x, y, 0)$ por tanto podemos tomar $a = -y$ y $b = x$; y tiene pendiente $c/\sqrt{a^2 + b^2} = f(\rho)$, por tanto $c = \rho f(\rho)$. Se tiene que

$$d\omega = 2dx \wedge dy + g'(\rho)d\rho \wedge dz,$$

y como $x\rho_x + y\rho_y = \rho$, se demuestra que $d\omega \wedge \omega = 0$ sii $2g(\rho) = \rho g'(\rho)$, es decir $g = k\rho^2$ y $f = k\rho$. En tal caso ω es proporcional a

$$\frac{-ydx + xdy}{\rho^2} + kdz = d(\theta + kz),$$

pues derivando $x = \rho\cos\theta$ respecto de y e $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$ respecto de x y sabiendo que $\rho_x = x/\rho$, $\rho_y = y/\rho$, obtenemos fácilmente que $\theta_y = x/\rho^2$, $\theta_x = -y/\rho^2$; y las soluciones son los helicoides $z = a\theta + b$, para $a, b \in \mathbb{R}$. ∎

Ejercicio 6.5.9.- Consideremos en el espacio (sin los planos coordenados), la familia de curvas $y = ax$, $z = by^2$, parametrizadas por a y b; y en cada punto p el plano perpendicular a la curva que pasa por p. Demostrar que esta distribución es involutiva e integrarla.

Ind. El campo D tangente a las curvas verifica $D(y/x) = D(y^2/z) = 0$, por tanto es proporcional a $x\partial_x + y\partial_y + 2z\partial_z$ y la distribución es $xdx + ydy + 2zdz$. ∎

Ejercicio 6.5.10.- Demostrar que un sistema de Pfaff de rango 1 en $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{P} =< \omega >$, cuyo sistema característico $\mathcal{D}[\mathcal{P}]$ tiene un campo D, es totalmente integrable.

Demostración. $d\omega\wedge\omega$ es una tres forma en dimensión 3 y la contracción $i_D(d\omega\wedge\omega) = 0$, por tanto $d\omega \wedge \omega = 0$.

Otra forma: $\Delta = \mathcal{P}^0$ es de rango 2 y es involutiva pues $D^L\Delta \subset \Delta$. ∎

Ejercicio 6.5.12.- Demostrar que la uno–forma

$$\omega = z(z + y^2)dx + z(z + x^2)dy - xy(x + y)dz,$$

es totalmente integrable e integrarla por el método de Natani.

Demostración. Consideremos $y =$ cte y resolvamos la ecuación en el plano

$$\begin{aligned} z(z + y^2)dx - xy(x + y)dz = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{y^2}{xy(x + y)}dx - \frac{y^2}{z(z + y^2)}dz = 0 \\ &\Rightarrow \quad \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x + y}\right]dx - \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z + y^2}\right]dz = 0, \end{aligned}$$

y para cada superficie solución S existe una constante $k(y, S)$ tal que la superficie viene definida por la ecuación

$$\frac{x(z + y^2)}{z(x + y)} = k(y, S),$$

que en $x = 1$ es la curva

$$\frac{z + y^2}{z(1 + y)} = k(y, S).$$

Ahora consideramos $x = 1$ y resolvemos la ecuación

$$z(z + 1)dy - y(1 + y)dz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y(1 + y)} - \frac{dz}{z(z + 1)} = 0,$$

la cual tiene solución

$$\log\frac{y}{y + 1} - \log\frac{z}{z + 1} = cte \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y(z + 1)}{z(y + 1)} = a_s,$$

ahora esta curva debe coincidir con

$$\frac{z + y^2}{z(1 + y)} = k(y, S).$$

y despejando en la primera la $z = y/(a_s(y + 1) - y)$ se obtiene que

$$k(y, S) = 1 + y(a_s - 1) = 1 + yb_s,$$

luego las superficies solución son para cada constante $b \in \mathbb{R}$

$$\frac{x(z+y^2)}{z(x+y)} = 1 + yb. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 6.5.13.- Demostrar que la uno–forma

$$\omega = yz(z+y)dx + zx(z+x)dy + xy(x+y)dz,$$

es totalmente integrable e integrarla.

Solución. Como $P = yz(z+y), Q = zx(z+x), R = xy(x+y)$, tenemos para $u_1 = x/z$ y $u_2 = y/z$

$$\begin{aligned} f &= \frac{P(u_1,u_2,1)}{u_1P(u_1,u_2,1) + u_2Q(u_1,u_2,1) + R(u_1,u_2,1)} = \frac{1+u_2}{2u_1(1+u_1+u_2)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{1+u_2+u_1}\right) \\ g &= \frac{Q(u_1,u_2,1)}{u_1P(u_1,u_2,1) + u_2Q(u_1,u_2,1) + R(u_1,u_2,1)} = \frac{1+u_1}{2u_2(1+u_1+u_2)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{1+u_2+u_1}\right) \end{aligned}$$

y se tiene que es totalmente integrable pues $g_{u_1} = f_{u_2}$, además para $u_3 = \log z$

$$2(f du_1 + g du_2 + du_3) = d(\log \frac{u_1u_2z^2}{1+u_1+u_2}) = d(\log \frac{xyz}{x+y+z}),$$

por tanto las soluciones son $xyz = (x+y+z)\cdot$ cte. $\blacksquare$

Ejercicio 6.5.14.- Demostrar que si $\omega = \sum f_i dx_i \in \Omega(\mathbb{R}^3)$ es homogénea y $\sum f_i x_i = 0$, entonces $< \omega >$ es totalmente integrable.

Ind. $\omega H = 0$ y $H^L\omega = k\omega$, por tanto $d\omega \wedge \omega = 0$, ya que es una tres forma con radical (H), pues $i_H(d\omega \wedge \omega) = i_H d\omega \wedge \omega = H^L\omega \wedge \omega = 0$, en dimensión 3. $\blacksquare$

Ejercicio 6.8.1.- Sea $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$–espacio vectorial finito dimensional y $G\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathbb{R}$ bilineal y hemisimétrica. Demostrar que:

i) Si $\mathcal{E}$ tiene dimensión impar entonces el

$$\operatorname{rad} G = \{x \in \mathcal{E} :\ G(x,y) = 0,\ \forall y \in \mathcal{E}\} \neq \{0\}.$$

ii) El radical de G tiene dimensión par (o impar) si y sólo si la tiene $\mathcal{E}$.

iii) El rango de toda matriz hemisimétrica es par.

iv) Si $\mathcal{H}$ es un hiperplano de $\mathcal{E}$ y $\bar{G}$ es la restricción de G a $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{rad} G = \{0\} \quad &\Rightarrow \quad \operatorname{rad} \bar{G} \ \text{ es unidimensional} \\ \operatorname{rad} G =< e > \quad &\Rightarrow \quad \operatorname{rad} \bar{G} \ \text{ es nulo ó bidimensional} \end{aligned}$$

Solución. ii) G pasa al cociente

$$G' : \mathcal{E}/\operatorname{rad} G \times \mathcal{E}/\operatorname{rad} G \to \mathbb{R} \qquad G'([x],[y]) = G(x,y),$$

siendo hemisimétrica y sin radical y por (i) $\mathcal{E}/\operatorname{rad} G$ tiene dimensión par.

(iii) Una matriz hemisimétrica A de orden n, define una aplicación bilineal y hemisimétrica en $\mathbb{R}^n$, $G(x,y) = x^t Ay$, siendo el rango de $A = (G(e_i, e_j))$, $\dim \mathcal{E} - \ker A = \dim \mathcal{E} - \dim \operatorname{rad} G$.

(iv) Si $\operatorname{rad} G = \{0\}$ entonces por (ii) $\mathcal{E}$ es de dimensión par, $\mathcal{H}$ impar y $\operatorname{rad} \bar{G}$ impar y no tiene 2 vectores independientes e_1, e_2, pues considerando cualquier $v \notin \mathcal{H}$, el hiperplano $\mathcal{S} = \{G(v,-) = 0\}$ se cortará en al menos un vector e con el plano $< e_1, e_2 >$, y estará en $\operatorname{rad} G$, pues por ser $e \in < e_1, e_2 >$, $G(e, \mathcal{H}) = 0$ y por otra parte $G(e,v) = 0$, lo cual es absurdo. En el segundo caso $\operatorname{rad} \bar{G}$ es par y no tiene 3 vectores independientes e_1, e_2, e_3, pues considerando cualquier $v \notin \mathcal{H}$, el hiperplano $\mathcal{S} = \{G(v,-) = 0\}$ se cortará en al menos un vector con el plano $< e_1, e_2 >$, y como antes estará en $\operatorname{rad} G =< e >$ por tanto $e \in < e_1, e_2 >$, pero el mismo razonamiento prueba que $e \in < e_1, e_3 >$, lo cual es absurdo. ∎

Ejercicio 6.9.4.- Demostrar que las cónicas $\rho = ex + 1$ y $\rho = ex + p$ son homotéticas de razón p.

Indicación. Un punto (x,y) satisface la primera ecuación sii (px, py) satisface la segunda. ∎

Ejercicio 6.9.5.- Demostrar que en una elipse la suma de distancias de cada punto a los focos es constante.

Indicación. Consideremos la ecuación de la elipse $\rho = ex + p$ para la que el origen es un foco y recordemos que la curva $\rho = p - ex$ es $\rho = p + ex$ girada un ángulo π y además es su reflexión respecto del eje y. Se sigue que las distancias de un punto (x,y) a cada uno de los focos son

$$\rho_1 = ex + p, \quad \rho_2 = -e(x - 2c) + p,$$

y su suma es $\rho_1 + \rho_2 = 2(p + ec) = 2a$. ∎

Ejercicio 6.9.6.- Cortamos un cono de base circular con un plano y proyectamos la curva intersección a un plano perpendicular al eje del cono. Demostrar que la curva es una cónica con foco en el eje del cono.

Indicación. Veámoslo para un cono recto con eje el eje z y para el plano que pasa por el vértice. Sea el cono $x^2 + y^2 = z^2$, es decir $\rho = z$ y elijamos los otros dos ejes para que el plano de corte sea $z = ex + p$, la proyección satisface $\rho = ex + p$. ∎

Ejercicio 6.9.7.- Dado un punto P de una elipse, consideremos el punto Q corte del semieje mayor y la normal a la elipse por P. Demostrar que para F un foco, FQ/FP es constante y es la excentricidad.

Indicación. Consideremos la ecuación de la elipse $\rho = ex + p$ para la que el origen es un foco. Las componentes del vector normal $N = (\rho_x - e, \rho_y)$, en $P = (x,y)$ las obtenemos diferenciando $\rho - ex - p$. Ahora buscamos λ tal que $P + \lambda N = (a, 0)$, es decir $y + \lambda \rho_y = 0$, por tanto $y + \lambda y/\rho = 0$, por tanto $\lambda = -\rho$ y $a = x + \lambda(\rho_x - e) = e\rho$, por lo tanto $FQ/FP = a/\rho = e$. ∎

Ejercicio 6.9.8.- Consideremos en cada punto P de $\mathbb{R}^2$ la recta cuya perpendicular por P corta al eje x en un punto Q, tales que es constante $|Q|/|P| = e$. Encontrar las curvas tangentes. ¿Qué interpretación tiene e?.

Indicación. Sea $fdx + gdy = 0$ la ecuación de las rectas, por tanto la recta normal por $P = (x, y)$ es $(x, y) + \lambda(f, g)$ y Q es el correspondiente a $y + \lambda g = 0$, es decir $\lambda = -y/g$, por tanto $Q = (a, 0)$ para $a = x + \lambda f = x - yf/g$ y por tanto la propiedad del enunciado es

$$x - y\frac{f}{g} = e\rho \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f}{g} = \frac{x - e\rho}{y},$$

y la 1–forma es proporcional a

$$\frac{x - e\rho}{\rho}dx + \frac{y}{\rho}dy = d(\rho - ex),$$

y las curvas solución son $\rho = ex + p$, que son las cónicas con foco en el origen y excentricidad e. ∎

Ejercicio 6.9.9.- Suponiendo que una masa M esté en reposo, demostrar que la velocidad inicial que debe tener un satélite que está a una distancia r de M, para que su órbita sea circular es, $\sqrt{GM/r}$.

Indicación. La órbita de cualquier masa sigue una cónica $\rho = ex+p$, de excentricidad constante $e = \sqrt{1 + 2E(w/k)^2} = \sqrt{1 + 2Ep/k}$, siendo $k = GM$, $E = v^2/2 - k/\rho$ la energía y $p = w^2/k$, con $w = -y'x + x'y$ constante (dada por el momento angular). Ahora esta órbita es una circunferencia sii la excentricidad $e = 0$, lo cual implica que $\rho = p$ es constante y vale r, y que $1 + 2Er/k = 0$, por tanto $E = -k/2r = v^2/2 - k/r$ y despejando

$$v = \sqrt{\frac{k}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad ∎$$

Ejercicio 6.9.10.- Sabiendo que para la Tierra, $GM = 398\,600,4418\ \frac{\text{km}^3}{\text{seg}^2}$ (ver la pág.48), calcular a que altura debemos poner un satélite para que sea geoestacionario, es decir se mueva como si estuviera unido rígidamente a la Tierra.

Indicación. Una masa unida rígidamente a la Tierra girará en círculos con centro en su proyección en el eje de la Tierra, por lo tanto la única posibilidad de esta trayectoria, con centro en el centro de la Tierra, se da sobre el Ecuador[13]. Por otra parte si sigue una órbita circular, se sigue del ejercicio (6.9.9) que su velocidad v es tal que $rv^2 = GM$. Por otra parte la tierra en 24 horas gira un poco mas de 2π, pues después de 365 dias da 366 vueltas completas[14] (una más porque ha dado una vuelta alrededor del sol), por lo que el tiempo que tarda en dar una vuelta es

$$t = \frac{365}{366}\,24\text{ h} = 23,9344^h = 23^h 56^m 4^s,$$

[13]Esto es un problema para países que no están sobre el Ecuador. Por ejemplo Rusia utiliza satélites que siguen la llamada *órbita Molniya*, un tipo de órbita muy elíptica con una inclinación de $63,4°$ que giran en elipses que tienen el apogeo (en el que el satélite va muy lento) en una zona de la tierra y el perigeo (en el que va rápido) en sus antípodas. Los Estados Unidos también usan este tipo de órbitas por ejemplo con los *Satellite Data System (SDS)* que son satélites de comunicación militares, que tienen el apogeo a unos 39 000 km sobre el polo norte y el perigeo a 300 km, lo que les permite comunicarse durante largo tiempo con estaciones polares con las que los satélites geoestacionarios no pueden contactar.

[14]En el que la Osa mayor, por ejemplo, vuelve a estar en el mismo lugar del cielo.

y a distancia r su velocidad es $v = r\frac{2\pi}{t}$, en definitiva

$$rv^2 = r\frac{4\pi^2 r^2}{t^2} = GM \quad \Rightarrow \quad r = \left(\frac{G\cdot M\cdot (23,9344\cdot 3\,600 \text{ seg})^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 42\,164 \text{ km}.$$

Ahora teniendo en cuenta que el radio de la tierra en el ecuador es de 6 378 km, tendremos que la altura buscada es aproximadamente 35 786 km. ∎

Ejercicio 6.9.11.- Demostrar el recíproco del Teorema de la Hodógrafa (6.63), es decir que si una trayectoria r (de una masa que se mueve debido a una fuerza central, es decir $r'' \sim r$) tiene hodógrafa que es una circunferencia, entonces r es una cónica con la fuente de atracción en el foco.

Indicación. Consideremos que la circunferencia es de radio R y está centrada en $(0,-c)$. Ahora si denotamos $r(t) = (x(t), y(t))$, como la recta tangente a la circunferencia en $r'(t) = (0,-c) + R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, tiene la dirección de $r(t)$, pues $r'' \sim r$, y como esa dirección es $(\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta)$, tendremos que $x(t) = \rho\operatorname{sen}\theta$, $y(t) = -\rho\cos\theta$ y por tanto

$$x'(t) = -R\frac{y}{\rho}, \qquad y'(t) = -c + R\frac{x}{\rho},$$

que define la ecuación diferencial

$$(-c + R\frac{x}{\rho})dx + R\frac{y}{\rho}dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(R\rho - cx) = 0,$$

la cual tiene solución $\rho = (c/R)x + p$, que es la ecuación de una cónica con foco en el origen. ∎

6.12. Bibliografía y comentarios

En la composición del tema hemos utilizado los siguientes libros:

Boothby, W,M.: "*An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*". Ac Press, 1975.

Muñoz Diaz, J.: "*Ecuaciones diferenciales (I)*". Ed. Univ. Salamanca, 1982.

Warner, Frank W.: "*Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*". Scott, Foresman and Company, 1971.

El último para demostrar (6.80), pág.431. Para ver el método de Natani así como una gran colección de ejemplos y ejercicios remitimos al lector al libro

Sneddon, I.: "*Elements of partial differential equations*". McGraw–Hill, 1981.

en él que también se encuentra (ver la pág.39) una aplicación de los sistemas de Pfaff a la Termodinámica, en la que sigue la formulación de Constantin Caratheodory (*1873–1950*), el cual demuestra que un sistema de Pfaff de rango 1 es totalmente integrable sii en cada entorno de cada punto x hay puntos que no son accesibles por curvas que partan de x tangentes al sistema, lo que le permite enunciar el **segundo principio de la termodinámica** de la siguiente forma:

"Arbitrariamente cerca de cada estado inicial prescrito, hay estados que no pueden ser alcanzados desde el inicial, como resultado de un proceso adiabático".

donde adiabático significa que ni se gana ni se pierde calor, es decir tangente a $< \omega_Q >$. Nosotros hemos elaborado esa lección siguiendo el trabajo de

Garcia, P. y Cid, L.: "*Termodinámica y formas diferenciales*". Anales de la Real Soc.Esp. de Fis. y Quim., Tomo LXIV, p.325, Núms.11 y 12, Nov–Dic, 1968.

Otro libro que hemos utilizado en el ejemplo de la transformación simplética, (ver la pág.391), y que recomendamos al lector es

Levi, Mark: "*The Mathematical Mechanic: Using Physical Reasoning to Solve Problems*". Princeton Univ. Press, 2009.

Arquímedes nació en Siracusa (colonia griega de la costa de la isla de Sicilia) en el año *287* AC, y murió en ella en el *212* AC, tras un largo asedio al que fue sometida por las tropas del general romano Marcelo. Está históricamente documentado que Arquímedes ayudó en la defensa de su ciudad con inventos como la catapulta, lo que no lo está y forma

parte de la leyenda de este extraordinario hombre, fue la utilización, en dicha defensa, de un sistema de espejos que reflejaban la luz del sol sobre un barco enemigo, provocando su incendio. Es sorprendente, pero se han hecho diversos experimentos para comprobar la verosimilitud de este fenómeno y es posible. Lo interesante para nosotros es que la colocación de estos espejos lo podemos entender como un ejemplo práctico de distribución (ver el ejercicio (6.5.6), pág.365), que además es integrable y las superficies tangentes son paraboloides, con el barco en el foco y el eje en la dirección barco–sol. Las antenas parabólicas emplean esta propiedad (con el satélite emisor en vez del sol), como también la empleaban los faros de los coches del pasado siglo XX, pero utilizada al revés, la luz de una bombilla, situada en el foco de un espejo parabólico, se reflejaba en un haz de rayos paralelos que iluminaba el exterior. Los faros de ahora parece que tienen muchos pequeños espejos.

En cuanto al término *sistema de Pfaff*, se acuñó en honor al matemático alemán Johann Friedrich Pfaff (*1765–1825*), quién propuso el primer método general de integración de una ecuación en derivadas parciales de primer orden (del **T.9**, pág.350 de la *Enciclopaedia Britannica*). En su trabajo mas importante sobre formas de Pfaff, que publicó en la Academia de Berlín en 1815, Pfaff asociaba a una ecuación en derivadas parciales de primer orden una ecuación diferencial (remitimos al lector al tema siguiente en el que estudiaremos esta cuestión). Esta ecuación diferencial es fundamental para la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden y es posiblemente la mayor contribución de Pfaff a las matemáticas, sin embargo y aunque Gauss escribió una reseña muy positiva del trabajo poco después de su publicación, su importancia no fue reconocida hasta 1827 cuando Jacobi publicó un trabajo sobre el método de Pfaff.

La demostración del **Teorema de la Proyección**, así como el de Frobenius como consecuencia del de la proyección, la hemos recibido del Profesor Juan Sancho Guimerá de forma indirecta a través de sus discípulos Juan Sancho de Salas y Juan Antonio Navarro González, a los que agradecemos su inestimable ayuda en la confección de este tema en particular y de todos en general.

Por último, siguiendo el

Goldstein, H.: "*Classical Mechanics*". Addison–Wesley Pub. Co., 1980.

el vector que hemos llamado de LaPlace–Runge–Lenz, aparece por primera vez en la obra de *1799*

Laplace, P.S.: "*Celestial mechanics*". Paris, 1799.

En *1845* Hamilton lo redescubre. En *1900* Gibbs lo describe en lenguaje vectorial. En *1920* Runge hace lo mismo en un texto en alemán sobre análisis vectorial y en *1924* Lenz lo utiliza en un trabajo sobre el átomo de Hidrógeno en el contexto de mecánica cuántica.

Fin del Tema 6

Tema 7

Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

7.1. Definición clásica

En este tema seguimos estudiando cuestiones de naturaleza local por ello aunque en general los dominios de definición de funciones, campos tangentes, 1–formas, etc., cambien a medida que construyamos la teoría, nosotros mantendremos la notación de tales dominios.

Notación. Usaremos la siguiente notación: U_m es un abierto conexo de $\mathbb{R}^m$. En $\mathbb{R}^{2n+1}$ consideramos las coordenadas

$$(x_1, \ldots, x_n, z, z_1, \ldots, z_n),$$

y las proyecciones y abiertos correspondientes

$$\begin{aligned} \pi_{n+1} = (x_1, \ldots, x_n, z) \colon U_{2n+1} &\longrightarrow U_{n+1} = \pi_{n+1}(U_{2n+1}), \\ \pi_n = (x_1, \ldots, x_n) \colon U_{2n+1} &\longrightarrow U_n = \pi_n(U_{2n+1}). \end{aligned}$$

Definición. Desde un punto de vista clásico entenderemos por *ecuación en derivadas parciales (EDP) de primer orden*, una "*expresión del tipo*"

$$F(x_1,\dots,x_n,z,\frac{\partial z}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial z}{\partial x_n})=0, \tag{7.1}$$

donde $F\in\mathcal{C}^\infty(U_{2n+1})$ es tal que la $dF\neq 0$.

Por una *solución clásica* de la ecuación, entenderemos en general una función $f\in\mathcal{C}^\infty(U)$ tal que para cada $x\in U$, con coordenadas $x_1,\dots,x_n$, verifique

$$F(x,f(x),\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x))=0.$$

Sin embargo tal solución f define con su gráfica la subvariedad n–dimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\{z=f(x)\}=\{(x_1,\dots,x_n,z)\in U_{n+1}:\ z=f(x_1,\dots,x_n)\},$$

lo cual nos induce a ampliar la definición de solución de la siguiente manera.

Definición. Diremos que una subvariedad n–dimensional $S\subset U_{n+1}$ es una *solución* de la EDP de primer orden definida por una función F, si toda función f, en un abierto de U, cuya gráfica esté en S, es solución de (7.1).

Ejercicio 7.1.1 Demostrar que las esferas $x^2+y^2+z^2=r^2$ son subvariedades solución de la EDP

$$yzz_x+xzz_y+2xy=0.$$

Ejercicio 7.1.2 Demostrar que si $\{z=z(x,y)\}$ es una superficie de revolución con eje pasando por el origen del espacio, entonces

$$\begin{vmatrix} u & v & w\\ u_x & v_x & w_x\\ u_y & v_y & w_y\end{vmatrix}=0$$

para $u=-y-zz_y$, $v=x+zz_x$, $w=xz_y-yz_x$.

Ejercicio 7.1.3 Sean P, Q y R funciones de (x,y) y $Pdx^2+Qdxdy+Rdy^2=0$ la ecuación[1] de la proyección al plano $z=0$, de una red de curvas de una superficie $u=0$ de $\mathbb{R}^3$. Demostrar que las curvas son perpendiculares sii

$$P(u_y^2+u_z^2)-Qu_xu_y+R(u_x^2+u_z^2)=0.$$

[1]Esta notación debe entenderse del siguiente modo: dx y dy son en cada punto funciones lineales del espacio tangente y dx^2 es el cuadrado de la función lineal, por tanto la expresión de la izquierda en cada punto es un polinomio.

Ejercicio 7.1.4 Encontrar las superficies formadas por rectas paralelas al plano $z = 0$ que se apoyan en la hipérbola del plano $y = 0$, $xz = 1$, tales que a lo largo de cada recta el plano tangente es constante.

Proposición 7.1 *Sea $\mathcal{S}$ una subvariedad n–dimensional de U_{n+1} tal que para cada $p \in \mathcal{S}$ existe una solución $\mathcal{S}_p$ de la EDP definida por una función F, que verifica $p \in \mathcal{S}_p$ y $T_p(\mathcal{S}) = T_p(\mathcal{S}_p)$, entonces $\mathcal{S}$ también es solución.*

Demostración. Sea $S(f) = \{z = f(x)\} \subseteq \mathcal{S}$, sea $x_0 \in U$, $z_0 = f(x_0)$, $p = (x_0, z_0) \in S(f)$ y $\mathcal{S}_p = \{h = 0\}$ una solución para la que $p \in \mathcal{S}_p$ y $T_p(\mathcal{S}) = T_p(\mathcal{S}_p)$. Entonces como

$$T_p[S(f)] = T_p(\mathcal{S}) = T_p(\mathcal{S}_p),$$

tendremos que $d_p h$ es proporcional a $d_p(z - f(x))$, pues ambas 1–formas tienen el mismo núcleo. Se sigue que $h_z(p) \neq 0$ y por el **Teorema de la función implícita** (1.7), pág.6, existe una función g en un entorno abierto de x_0 en U tal que $g(x_0) = z_0 = f(x_0)$, y

$$\{z = g(x)\} \subseteq \{h = 0\} = S_p,$$

ahora se sigue de la hipótesis que g es solución de (7.1), y por tanto f, pues $d_p(z - f(x))$ y $d_p(z - g(x))$ son proporcionales, por tanto iguales y

$$f(x_0) = g(x_0) \quad \text{y} \quad f_{x_i}(x_0) = g_{x_i}(x_0). \quad \blacksquare$$

7.2. El cono de Monge

En esta lección consideraremos el caso bidimensional ($n = 2$): Sea $F(x, y, z, p, q)$ una función en un abierto $U_5 \subset \mathbb{R}^5$ y consideremos la EDP

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0.$$

En primer lugar observemos que para cada función f y para cada punto (x_0, y_0) los valores

$$f_x(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad f_y(x_0, y_0),$$

determinan el plano tangente a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0, z_0), con $z_0 = f(x_0, y_0)$, cuya ecuación es

$$(x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0) = z - z_0.$$

En estos términos podemos considerar que una EDP define en cada punto (x_0, y_0, z_0) del espacio, una familia de planos

$$(x - x_0)p + (y - y_0)q = z - z_0,$$

donde los (p, q) satisfacen la ecuación

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0,$$

y la cuestión consiste en encontrar gráficas de funciones cuyos planos tangentes estén en esas familias. Ahora bien para cada punto (x_0, y_0, z_0)

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0,$$

es una curva en el plano (p, q) que podemos parametrizar —si F_p ó F_q son no nulas—, y representarla mediante dos funciones de variable real $p(t), q(t)$, tales que

$$F(x_0, y_0, z_0, p(t), q(t)) = 0.$$

Por tanto en cada punto (x_0, y_0, z_0) tenemos una familia uniparamétrica de planos $\pi(t) \equiv \{\pi(t) = 0\}$

$$(x - x_0)p(t) + (y - y_0)q(t) = z - z_0,$$

que en buenas condiciones genera una nueva superficie —la *envolvente*[2] de esta familia— que es un cono formado por las rectas en las que cada plano se corta con el "infinitesimalmente próximo"

$$\lim_{\epsilon \to 0} \pi(t) \cap \pi(t + \epsilon) = \pi(t) \cap \pi'(t),$$

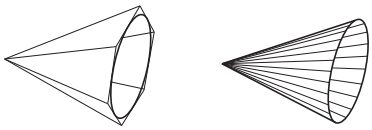


Figura 7.1. Cono de Monge

[2] Ver la lección 7.7, pág.478.

es decir que esta superficie, a la que llamamos *cono de Monge*, está formada por la familia de rectas

$$(x - x_0)p(t) + (y - y_0)q(t) = z - z_0,$$
$$(x - x_0)p'(t) + (y - y_0)q'(t) = 0.$$

Es fácil ver que para cada t, la recta correspondiente tiene vector director con componentes

$$(F_p, F_q, p(t)F_p + q(t)F_q), \tag{7.2}$$

pues es perpendicular a $(p(t), q(t), -1)$ y a $(p'(t), q'(t), 0)$ como se demuestra derivando

$$F(x_0, y_0, z_0, p(t), q(t)) = 0.$$

Hemos visto por tanto que una EDP define en cada punto de $\mathbb{R}^3$ un cono con vértice el punto y que una función f es solución de la EDP si y sólo si para cada (x_0, y_0) de su dominio, $z_0 = f(x_0, y_0)$, $p_0 = f_x(x_0, y_0)$ y $q_0 = f_y(x_0, y_0)$, el plano

$$(x - x_0)p_0 + (y - y_0)q_0 = z - z_0,$$

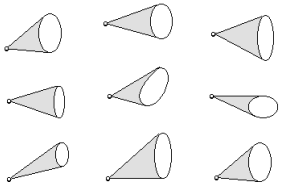


Figura 7.2. Conos de Monge

que es el tangente a la gráfica de f en (x_0, y_0, z_0), es uno de la familia y por tanto (como vemos en el siguiente ejercicio) tangente al cono de Monge.

Ejercicio 7.2.1 Demostrar que cada plano de la familia es tangente al cono.

Consideremos ahora una solución f de la EDP, entonces la subvariedad bidimensional $S(f)$ de $\mathbb{R}^5$ definida por las ecuaciones

$$z = f(x, y), \quad p = f_x(x, y), \quad q = f_y(x, y),$$

está en $\{F = 0\}$. Veremos que esta solución arbitraria f nos va a permitir definir un campo $D \in \mathcal{D}(U_5)$, que no depende de f, sino únicamente de la EDP, es decir de F, y que no obstante es tangente a la subvariedad $S(f)$: Consideremos un punto $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ de $S(f)$, por tanto

$$z_0 = f(x_0, y_0), \quad p_0 = f_x(x_0, y_0), \quad q_0 = f_y(x_0, y_0).$$

¿Hay algún vector tangente privilegiado de $\mathbb{R}^5$, en ese punto?.

Consideremos en primer lugar su proyección (x_0, y_0, z_0) en $\mathbb{R}^3$, ¿hay algún vector en $\mathbb{R}^3$ privilegiado en ese punto?.

La contestación es que sí, el vector director[3] de la recta común al plano tangente y al cono de MONGE, el cual vimos en (7.2) que tiene componentes

$$Dx = F_p, \quad Dy = F_q, \quad Dz = p_0F_p + q_0F_q,$$

y es tangente a $\{z = f(x,y)\}$. Esta construcción nos define un vector tangente a esta superficie en cada punto de la superficie, es decir un campo tangente a la superficie. Sus curvas integrales se llaman *curvas características*, las cuales dependen de la solución f considerada. Ahora este vector define el vector tangente a $S(f)$

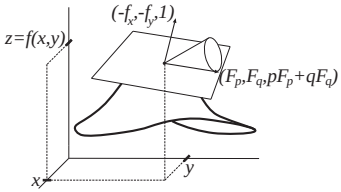


Figura 7.3.

$$\begin{aligned}
Dx &= F_p,\\
Dy &= F_q,\\
Dz &= p_0F_p + q_0F_q,\\
Dp &= D(f_x) = f_{xx}Dx + f_{xy}Dy = f_{xx}F_p + f_{xy}F_q\\
&= -(F_x + p_0F_z),\\
Dq &= D(f_y) = f_{yx}Dx + f_{yy}Dy = f_{yx}F_p + f_{yy}F_q\\
&= -(F_y + q_0F_z),
\end{aligned}$$

como se demuestra derivando respecto de x y respecto de y en

$$F(x, y, f(x,y), f_x(x,y), f_y(x,y)) = 0,$$

y este vector está definido por el llamado *campo característico*

$$D = F_p\frac{\partial}{\partial x} + F_q\frac{\partial}{\partial y} + (pF_p + qF_q)\frac{\partial}{\partial z} - (F_x + pF_z)\frac{\partial}{\partial p} - (F_y + qF_z)\frac{\partial}{\partial q},$$

el cual, aunque es tangente a $S(f)$, no depende de la solución particular f, sino únicamente de F. Por lo que $S(f)$ es una superficie formada por curvas integrales de D y cada solución f se puede construir eligiendo convenientemente unas curvas integrales de D y proyectándolas a $\mathbb{R}^3$. Observemos por último que D es tangente a la hipersuperficie $\{F = 0\}$, pues $DF = 0$.

[3] Realmente no hay un vector sino una recta.

7.3. EDP cuasilineales

Definición. Llamaremos *EDP cuasilineal*, a toda ecuación en derivadas parciales

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0,$$

para una función F afín en las z_i, es decir de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} f_i z_{x_i} = f_{n+1},$$

para las f_i, diferenciables en un abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Nota 7.2 En el caso $n = 2$, es de la forma $f_1 z_x + f_2 z_y = f_3$, con f_1, f_2 y f_3 funciones de (x, y, z). En cuyo caso los planos que definen el cono de Monge pasando por un punto (x, y, z) tienen una recta en común con vector director con componentes (f_1, f_2, f_3), por lo que el cono de Monge es degenerado y se reduce a una recta. En este caso el campo característico

$$F_p \frac{\partial}{\partial x} + F_q \frac{\partial}{\partial y} + (pF_p + qF_q)\frac{\partial}{\partial z} - (F_x + pF_z)\frac{\partial}{\partial p} - (F_y + qF_z)\frac{\partial}{\partial q},$$

en $\{F = 0\}$ se proyecta en el campo de $\mathbb{R}^3$

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + f_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Para resolver una EDP cuasilineal consideramos el campo tangente

$$D = \sum_{1=1}^{n+1} f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde por comodidad llamamos $x_{n+1} = z$, y buscamos una integral primera g suya, $Dg = 0$. En cuyo caso D es tangente a cada subvariedad n–dimensional $\mathcal{S} = \{g = cte\}$, las cuales son subvariedades solución, pues si $\{z = f(x_1, \ldots, x_n)\} \subset \mathcal{S}$, entonces en sus puntos

$$\sum_{i=1}^{n} f_i f_{x_i} = Df = Dz = f_{n+1},$$

y por tanto f es solución.

A continuación analizamos algunos ejemplos extraídos del libro de Zachmanoglou and Thoe.

7.3.1. Ejemplo: Tráfico en una autopista.

Consideremos una autopista que modelamos como una recta, cada uno de sus puntos como un $x \in \mathbb{R}$ y el flujo de coches no como algo discreto sino como el de un fluido continuo, que fluye en la dirección positiva. Denotemos con $0 \leq \rho(x,t) \leq 1$ la densidad de coches —es decir los coches que hay por unidad de longitud, donde por unidad de longitud tomamos la longitud media de los coches—, en el punto x e instante t y con $0 \leq g(x,t)$ el flujo de coches —el número de coches por segundo—, que pasan por x en el instante t.

En tal caso en un tramo $[a,b]$ de la autopista el número de coches que hay en un instante $t+\epsilon$ es, los que había en ese tramo en el instante t mas los que entran durante el intervalo $[t, t+\epsilon]$, menos los que salen durante ese intervalo

$$\int_a^b \rho(x, t+\epsilon)\, dx = \int_a^b \rho(x,t)\, dx + \epsilon g(a,t) - \epsilon g(b,t),$$

y tomando límites cuando $\epsilon \to 0$

$$\int_a^b (\rho_t(x,t) + g_x(x,t))\, dx = 0,$$

y como esto es válido para cualquier intervalo $[a,b]$, tendremos

$$\rho_t(x,t) + g_x(x,t) = 0,$$

ahora simplificamos el problema considerando que g es función de ρ, lo cual no es de extrañar, pues si $\rho = 0$ ó $\rho = 1$ —los casos extremos de densidad de coches—, en el primer caso no hay coches y en el segundo la autopista está llena, en cuyo caso no se mueve ninguno y en ambos casos $g = 0$. La función más simple de dependencia de este tipo es

$$g = \rho(1-\rho),$$

en cuyo caso nuestra ecuación se convierte en

$$\rho_t + (1-2\rho)\rho_x = 0,$$

cuyo campo asociado en las coordenadas (t, x, ρ) es

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + (1 - 2\rho)\frac{\partial}{\partial x},$$

y tiene integrales primeras $u_1 = \rho$ y $u_2 = t(2\rho - 1) + x$ y si buscamos la solución que en $t = 0$ valga $\rho = f(x)$ (cuya existencia y unicidad se verá en la pág.472, ejercicio (7.5.1) ó (7.5.2)), es decir $u_1 = f(u_2)$, basta considerar la integral primera de D, $h = u_1 - f(u_2)$. Ahora $h = 0$ sii $\rho = f(x+t(2\rho-1))$ —la cual es una superficie reglada, pues para $f(x_0) = \rho_0$, contiene a los puntos de la recta (x, t, ρ_0), para $x + t(2\rho_0 - 1) = x_0$—. Además ρ se puede despejar como función de (x, t) si $h_\rho \neq 0$, es decir si

$$1 - 2tf'(x + t(2\rho - 1)) > 0,$$

lo cual es válido en general en un entorno de $t = 0$. Observemos que la desigualdad es válida en todo t si por ejemplo f es decreciente, es decir en el instante inicial decrece a lo largo de la carretera el flujo de coches, en cuyo caso es obvio que debe haber solución ρ diferenciable en todo instante y todo x, es decir los coches fluyen con normalidad. Sin embargo si la densidad en el instante inicial es creciente en un punto $x = x_0$ de la carretera, $f'(x_0) > 0$, entonces en el punto p de la recta $(x, t, \rho_0 = f(x_0))$, para $x + t(2\rho_0 - 1) = x_0$ y el instante $t = t_0$ tal que $1 - 2tf'(x_0) = 0$, es decir $t_0 = 1/2f'(x_0)$, hay colapso pues $h_\rho(p) = 0$, lo cual significa que la presunta solución densidad ρ tendría derivadas parciales infinitas respecto de x y t en la proyección de p.

7.3.2. Ejemplo: Central telefónica.

Consideremos una central telefónica con una colección infinita (numerable) de líneas telefónicas, cada una de las cuales en cada instante de tiempo $t \in [0, \infty)$ puede estar ocupada o no. Denotaremos con $P_n(t)$ la probabilidad de que en el instante t haya exactamente n líneas ocupadas, suponemos conocidas las probabilidades $P_n(0)$, en un instante inicial y lo que queremos es saber el valor de las $P_n(t)$ admitiendo que se satisfacen las siguientes hipótesis:

i) *La probabilidad de que una línea se ocupe en un instante de* $[t, t + \epsilon]$, *con* ϵ *pequeño, es* $\lambda\epsilon + o(\epsilon)$, *para* $\lambda > 0$ *constante.*

ii) *Si una línea está ocupada en el instante* t, *la probabilidad de que se desocupe en un instante de* $[t, t+\epsilon]$, *es* $\mu\epsilon+o(\epsilon)$, *para* $\mu > 0$ *constante.*

iii) *La probabilidad de que haya dos o mas cambios en las líneas (que se ocupen ó desocupen) es* $o(\epsilon)$.

En estas condiciones en el instante $t+\epsilon$ hay n líneas ocupadas en los siguientes casos disjuntos:

a) Durante el intervalo $[t, t+\epsilon]$ hubo más de un cambio. La probabilidad de esto es $o(\epsilon)$.

b) Durante el intervalo $[t, t+\epsilon]$ hubo un sólo cambio (se ocupó una línea) y en el instante t había $n-1$ líneas ocupadas. La probabilidad de esto es

$$P_{n-1}(t)(\lambda\epsilon + o(\epsilon)) = P_{n-1}(t)\lambda\epsilon + o(\epsilon).$$

c) Durante el intervalo $[t, t+\epsilon]$ hubo un sólo cambio (se desocupó una línea) y en el instante t había $n+1$ líneas ocupadas. La probabilidad de esto es

$$P_{n+1}(t)(n+1)(\mu\epsilon + o(\epsilon))(1-\mu\epsilon + o(\epsilon))^n = P_{n+1}(t)(n+1)\mu\epsilon + o(\epsilon)$$

d) Durante el intervalo $[t, t+\epsilon]$ no hubo cambios y en el instante t había n líneas ocupadas. La probabilidad de esto es

$$P_n(t)(1-\lambda\epsilon - n\mu\epsilon - o(\epsilon)).$$

En definitiva la suma de estas cuatro cantidades es $P_n(t+\epsilon)$ y tomando límites cuando $\epsilon \to 0$, tendremos que

$$P_n' = \lambda P_{n-1} - (\lambda + n\mu)P_n + (n+1)\mu P_{n+1},$$

(esto para $n \geq 1$, para $n = 0$ la fórmula es igual tomando $P_{-1} = 0$). Ahora para resolver este sistema infinito de ecuaciones diferenciales, se introduce la llamada *función generatriz de las probabilidades* P_n

$$z(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\, x^n,$$

para la que se tiene

$$z_t = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(t)\, x^n, \quad z_x = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t)\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(t)\, x^n,$$

y considerando las ecuaciones diferenciales anteriores se tiene que z satisface la ecuación cuasi–lineal

$$z_t + \mu(x-1)z_x = \lambda(x-1)z,$$

y si buscamos la solución que satisface $z(0,x)=\sum P_n(0)x^n=g(x)$, (cuya existencia y unicidad se verá en la pág.472, ejercicio (7.5.1) ó (7.5.2)) consideramos el campo en las coordenadas (t,x,z)

$$D=\frac{\partial}{\partial t}+\mu(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(x-1)\lambda z\frac{\partial}{\partial z},$$

y dos integrales primeras

$$u_1=(x-1)\,\mathrm{e}^{-\mu t},\quad u_2=z\,\mathrm{e}^{-(\lambda/\mu)x},$$

y como en $t=0$

$$x=1+u_1,\qquad z=u_2\,\mathrm{e}^{(\lambda/\mu)(1+u_1)},$$

tendremos que la solución es

$$\begin{gathered}u_2\,\mathrm{e}^{(\lambda/\mu)(1+u_1)}=g(1+u_1)\quad\Leftrightarrow\\ z=\exp\{(\lambda/\mu)(-1-u_1+x)\}g[1+(x-1)\,\mathrm{e}^{-\mu t}]\quad\Leftrightarrow\\ z=\exp\{(\lambda/\mu)(x-1)(1-\mathrm{e}^{-\mu t})\}g[1+(x-1)\,\mathrm{e}^{-\mu t}].\end{gathered}$$

Ahora podemos calcular la esperanza, en cada instante t, del número de líneas ocupadas

$$E(t)=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(t)=z_x(t,1)=\frac{\lambda}{\mu}(1-\mathrm{e}^{-\mu t})+E(0)\,\mathrm{e}^{-\mu t},$$

pues $g(1)=\sum_n P_n(0)=1$ y $g'(1)=E(0)$, y sea cual sea la distribución del número de llamadas en el instante inicial y por tanto de su valor medio $E(0)$, se tiene que cuando $t\to\infty$, $E(t)$ tiende a λ/μ.

7.3.3. Ejemplo: El Proceso de Poisson.

En el ejemplo anterior, la ocurrencia o no de un suceso no dependía del instante de tiempo t en el que ocurre pero sí dependía de cuántos sucesos del mismo tipo habían ocurrido hasta ese instante. Hay procesos en los que la ocurrencia o no del suceso no depende de ninguna de estas dos cosas, por ejemplo en los accidentes de coches en un pais, en la desintegración (ó partición) de átomos en una sustancia radiactiva, etc.

Sea $X(t)$ el número de sucesos que han ocurrido en el intervalo de tiempo $[0,t]$, en un proceso del tipo de los considerados anteriormente,

y sea $P_n(t)$ la probabilidad de que $X(t) = n$. Diremos que $X(t)$ es un *Proceso de Poisson* si se verifican las siguientes propiedades:

i) *La probabilidad de que un suceso ocurra durante un pequeño intervalo* $[t, t+\epsilon]$ *no depende del valor de* $X(t)$ *y es* $\lambda\epsilon + o(\epsilon)$, *con* $\lambda > 0$.

ii) *La probabilidad de que dos ó más sucesos ocurran durante el intervalo* $[t, t+\epsilon]$ *no depende del valor de* $X(t)$ *y es* $o(\epsilon)$.

En tal caso se tiene que

$$P_n(t+\epsilon) = (1 - \lambda\epsilon - o(\epsilon))P_n(t) + (\lambda\epsilon + o(\epsilon))P_{n-1}(t) + o(\epsilon),$$

y se verifica el sistema de ecuaciones diferenciales

$$P_n' = -\lambda P_n + \lambda P_{n-1},$$

por tanto la función generatriz $z = \sum P_n(t)x^n$, satisface

$$z_t = -\lambda z + \lambda x z = \lambda(x-1)z,$$

y si consideramos, como es lógico, las condiciones iniciales $P_n(0) = 0$, $P_0(0) = 1$, que corresponde a $z(0, x) = 1$, tendremos que la solución es

$$z(t, x) = \mathrm{e}^{-\lambda t(1-x)} = \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum \frac{(\lambda t x)^n}{n!},$$

y por tanto

$$P_n(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

que es la distribución de Poisson de parámetro λt. Además el valor medio de $X(t)$ es

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{(\lambda t)^n}{n!} = \lambda t\, \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \lambda t.$$

7.3.4. Ejemplo: Procesos de nacimiento y muerte.

Consideremos una población —de bacterias, por ejemplo—, cuyos individuos pueden dividirse o morir, de tal modo que durante un pequeño intervalo de tiempo $[t, t+\epsilon]$, la probabilidad de que haya un cambio, debido a que hay un único individuo que se divide es $\lambda\epsilon + o(\epsilon)$, con $\lambda > 0$; la probabilidad de que haya un cambio, debido a que hay un único individuo que se muere es $\mu\epsilon + o(\epsilon)$, con $\mu > 0$; y la probabilidad de que

haya dos ó más cambios es $o(\epsilon)$. En tal caso si $P_n(t)$ es la probabilidad de que en el instante t haya n individuos en la población, tendremos que

$$\begin{aligned} P_n(t+\epsilon) = P_{n-1}(t)(n-1)(\lambda\epsilon + o(\epsilon)) + \\ + P_n(t)(1 - n\lambda\epsilon - n\mu\epsilon - o(\epsilon)) + \\ + P_{n+1}(n+1)(\mu\epsilon + o(\epsilon)), \end{aligned}$$

por tanto

$$P_n' = \lambda(n-1)P_{n-1} - (\lambda+\mu)nP_n + \mu(n+1)P_{n+1},$$

y para $z = \sum P_n x^n$ la función generatriz se tiene la ecuación cuasi–lineal

$$z_t = \lambda x^2 z_x - (\lambda+\mu)xz_x + \mu z_x,$$

cuyo campo asociado

$$D = \frac{\partial}{\partial t} - (\lambda x - \mu)(x-1)\frac{\partial}{\partial x},$$

tiene integral primera $u_1 = z$ y 1–forma incidente

$$dt + \frac{dx}{(\lambda x - \mu)(x-1)} = \begin{cases} dt + \frac{1}{\mu-\lambda}\left[\frac{\lambda}{\lambda x - \mu} - \frac{1}{x-1}\right]dx, & \text{si } \lambda \neq \mu, \\ dt + \frac{dx}{\lambda(x-1)^2}, & \text{si } \lambda = \mu, \end{cases}$$

por tanto con la integral primera si $\lambda \neq \mu$

$$u_2 = \mathrm{e}^{(\mu-\lambda)t}\,\frac{\lambda x - \mu}{x-1},$$

en cuyo caso si la población tiene m individuos en el instante inicial, por tanto $P_m(0) = 1$ y $z(0,x) = x^m$, como para $t = 0$ es

$$u_2(x-1) = \lambda x - \mu \quad \Rightarrow \quad x = \frac{u_2 - \mu}{u_2 - \lambda},$$

la solución es,

$$z = \left(\frac{u_2-\mu}{u_2-\lambda}\right)^m = \left(\frac{\mathrm{e}^{(\mu-\lambda)t}(\lambda x - \mu) + \mu(1-x)}{\mathrm{e}^{(\mu-\lambda)t}(\lambda x - \mu) + \lambda(1-x)}\right)^m,$$

(cuya existencia y unicidad se verá en la pág.472, ejercicio (7.5.1) ó (7.5.2)) y podemos calcular la esperanza en cada instante de tiempo t

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(t) = z_x(t,1) = m\,\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}.$$

Si $\lambda = \mu$ el campo tiene la integral primera

$$u_2 = \lambda t + \frac{1}{1-x},$$

y para $t = 0$, $x = 1 - \frac{1}{u_2}$, por tanto la solución es

$$z = \left(\frac{u_2 - 1}{u_2}\right)^m = \left(\frac{\lambda t(1-x) + x}{\lambda t(1-x) + 1}\right)^m,$$

y la esperanza $E(t) = m$.

Ejercicio 7.3.1 Encontrar la función $v(t, x)$ del plano, tal que $v(0, x) = f(x)$ y $T^\nabla T = 0$, para la conexión estándar del plano y $T = \partial_t + v(t, x)\partial_x$. Además, dado $x_0 \in \mathbb{R}$ y $v_0 = f(x_0)$, demostrar que dicha solución v existe en un entorno de $(0, x_0)$ y es constante a lo largo de la recta $(t, x_0 + v_0 t)$ (y vale v_0) y que T es constante y tangente a la recta.

Ejercicio 7.3.2 En los siguientes problemas encontrar la solución de la EDP que contiene a la curva correspondiente

$$yzz_x + z_y = 0, \quad \text{que en } y = 0 \text{ pasa por } z^2 = 2x,$$
$$yzz_x + xzz_y + 2xy = 0, \quad \text{que en } z = 0, \text{ pasa por } x^2 + y^2 = 1,$$
$$2y(z-3)z_x + (2x - z)z_y = y(2x - 3), \quad \text{que en } z = 0 \text{ pasa por } x^2 + y^2 = 2x.$$

Ejercicio 7.3.3 Demostrar que las soluciones de la EDP

$$(z + 3y)z_x + 3(z - x)z_y + (x + 3y) = 0,$$

son superficies de revolución de un cierto eje. ¿Qué eje?.

Ejercicio 7.3.4 Caracterizar las EDP cuasilineales $f_1 z_x + f_2 z_y = f_3$, cuyas soluciones sean superficies de revolución de un cierto eje.

Ejercicio 7.3.5 Dada una recta en el espacio encontrar la EDP de las superficies cuya recta normal en cada punto corte a la dada. Resolver la EDP.

Ejercicio 7.3.6 Dado $k \in \mathbb{R}$ encontrar la EDP de las superficies cuya recta normal en cada punto P corte a los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, en tres puntos A, B, C para los que sea constante la razón doble $(P, A, B, C) = k$. Resolver la ecuación y encontrar las cuádricas en forma normal $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, que sean solución.

7.4. Sistema de Pfaff asociado a una EDP

7.4.1. Campo característico.

En esta lección daremos una definición canónica del campo D asociado a una EDP y construido en la lección anterior para el caso bidimensional.

En la primera lección dábamos una definición mas general de solución de la EDP definida por F, en términos de subvariedades n–dimensionales de $\mathbb{R}^{n+1}$. Ahora ampliamos de nuevo esta definición, observando que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, las $n+1$ funciones $v_i \in \mathcal{C}^\infty(U_{2n+1})$ definidas por

$$\begin{aligned} v_0 &= z - f(x_1, \dots, x_n), \\ v_1 &= z_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ v_n &= z_n - \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{7.3}$$

forman, junto con $x_1, \dots, x_n$, un sistemas de coordenadas en U_{2n+1}, por tanto f define la subvariedad n–dimensional de U_{2n+1}

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n(f) &= \{v_0 = 0, v_1 = 0 \dots, v_n = 0\} \\ &= \{z = f(x),\ z_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, z_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\}. \end{aligned}$$

que es difeomorfa, por π_{n+1}, a la subvariedad $\{z = f(x)\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, pues ambas tienen coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$.

Esta subvariedad n–dimensional tiene las siguientes propiedades:

i) Tiene coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$.

ii) Restringiéndonos a ella tenemos que (como $z = f(x_1, \dots, x_n)$)

$$dz = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} z_i dx_i,$$

es decir que en ella se anula la uno–forma de $\mathbb{R}^{2n+1}$

$$\omega = dz - \sum_{i=1}^{n} z_i dx_i,$$

—que es la forma canónica (ver el **Teorema de Darboux**, pág.387), de las 1–formas regulares de clase $2n+1$—. Ahora bien estas dos propiedades la caracterizan como vemos a continuación.

Proposición 7.3 *Sea $\mathcal{S}$ una subvariedad de U_{2n+1} de dimensión n con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ y tal que $\pi_n(\mathcal{S}) = U$. Entonces existe una función f en U tal que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_n(f)$ si y sólo si, para $i\colon \mathcal{S} \hookrightarrow U_{2n+1}$,*

$$i^*\omega = 0.$$

Demostración. $\Leftarrow$.- Por ser $\mathcal{S}$ una variedad diferenciable tendremos que si $x_1, \ldots, x_n$ es un sistema de coordenadas en $\mathcal{S}$, existe $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, tal que $z = f(x_1, \ldots, x_n)$. Ahora bien como $0 = i^*\omega$ tendremos que en $\mathcal{S}$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = dz = \sum_{i=1}^{n} z_i dx_i,$$

y por ser las dx_i independientes $z_i = \partial f/\partial x_i$ y por tanto $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_n(f)$. Ahora dado $q \in \mathcal{S}_n(f)$ con coordenadas (x_i, z, z_i), tendremos que existe $p \in \mathcal{S}$ con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$. Se sigue entonces que p y q tienen las mismas coordenadas en U_{2n+1}, por tanto $p = q$ y $\mathcal{S} = \mathcal{S}_n(f)$. ∎

Por otra parte f es una solución de la EDP (7.1) si y sólo si

$$F[\mathcal{S}_n(f)] = 0,$$

lo cual equivale a decir (para $\mathcal{S}_n(f)$ conexa) que $i^*dF = 0$ y que al menos existe un punto $x \in \mathcal{S}_n(f)$ tal que $F(x) = 0$, pues si $0 = i^*dF = d(i^*F)$, entonces la función i^*F de $\mathcal{S}_n(f)$ es constante y como existe $x \in \mathcal{S}_n(f)$ tal que $F(x) = 0$, tendremos que $i^*F = 0$ y por tanto que f es solución de (7.1).

Nota 7.4 Supondremos que dF y ω son independientes, pues en caso contrario las $F_{z_i} = 0$. Por lo tanto se sigue de los resultados anteriores que dada una EDP definida por una función $F \in \mathcal{C}^\infty(U_{2n+1})$, lo que nos interesa es:

Encontrar las subvariedades $\mathcal{S}_n \subset U_{2n+1}$, de dimensión n, tangentes al sistema de Pfaff

$$\mathcal{P} =< dF, \omega >,$$

que tengan al menos un punto en la hipersuperficie $\mathcal{F} = \{F = 0\}$.

O dicho de otro modo. Encontrar las subvariedades $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{F}$, de dimensión n, en las que ω se restrinja a cero, es decir tangentes al sistema de Pfaff

$$\overline{\mathcal{P}} =< \overline{\omega} >,$$

donde $\overline{\omega}$ es la restricción de ω a $\mathcal{F}$.

Definición. A tales subvariedades las llamaremos *subvariedades solución (en el sentido de Lie) de la EDP en* U_{2n+1}. En general aunque la subvariedad no tenga dimensión n diremos que es solución si cumple las dos condiciones anteriores.

Si existe una subvariedad solución $\mathcal{S}_n$ y en un entorno tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, la función z en ese entorno de $\mathcal{S}_n$ será de la forma

$$z = f(x_1, \ldots, x_n),$$

y la función f es una solución clásica, es decir solución de (7.1). Es por esto que lo que tenemos que buscar son las subvariedades tangentes a nuestro sistema de Pfaff y para ello lo primero que tenemos que analizar es el sistema característico del sistema de Pfaff $< dF, \omega >$, en U_{2n+1} ó el de $< \overline{\omega} >$ en $\mathcal{F}$, el cual ya sabemos, por el Lema (6.43) de la pág.386, que tiene un campo pues $\dim \mathcal{F} = 2n$ y $\overline{\mathcal{P}} =< \overline{\omega} >$ es de rango 1.

Proposición 7.5 (i) *El sistema característico de* $< dF, \omega >$ *está generado por el campo*

$$D = \sum_{i=1}^{n} F_{z_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i F_{z_i} \right) \frac{\partial}{\partial z} - \sum_{i=1}^{n} (z_i F_z + F_{x_i}) \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

(ii) *El campo* D *es tangente a las subvariedades* $\{F = cte\}$ *y el sistema característico de* $< \overline{\omega} >$ *está generado por el campo* $\overline{D} = D_{|\mathcal{F}}$.

Demostración. (i) $D \in \Delta[\mathcal{P}]$ sii $D \in \mathcal{P}^0$ y $D^L \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$, es decir

$$\omega(D) = Dz - \sum_{i=1}^{n} z_i Dx_i = 0$$

$$D^L \omega = i_D d\omega = i_D (\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dz_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Dx_i dz_i - \sum_{i=1}^{n} Dz_i dx_i = g dF + f\omega,$$

y las otras dos condiciones son automáticas pues tomando en la segunda ecuación la componente de dz tendremos que $gF_z + f = 0$, por tanto $D^L\omega = g(dF - F_z\omega)$ y como $D^L\omega(D) = 0$, tendremos que

$$0 = dF(D) - F_z\omega(D) = dF(D),$$

y el campo D del enunciado es el único salvo proporcionales que lo cumple.

(ii) Como $DF = 0$, tendremos que $D_p \in T_p(\mathcal{F})$, para cada $p \in \mathcal{F}$, y este campo de vectores tangentes define un campo $\overline{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$. Ahora sea $E \in \Delta[\overline{\mathcal{P}}]$, por tanto

$$\overline{\omega}E = 0, \quad E^L\overline{\omega} = h\overline{\omega} \quad \Rightarrow \quad \overline{\omega}E = 0, \quad i_E d\overline{\omega} = h\overline{\omega},$$

y para cada $p \in \mathcal{F}$, $\omega_p E_p = 0$ y las 1–formas $i_{E_p} d_p\omega - h(p)\omega_p$ y d_pF tienen el mismo núcleo, $T_p(\mathcal{F})$, por tanto son proporcionales y por un cálculo de componentes, como el anterior, se sigue que $E_p \in < D_p >$. ∎

Nota 7.6 Observemos que el cono de Monge es la proyección del campo D en los puntos de $\mathcal{F}$, en las $n + 1$ primeras coordenadas.

Ejercicio 7.4.1 Demostrar que si f es solución de (7.1), entonces D es tangente a $\mathcal{S}_n(f)$.

7.5. Teoremas de existencia y unicidad

En esta lección probaremos que en ciertas condiciones existe una única subvariedad n–dimensional solución de la EDP definida por $\{F = 0\}$ en $\mathbb{R}^{2n+1}$, que contiene a una subvariedad $n - 1$–dimensional dada. Nosotros demostraremos este resultado sólo localmente, aunque lo enunciaremos en su generalidad.

7.5.1. Dimensión de una subvariedad solución.

Nuestra 1–forma

$$\omega = dz - \sum_{i=1}^{n} z_i dx_i,$$

satisface que en todo punto p

$$\operatorname{rad} d_p\omega \cap \{\omega_p = 0\} = \{0\},$$

pues es de clase $2n+1$ (ver el **teorema de Darboux** (6.44), pág.387), por lo tanto en todo punto el $\operatorname{rad} d_p\omega$ es unidimensional, por el ejercicio (6.8.1), pág.385, pues es de dimensión impar ya que nuestro espacio lo es y no puede contener un plano. Por otra parte una cuenta inmediata nos dice que

$$\operatorname{rad} d_p\omega =< \frac{\partial}{\partial z} > .$$

Por el mismo ejercicio sabemos que $\dim(\operatorname{rad} d_p\overline{\omega})$ es par, pero hay dos posibilidades pues para cada $p \in \mathcal{F}$ tenemos que o bien $\partial z \notin T_p(\mathcal{F})$, o bien $\partial z \in T_p(\mathcal{F})$. Analicemos ambos casos.

Proposición 7.7 *Sea $p \in \mathcal{F}$, entonces*

$$(1) \qquad F_z(p) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} \notin T_p(\mathcal{F}) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rad} d_p\overline{\omega} = \{0\},$$

$$(2) \qquad F_z(p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} \in T_p(\mathcal{F}) \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\operatorname{rad} d_p\overline{\omega}) = 2.$$

Demostración. Basta demostrar las dos implicaciones

$$\operatorname{rad} d_p\overline{\omega} \neq \{0\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} \in T_p(\mathcal{F}) \quad \Rightarrow \quad \dim(\operatorname{rad} d_p\overline{\omega}) = 2,$$

pues como la última implica la primera serán equivalentes. Veamos la primera: Si el radical tiene un elemento $T \in T_p(\mathcal{F})$, entonces

$$\begin{aligned} &d_p\omega(T, E) = d_p\overline{\omega}(T, E) = 0, \qquad \forall E \in T_p(\mathcal{F}) \\ &d_p\omega(T, \partial_z) = 0, \end{aligned}$$

y $\partial z \in T_p(\mathcal{F})$, pues en caso contrario $T \in \operatorname{rad} d_p\omega =< \partial z >$, lo cual es absurdo. Veamos ahora la segunda: Por lo dicho antes de la proposición el $\operatorname{rad} d_p\overline{\omega}$ es de dimensión par y por hipótesis contiene a ∂_z. Si tuviera otros

dos vectores D_1, D_2 independientes e independientes de ∂_z, podríamos considerar cualquier vector $T \notin T_p(\mathcal{F})$, y el hiperplano

$$d_p\omega(T, \cdot) = 0,$$

se cortaría con el plano $< D_1, D_2 >$ en un vector D del radical de $d_p\omega$ e independiente de ∂_z, lo cual es imposible. (Ver el ejercicio (6.8.1), pág.385). ∎

Lema 7.8 *Sea $\mathcal{E}$ un espacio vectorial de dimensión par $2n$, $G\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathbb{R}$ bilineal y hemisimétrica y $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ un subespacio totalmente isótropo para G, es decir tal que $G(x, y) = 0$ para $x, y \in \mathcal{S}$. Entonces*

$$\dim \mathcal{S} \geq n + k \quad \Rightarrow \quad \dim \operatorname{rad} G \geq 2k,$$

y por tanto como $\operatorname{rad} G$ *es de dimensión par (ver el ejercicio (6.8.1))*

$$\dim \operatorname{rad} G = 2m \quad \Rightarrow \quad \dim \mathcal{S} \leq n + m.$$

Demostración. En primer lugar aplicando la fórmula

$$\dim(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2) + \dim(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) = \dim \mathcal{S}_1 + \dim \mathcal{S}_2,$$

para $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{E}$ subespacios, tenemos que

$$\dim(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) \geq \dim \mathcal{S}_1 + \dim \mathcal{S}_2 - 2n$$

y por inducción

$$\dim(\mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_k) \geq \dim \mathcal{S}_1 + \cdots + \dim \mathcal{S}_k - 2n(k-1).$$

Ahora supongamos que $\dim \mathcal{S} = r \geq n + k$, consideremos una base suya $e_1, \ldots, e_r$ y extendámosla a una $e_1, \ldots, e_{2n}$ de $\mathcal{E}$. Consideremos para $1 \leq i \leq m = 2n - r$ los subespacios

$$\mathcal{S}_i = \{x \in \mathcal{E} :\ G(e_{r+i}, x) = 0\},$$

los cuales tienen $\dim \mathcal{S}_i \geq 2n - 1$, por tanto como

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_m \subset \operatorname{rad} G,$$

tendremos por la fórmula anterior que

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{rad} G &\geq \dim \mathcal{S} + \sum_{i=1}^{m} \dim \mathcal{S}_i - 2nm \geq r + m(2n-1) - 2nm \\ &= r - m = r - (2n - r) \geq 2k. \end{aligned}$$

∎

Teorema 7.9 *Toda subvariedad solución tiene dimensión $k \leq n$.*

Demostración. Si S es una subvariedad solución, entonces $\overline{\omega}$ se anula en S y por tanto la $d\overline{\omega}$, por tanto para cada $p \in S$, $T_p(S)$ es totalmente isótropo de $d_p\overline{\omega}$ y tenemos dos casos, que analizamos teniendo en cuenta la proposición anterior y el lema:

$$\begin{aligned}
(1)\quad & \frac{\partial}{\partial z} \notin T_p(\mathcal{F}) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rad} d_p\overline{\omega} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \dim T_p(S) \leq n, \\
(2)\quad & \frac{\partial}{\partial z} \in T_p(\mathcal{F}) \quad \Rightarrow \quad \dim \operatorname{rad} d_p\overline{\omega} = 2 \\
& \qquad\qquad \Rightarrow \quad \dim\left(T_p(S) \oplus <\partial_z>\right) \leq n+1 \\
& \qquad\qquad \Rightarrow \quad \dim T_p(S) \leq n.
\end{aligned}$$

pues en el caso (2) $T_p(S)\oplus<\partial_z>$ es un subespacio totalmente isótropo pues ∂_z está en el radical de $d_p\overline{\omega}$ y $\partial_z \notin T_p(S)$, ya que $\overline{\omega}(\partial_z) = 1$. ∎

7.5.2. Existencia de solución.

Teorema de Existencia 7.10 *Sea $\mathcal{S}_{k-1} \subset \mathcal{F}$ una subvariedad solución (i.e. en la que ω se anula), de dimensión $k-1$ con $1 \leq k-1 \leq n$, y tal que $D_p \notin T_p(\mathcal{S}_{k-1})$ en todo punto suyo. Entonces existe una subvariedad solución k–dimensional, $\mathcal{S}_k$ tal que*

$$\mathcal{S}_{k-1} \subset \mathcal{S}_k \subset \mathcal{F}.$$

Demostración. Por (2.34), pág.102, podemos considerar un representante completo D del sistema característico. Consideremos su grupo uniparamétrico

$$\tau\colon \mathbb{R} \times U_{2n+1} \longrightarrow U_{2n+1},$$

la variedad k–dimensional $\mathcal{V} = \mathbb{R} \times \mathcal{S}_{k-1}$ y la aplicación diferenciable $\overline{\tau} = \tau_{|\mathcal{V}}$. Veamos que $\overline{\tau}$ es una inmersión local cuya imagen contiene a $\mathcal{S}_{k-1}$, está en $\mathcal{F}$ y en ella ω se restringe a cero. Para ello consideremos un punto $p \in \mathcal{S}_{k-1}$, un $t \in \mathbb{R}$ y un sistema de coordenadas $(t_2, \ldots, t_k)$ en un entorno de p en $\mathcal{S}_{k-1}$, que si completamos con la coordenada t_1

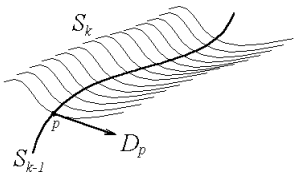


Figura 7.4. Construcción de $\mathcal{S}_k$

de $\mathbb{R}$ nos define un sistema de coordenadas $(t_1 \ldots, t_k)$ en un entorno de $x = (t, p) \in \mathcal{V}$. Ahora

$$\overline{\tau}_* \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right)_x = \tau_{p*} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_t = D_{\tau(t,p)} = \tau_{t*} D_p,$$
$$\overline{\tau}_* \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right)_x = \tau_{t*} \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right)_p,$$

lo cual se sigue de los diagramas conmutativos, para $i_t(p) = i_p(t) = (t, p)$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{i_p} & \mathbb{R} \times \mathcal{S}_{k-1} \\ \mathrm{i}\downarrow & & \downarrow\overline{\tau} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\tau_p} & U_{2n+1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{k-1} & \xrightarrow{i_t} & \mathbb{R} \times \mathcal{S}_{k-1} \\ \mathrm{i}\downarrow & & \downarrow\overline{\tau} \\ U_{2n+1} & \xrightarrow{\tau_t} & U_{2n+1} \end{array}$$

y como en p, D y las ∂t_i para $i = 2, \ldots, k$ son independientes, tendremos que $\overline{\tau}$ es inmersión local en todo $x \in \mathcal{V}$ y $\mathcal{S}_k = \overline{\tau}(\mathcal{V})$ es una subvariedad inmersa. Por último se tiene que para $D_i = \overline{\tau}_*(\partial t_i)$ y $q = \overline{\tau}(t, p)$

$$\begin{aligned} F(\overline{\tau}(t,p)) &= F(\tau(t,p)) = F(p) = 0, \\ \omega_q D_{1q} &= \omega D(q) = 0, \\ \omega_q D_{iq} &= \omega_q \left[\tau_{t*} \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right)_p \right] = \tau_t^* \omega_q \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right)_p = 0, \end{aligned}$$

pues $\tau_t^*(\omega_q) \in \mathcal{P}_p$ y $\mathcal{P}$ restringido a $\mathcal{S}_{k-1}$ se anula. ∎

Corolario 7.11 *D es tangente a toda subvariedad solución n–dimensional.*

Demostración. Si no lo fuera, por (7.10) obtendríamos una subvariedad solución de dimensión $n + 1$, lo cual es absurdo por (7.9). ∎

Teorema de Unicidad 7.12 *Sea $\mathcal{S}_{n-1} \subset \mathcal{F}$ una subvariedad solución de dimensión $n - 1$ y tal que en todo punto suyo $D_p \notin T_p(\mathcal{S}_{n-1})$. Entonces existe una subvariedad (inmersa) solución n–dimensional $\mathcal{S}_n$, que la contiene y es única en el siguiente sentido: dadas dos subvariedades solución $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ que contengan a $\mathcal{S}_{n-1}$ y dado un punto $x \in \mathcal{S}_{n-1}$, existe un entorno abierto $U_x \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ de x, para el que $\mathcal{S} \cap U_x = \mathcal{S}' \cap U_x \subset \mathcal{S}_n$.*

Demostración. La existencia de $\mathcal{S}_n = \tau[\mathbb{R} \times \mathcal{S}_{n-1}]$ ya ha sido vista (recordemos que localmente la imagen por una inmersión local es una subvariedad).

La unicidad es consecuencia del corolario anterior, pues dada otra subvariedad solución $\mathcal{S}$, tendremos que $D \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$ y su grupo uniparamétrico en $\mathcal{S}$, $\sigma\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{S}$, es la restricción de τ al abierto $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{S}$. Ahora bien, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} \cap (\mathbb{R} \times \mathcal{S}_{n-1}) & \xrightarrow{\overline{\sigma}} & \mathcal{S} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{i}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{i}} \\ \mathbb{R} \times \mathcal{S}_{n-1} & \xrightarrow{\overline{\tau}} & \mathbb{R}^{2n+1} \end{array}$$

donde $\overline{\sigma} = \overline{\tau} \circ i$ y las flechas descendentes son inclusiones y vimos en el teorema de existencia que $\overline{\tau}$ era inmersión local, lo cual implica que también lo es $\overline{\sigma}$ y como lo es entre variedades de igual dimensión es un difeomorfismo local, por tanto dado un $x \in \mathcal{S}_{n-1}$ existe un entorno abierto V_x de x en $\mathcal{S}_{n-1}$ y un $\epsilon > 0$ tales que $\overline{\sigma}[(-\epsilon, \epsilon) \times V_x]$ es un abierto de $\mathcal{S}$, ahora bien

$$\overline{\sigma}[(-\epsilon, \epsilon) \times V_x] = \tau[(-\epsilon, \epsilon) \times V_x] \subset \mathcal{S}_n,$$

por tanto el mismo razonamiento con otra solución $\mathcal{S}'$ nos da, encogiendo el ϵ y el V_x si es necesario que $\tau[(-\epsilon, \epsilon) \times V_x]$ es abierto de $\mathcal{S}$ y abierto de $\mathcal{S}'$, por tanto de la forma $U_x \cap \mathcal{S} = U_x \cap \mathcal{S}'$, para un abierto $U_x \subset \mathbb{R}^{2n+1}$. ∎

7.5.3. El problema de Cauchy.

Como consecuencia del resultado anterior daremos respuesta al llamado *problema de Cauchy*, el cual consiste, de forma muy genérica, en encontrar la solución clásica única, de una EDP

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, z_{x_1}, \ldots, z_{x_n}) = 0,$$

satisfaciendo unas adecuadas condiciones.

Teorema 7.13 *Sea $F \in \mathcal{C}^\infty(V)$, con $V \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ abierto, sea I un abierto del hiperplano $\{x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ y en él consideremos dos funciones $\varphi, \phi \in \mathcal{C}^\infty(I)$, tales que para todo $x_0 = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in I$*

$$F(x_0, \varphi(x_0), \varphi_{x_1}(x_0), \ldots, \varphi_{x_{n-1}}(x_0), \phi(x_0)) = 0,$$
$$F_{z_n}(x_0, \varphi(x_0), \varphi_{x_1}(x_0), \ldots, \varphi_{x_{n-1}}(x_0), \phi(x_0)) \neq 0,$$

entonces para cada $t_0 = (t_1, \dots, t_{n-1}) \in I$ *existe un abierto* $U \subset \mathbb{R}^n$ *entorno de* t_0 *y una solución* $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$*, de la EDP definida por* F *y satisfaciendo las condiciones*

$$F(x, f(x), f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x)) = 0, \quad \text{para } x \in U_0,$$
$$f(x_0) = \varphi(x_0), \quad f_{x_n}(x_0) = \phi(x_0), \quad \text{para } x_0 \in I \cap U$$

única en el sentido de que si $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$ *es otra, coinciden localmente en* t_0*.*

Demostración. Si existe tal solución f tendremos que la subvariedad n-dimensional $\{z = f(x), z_i = f_{x_i}(x)\}$ contiene a la subvariedad

$$\mathcal{S}_{n-1} = \{x_n = 0,\ z = \varphi(x_1, \cdots, x_{n-1}),$$
$$z_1 = \varphi_{x_1}, \dots, z_{n-1} = \varphi_{x_{n-1}}, z_n = \phi, \}$$

que tiene las siguientes propiedades:

— Es una subvariedad $n-1$ dimensional de $\mathcal{F}$ que tiene coordenadas $(u_i = i^* x_i)$, para $i = 1, \dots, n-1$.

— Es tal que si $p \in \mathcal{S}_{n-1}$, $D_p \notin T_p(\mathcal{S}_{n-1})$, pues $D_p x_n = F_{z_n}(p) \neq 0$ y $\mathcal{S}_{n-1} \subset \{x_n = 0\}$.

— Es solución, $\overline{\omega}_{\mathcal{S}_{n-1}} = 0$.

Esto nos induce a considerar la única subvariedad solución $\mathcal{S}_n$, n–dimensional, que la contiene. Además tiene coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ en un entorno de cada $p \in \mathcal{S}_{n-1}$, pues por un lado $i_* \partial u_1, \dots, i_* \partial u_{n-1}, D$ son base en p de $T_p(\mathcal{S}_n)$, para la inclusión $i\colon \mathcal{S}_{n-1} \to \mathcal{S}_n$, y por otra parte la proyección

$$\pi = (x_1, \dots, x_n)\colon \mathcal{S}_n \subset \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^n,$$

los lleva a vectores independientes, por tanto es inmersión local y difeomorfismo local. Ahora basta considerar $z = f(x_1, \dots, x_n)$ en esta subvariedad. ∎

En el caso particular de tener una EDP en el plano (es decir para $n = 2$)

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0. \tag{7.4}$$

tenemos el siguiente resultado.

Corolario 7.14 *Sea $F \in \mathcal{C}^\infty(V)$, con $V \subset \mathbb{R}^5$ abierto, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $\sigma\colon I \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^5$ una curva $\mathcal{C}^\infty$*

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t), p(t), q(t))$$

satisfaciendo las condiciones para todo $t \in I$ (ver la Fig.7.5):

1.- $F[\sigma(t)] = 0$.
2.- $z'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t)$.
3.- $F_q x' \neq F_p y'$.

Entonces para cada $s \in I$ existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, entorno de $p = (x(s), y(s))$ y una función $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ solución de la EDP (7.4) y tal que para los $t \in I$ con $(x(t), y(t)) \in U$

$$z(t) = f[x(t), y(t)], \quad p(t) = f_x[x(t), y(t)], \quad q(t) = f_y[x(t), y(t)].$$

Además f es única en el sentido de que dada otra solución g satisfaciendo lo mismo en un entorno de s, coincide con f en un entorno de p del plano.

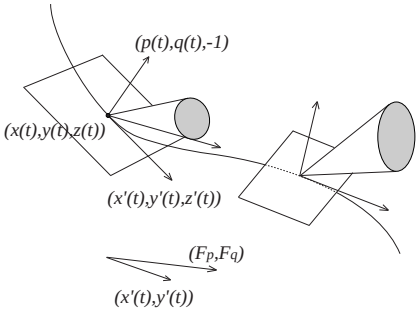


Figura 7.5. Curva de datos iniciales

Demostración. La tercera condición nos dice que σ es inmersión local, por tanto localmente la imagen de σ es subvariedad $\mathcal{S}_1 = \{x = x(t), y = y(t), z = z(t), p = p(t), q = q(t)\}$. La segunda condición nos dice que

$$\omega = dz - pdx - qdy,$$

se restringe a cero en $\mathcal{S}_1$. Por la tercera el campo D es transversal a $\mathcal{S}_1$, por tanto el teorema (7.12) nos asegura que localmente existe una única superficie solución $\mathcal{S}_2$, conteniendo a la curva. Ahora bien la tercera condición dice que esta superficie tiene, en cada punto de la curva,

coordenadas locales (x, y), pues la proyección al plano xy es un difeomorfismo local, por tanto en ella $z = f(x, y)$ y f es la solución pues como ω se anula, en ella $p = f_x$ y $q = f_y$. Ahora si g es otra solución, entonces $\mathcal{S}' = \{z = g(x, y), p = g_x(x, y), q = g_y(x, y)\}$ es otra subvariedad solución que contiene a $\mathcal{S}_{n-1}$ y como es única $f = g$. ∎

Ejercicio 7.5.1 Sea $U_3 \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^\infty(U_3)$. Demostrar que si

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))\colon (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow U_3,$$

es una curva diferenciable tal que para todo t

$$x'(t) f_2[\sigma(t)] \neq y'(t) f_1[\sigma(t)],$$

entonces para todo $t_0 \in (a, b)$ existe una función $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto entorno de $(x(t_0), y(t_0))$, solución de la EDP

$$f_1 z_x + f_2 z_y = f_3,$$

satisfaciendo $z(t) = f[x(t), y(t)]$, donde esté definida y es única en el sentido de que si hay otra coinciden en un entorno de $(x(t_0), y(t_0))$.

Ejercicio 7.5.2 Sea $V \subset \mathbb{R}^4$ un abierto entorno de (x_0, y_0, z_0, p_0), $h \in \mathcal{C}^\infty(V)$ y $g \in \mathcal{C}^\infty(I)$, para $I = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset \mathbb{R}$, tal que $g(x_0) = z_0$ y $g'(x_0) = p_0$. Demostrar que existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ entorno de (x_0, y_0) y una función $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ solución de la EDP

$$z_y = h(x, y, z, z_x),$$

satisfaciendo $f(x, y_0) = g(x)$, que es única en el sentido de que si hay otra coinciden en un entorno de (x_0, y_0).

7.6. Métodos para resolver una EDP

7.6.1. Método de las características de Cauchy

Consideremos una ecuación en derivadas parciales de primer orden en el plano

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0,$$

y sea D su campo característico. Dada una curva $(x(t), y(t), z(t))$ en $\mathbb{R}^3$, queremos encontrar una solución de la ecuación cuya gráfica contenga a la curva. El método de Cauchy consiste en construir a partir de los datos, dos funciones $p(t), q(t)$, de modo que la curva $\mathcal{S}_1$

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)),$$

esté en las condiciones del Corolario (7.14), pág.471, es decir que sea solución. Lo cual significa despejar $p(t)$ y $q(t)$ en el sistema

$$F[x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)] = 0, \qquad z'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t),$$

que puede tener más de una solución. Una vez definidas y si para ellas $F_q x' \neq F_p y'$, tendremos que existe una única solución $\mathcal{S}_2$ que la contiene y por (7.14) sabemos que está formada por las curvas integrales de D que pasan por los puntos de $\mathcal{S}_1$, las cuales a su vez podemos construir con u_1, u_2, u_3, integrales primeras de D, tales que con $u_4 = F$ sean diferenciablemente independientes. La curva integral de D que pasa por $\sigma(t)$, para cada t, es

$$u_1 = u_1[\sigma(t)], \quad u_2 = u_2[\sigma(t)], \quad u_3 = u_3[\sigma(t)], \quad u_4 = 0,$$

y la solución es la proyección a $\mathbb{R}^3$, por las coordenadas (x, y, z), de la superficie definida por esta familia de curvas, que consiste en eliminar de esas ecuaciones p, q y t.

Nota 7.15 Observemos algunos casos particulares de F en los que podemos dar una integral primera de D automáticamente:

(a) $F = F(x, p, q) \quad \Rightarrow \quad Dq = 0$, pues $Dq = -F_y - qF_z = 0$.

(b) $F = F(y, p, q) \quad \Rightarrow \quad Dp = 0$.

(c) $F = F(z, p, q) \quad \Rightarrow \quad D(p/q) = 0$, pues

$$Dp = -pF_z \quad \text{y} \quad Dq = -qF_z \quad \Rightarrow \quad (Dp)q - q(Dp) = 0.$$

(d) $F = u + v$, $u = u(x, p)$, $v = v(y, q) \quad \Rightarrow \quad Du = Dv = 0$, pues

$$Du = F_p u_x - (F_x + pF_z)u_p = u_p u_x - u_x u_p = 0 = Dv.$$

(e) $F = xp + yq + f(p, q) - z \quad \Rightarrow \quad Dp = Dq = 0$ (la EDP que define se llama de Clairaut), pues

$$Dp = -F_x - pF_z = 0, \quad Dq = -F_y - qF_z = 0.$$

Ejercicio 7.6.1 Encontrar con el método de Cauchy la solución de la EDP

$$z = \frac{1}{2}(z_x^2 + z_y^2) + (z_x - x)(z_y - y).$$

que pasa por el eje x.

Ejercicio 7.6.2 Encontrar con el método de Cauchy la solución de la EDP

$$z = z_x z_y$$

que pasa por la curva $x = 0$, $z = y^2$.

7.6.2. Método de la Proyección. Integral completa

Consideremos una ecuación en derivadas parciales de primer orden

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0,$$

definida por una función F de U_{2n+1} y sea D el generador del sistema característico del sistema de Pfaff definido en $\mathcal{F}$ por $< \overline{\omega} >$.

Siguiendo el **Teorema de la Proyección** (6.16), pág.353, podemos proyectar nuestro sistema de Pfaff mediante D, para ello supongamos que $Dx_n \neq 0$ en $\mathcal{F}$ —lo cual significa que $F_{z_n} \neq 0$, en los puntos de $\mathcal{F}$— y consideremos $u_1, \ldots, u_{2n-1}$ integrales primeras de D en $\mathcal{F}$ —las cuales podemos calcular con cualquier campo que coincida con D en $\mathcal{F}$—, de tal forma que junto con $u_{2n} = x_n$ y $u_{2n+1} = F$, formen un sistema de coordenadas locales en $\mathbb{R}^{2n+1}$, en los puntos de $\mathcal{F}$. Esto implica que en un entorno de estos puntos podamos despejar

$$\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(u_1, \ldots, u_{2n-1}, x_n, F), \quad \text{para } \ i = 1, \ldots, n-1, \\ z &= \varphi(u_1, \ldots, u_{2n-1}, x_n, F), \\ z_i &= \phi_i(u_1, \ldots, u_{2n-1}, x_n, F), \quad \text{para } \ i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

De este modo la restricción de $(u_1, \ldots, u_{2n})$ a $\mathcal{F}$ es sistema de coordenadas locales en un abierto U de $\mathcal{F}$, en el que $< \overline{D} >=< \partial_{u_{2n}} >= \Delta[\overline{\mathcal{P}}]$ y si consideremos la proyección $\pi = (u_1, \ldots, u_{2n-1})$, el abierto $V = \pi(U)$ de $\mathbb{R}^{2n-1}$ y la sección

$$\tau : V \longrightarrow U,$$

que en coordenadas lleva un punto q con coordenadas $(u_1, \ldots, u_{2n-1})$ en el punto $p = \tau(q)$ de coordenadas[4] $(u_1, \ldots, u_{2n-1}, 0)$, entonces el Teorema de la proyección (6.16), pág.353, nos asegura que en el abierto U de $\mathcal{F}$

$$< \overline{\omega} >= \pi^* \tau^* < \overline{\omega} >=< \overline{\theta} >,$$

para

$$\overline{\theta} = \pi^* \tau^* \overline{\omega} = d\bar{z} - \sum_{i=1}^{n-1} \bar{z}_i d\bar{x}_i,$$

pues $\tau^* x_n = 0$, por tanto $\bar{x}_n = \pi^* \tau^* x_n = 0$; y donde

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \varphi_i(u_1, \ldots, u_{2n-1}, 0, 0), \quad \text{para } \ i = 1, \ldots, n-1, \\ \bar{z} &= \varphi(u_1, \ldots, u_{2n-1}, 0, 0), \\ \bar{z}_i &= \phi_i(u_1, \ldots, u_{2n-1}, 0, 0), \quad \text{para } \ i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

son las integrales primeras de D que en $x_n = 0$ y $F = 0$ coinciden respectivamente con $x_1, \ldots, x_{n-1}, z, z_1, \ldots, z_n$.

En definitiva, si tenemos que

$$d\bar{x}_1, \ldots, d\bar{x}_{n-1}, d\bar{z}, dF,$$

son independientes en $\mathcal{F}$, entonces para cada $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{S}_a = \{\bar{x}_1 = a_1, \ldots, \bar{x}_{n-1} = a_{n-1}, \ \bar{z} = a_n, \ F = 0\} \subset \mathcal{F},$$

es una subvariedad n–dimensional solución[5], pues

$$\overline{\theta}_{|\mathcal{S}_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\omega}_{|\mathcal{S}_a} = 0,$$

y llamamos *integral completa* a esta familia de soluciones, parametrizada por $a \in \mathbb{R}^n$, de nuestra ecuación. Si además $\mathcal{S}_a$ tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, se sigue que en ella

$$z = f_a(x_1, \ldots, x_n),$$

y cada función f_a es una solución[6] clásica de la EDP.

[4] Si estamos en un entorno de un punto de coordenada $x_n = 0$.

[5] Como también lo son las del tipo $\{\bar{z} = a_{n-1}, \bar{x}_1 = a_1, \ldots, \bar{x}_{n-2} = a_{n-2}, \bar{z}_{n-1} = 0, \ F = 0\}$, aunque esta familia de soluciones es $n-1$–dimensional.

[6] A esta familia de soluciones también la llamamos *integral completa* de la EDP.

Ejercicio 7.6.3 Encontrar con el método de la proyección una integral completa de la EDP

$$z = xz_x + yz_y + z_x z_y.$$

Ejercicio 7.6.4 Encontrar con este método una integral completa de la ecuación

$$z_x^2 + z_y^2 = 1.$$

Solución pasando por una subvariedad.

Si lo que queremos es encontrar la solución en $\mathbb{R}^{n+1}$ que contenga a una subvariedad plana de la forma

$$x_n = 0, \quad z = g(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

basta tomar en $\mathbb{R}^{2n+1}$ la subvariedad solución en el sentido de Lie

$$\mathcal{S}_n = \{H = 0, H_1 = 0, \ldots, H_{n-1} = 0, F = 0\},$$

para las funciones (si son diferenciablemente independientes)

$$H = \bar{z} - g(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}) \quad H_i = \bar{z}_i - \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}),$$

pues en ella

$$\overline{\theta}_{|\mathcal{S}_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\omega}_{|\mathcal{S}_n} = 0,$$

ahora basta proyectar $\mathcal{S}_n$ a $\mathbb{R}^{n+1}$, por la proyección $(x_1, \ldots, x_n, z)$. Si además esta subvariedad ó $\mathcal{S}_n$ tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, basta expresar z en ellas para encontrar la solución clásica.

Ejercicio 7.6.5 Encontrar la solución, que en $x = 0$ pasa por $z = y^3$, de la EDP

$$yzz_x + z_y = 0.$$

Ejercicio 7.6.6 Encontrar la solución, que en $x = 0$ pasa por $z = y^2$, de la ecuación

$$z + z_x^2 = y.$$

7.6.3. Método de Lagrange–Charpit.

En el caso del plano, en el que nuestra EDP es del tipo

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0,$$

podemos reducir considerablemente las cuentas con el llamado *método de Lagrange–Charpit*, el cual se basa en el hecho de que en las subvariedades tridimensionales, para cada constante $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{S}_a = \{F = 0, g = a\},$$

para g integral primera del campo característico D de $\overline{\mathcal{P}} =< \overline{\omega} >$, nuestra 1–forma $\overline{\omega} = dz - pdx - qdy$ es proporcional a una exacta dh, y por tanto las superficies

$$\mathcal{S}_{a,b} = \{F = 0, g = a, h = b\} \subset \mathbb{R}^5,$$

son solución, pues en ellas $\overline{\omega}$ se anula

$$dh_{|\mathcal{S}_{a,b}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\omega}_{|\mathcal{S}_{a,b}} = 0.$$

A continuación justificamos esto: Consideremos el campo $D \in \Delta[\overline{\mathcal{P}}]$, el cual es tangente a cada subvariedad tridimensional $\mathcal{S}_a$, pues $DF = Dg = 0$, en la que el sistema de Pfaff generado por $\overline{\omega}$ es totalmente integrable pues

$$d\overline{\omega} \wedge \overline{\omega} = 0,$$

ya que es una tres–forma en una variedad $\mathcal{S}_a$ tridimensional, en la que $D \in \mathcal{D}(\mathcal{S}_a)$ y como $i_D(d\overline{\omega})$ es proporcional a $\overline{\omega}$ y $\overline{\omega}D = 0$,

$$i_D(d\overline{\omega} \wedge \overline{\omega}) = (i_D d\overline{\omega}) \wedge \overline{\omega} + d\overline{\omega} \wedge (i_D\overline{\omega}) = 0,$$

por tanto en $\mathcal{S}_a$, $< \overline{\omega} >=< dh >$. Si además en esta subvariedad (x, y, z) son coordenadas, tendremos que $h = h(x, y, z; a)$ y la solución es

$$\{F = 0, g = a, h = b\} \subset \{h(x, y, z; a) = b\},$$

que es una superficie de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 7.6.7 Encontrar con el método de Lagrange–Charpit una integral completa de la EDP: $x[z_x^2 + z_y^2] - zz_x = 0$.

Ejercicio 7.6.8 Encontrar con el método de Lagrange–Charpit una integral completa de la EDP: $xz_x^2 + yz_y^2 = z$.

Ejercicio 7.6.9 Encontrar con el método de Lagrange–Charpit una integral completa de la EDP $z = xz_x + yz_y + z_x z_y$.

Ejercicio 7.6.10 La normal en un punto de una superficie del espacio interseca a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en un par de puntos cuyo punto medio está en $z = 0$. (a) Demostrar que la superficie satisface la EDP

$$z(z_x^2 + z_y^2) + xz_x + yz_y = 0.$$

(b) Encontrar una integral completa de esta EDP.

Ejercicio 7.6.11 La recta normal a una superficie en cada uno de sus puntos corta a los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, respectivamente en A, B y C. Demostrar que si B es el punto medio de A y C entonces la superficie es solución de la EDP

$$z = \frac{x}{z_x} - \frac{2y}{z_y}.$$

Encontrar una integral completa.

7.7. Método de la envolvente

7.7.1. Envolvente de una familia de superficies.

Consideremos una familia uniparamétrica de superficies en el espacio

$$\mathcal{S}^\lambda = \{h(x, y, z; \lambda) = 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$

y cortemos cada una de ellas (ver Fig.7.6) con una muy próxima $\mathcal{S}^{\lambda+\epsilon}$, lo cual será en general una curva de ecuaciones

$$\begin{aligned} h(x, y, z; \lambda) &= 0, \\ \frac{h(x, y, z; \lambda) - h(x, y, z; \lambda + \epsilon)}{\epsilon} &= 0, \end{aligned}$$

y cuando $\epsilon \to 0$ la curva tiende a una posición límite de ecuación

$$h(x, y, z; \lambda) = 0 \ , \quad \frac{\partial h}{\partial \lambda}(x, y, z; \lambda) = 0,$$

y esta curva que está en la superficie $\mathcal{S}^\lambda$ y se llama *curva característica de* $\mathcal{S}^\lambda$, genera una superficie al variar el λ, cuya ecuación $g(x,y,z)=0$ se obtiene eliminando λ en las ecuaciones anteriores. A esta superficie la llamamos *envolvente* de las superficies $\mathcal{S}^\lambda=\{h^\lambda=0\}$.

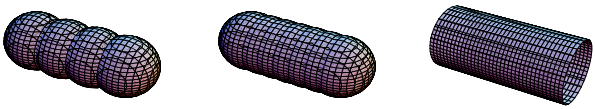


Figura 7.6. Envolvente de las esferas

Ejemplo 7.7.1 Consideremos la familia de esferas

$$x^2+(y-\lambda)^2+z^2=1,$$

cuya envolvente se obtiene eliminando la λ entre la ecuación anterior y la ecuación $2(y-\lambda)=0$, lo cual nos da $x^2+z^2=1$, que es (ver la Fig.7.6) un cilindro formado por las curvas intersección de dos esferas infinitesimalmente próximas en la dirección definida por λ.

Ejemplo 7.7.2 Del mismo modo la familia biparamétrica de esferas unitarias centradas en el plano xy

$$(x-\lambda_1)^2+(y-\lambda_2)^2+z^2=1,$$

tiene por envolvente el par de planos $z=\pm 1$.

Ejemplo 7.7.3 La bala de un cañón. Consideremos un cañón que dispara en una dirección cualquiera con una velocidad determinada, ¿qué superficie límite pueden alcanzar las balas?

Consideremos el problema bidimensional en el plano xz y sea v la velocidad con la que sale la bala. Si $(x(t),z(t))$ es la trayectoria, tendremos que para $(a,b)=(x'(0),z'(0))$, $a^2+b^2=v^2$ y como $(x''(t),z''(t))=-(0,g)$, con g la

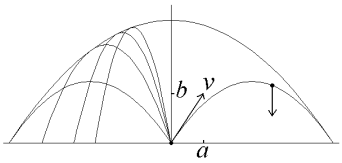


Figura 7.7. trayectorias bala cañón

constante de la gravedad en la tierra, tendremos poniendo el cañón en el origen de coordenadas que

$$x''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = at,$$
$$z''(t) = -g \quad \Rightarrow \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + bt,$$

por tanto la trayectoria parametrizada por x es

$$z = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{a^2} + \frac{bx}{a}.$$

Consideremos ahora distintos ángulos de disparo, lo cual corresponde a distintos valores de la pendiente $\lambda = b/a$, en cuyo caso

$$a^2 + (a\lambda)^2 = v^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{v^2}{1+\lambda^2},$$

y la trayectoria parametrizada por x es $z+kx^2(1+\lambda^2)-\lambda x = 0$, para $k = g/2v^2$. Si ahora consideramos la envolvente de esta familia de curvas obtenemos $\lambda = 1/2kx$ y $z + kx^2 = 1/4k$. Ahora la envolvente del problema tridimensional es

$$z + k(x^2 + y^2) = \frac{1}{4k}.$$

Ejemplo 7.7.4 El ruido de un avión. Consideremos un avión deplazándose en línea recta paralelo al suelo.

Si la velocidad del avión v_a es superior a la del sonido v_s, tendremos que en un instante dado las ondas sonoras forman una familia de esferas centradas en la recta trayectoria del avión —pongamos el eje y— y si el avión está en el origen de coordenadas las esferas tienen ecuaciones

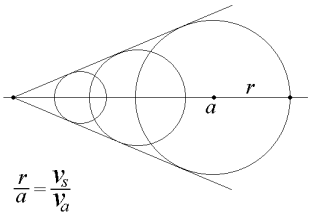


Figura 7.8. ruido de un avión

$$x^2 + (y-a)^2 + z^2 = \left(\frac{av_s}{v_a}\right)^2$$

y la envolvente de las ondas sonoras es un cono circular de ecuación

$$x^2 + y^2\frac{v_s^2}{v_s^2 - v_a^2} + z^2 = 0,$$

de eje la recta del avión, que separa la zona donde hay ruido de la que no lo hay. Esta zona divide el plano del suelo en dos regiones limitadas por la hipérbola (para h la altura del avión)

$$x^2 + y^2 \frac{v_s^2}{v_s^2 - v_a^2} + h^2 = 0,$$

corte del cono con el plano del suelo $z = -h$. Podemos estimar la proporción v_s/v_a, entre las velocidades del sonido y del avión mediante el ángulo α formado por la dirección en la que pase más cerca de nosotros, es decir la perpendicular por nosotros a su trayectoria y la dirección en la que esté el avión en el instante en el que oigamos el ruido, en cuyo caso $\cos\alpha = v_s/v_a$.

Si el avión va a una velocidad igual o inferior a la del sonido las ondas sonoras que va produciendo no se cortan y no hay envolvente. No obstante podemos tener información de la proporción v_s/v_a, entre las velocidades, si podemos estimar por una parte el ángulo β entre la dirección en la que nos llega el sonido y la dirección en la que en ese instante está el avión (que era $\pi/2$ en el caso anterior) y por otra el ángulo α entre esta dirección del avión y la que tenga cuando más cerca pase de nosotros. Pues en tal caso se demuestra por el Teorema de los senos que

$$\frac{v_s}{v_a} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \pi/2)}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Ejercicio 7.7.1 Demostrar que cada plano de una familia uniparamétrica de planos del espacio es tangente a su envolvente. En particular el cono de Monge es tangente a cada uno de los planos que lo definen.

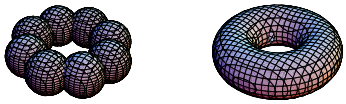


Figura 7.9. Envolvente de las esferas

Ejercicio 7.7.2 Hallar la envolvente de la familia de esferas de radio 1, con centro en los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ (figura (7.9)).

Ejercicio 7.7.3 Hallar la envolvente de la familia de los segmentos de longitud 1, en el primer cuadrante, con extremos en los ejes coordenados).

Remitimos al lector interesado en las envolventes de curvas al apéndice (7.16), pág.572.

7.7.2. Envolvente de una familia de hipersuperficies.

Definición. Dada en $\mathbb{R}^n$ una familia k–paramétrica de hipersuperficies $\mathcal{S}^\lambda$ de ecuaciones

$$h(x_1,\dots,x_n;\lambda_1,\dots,\lambda_k)=0,$$

llamamos *envolvente de la familia* a la hipersuperficie $\mathcal{S}$ —si es que la define— obtenida al eliminar las λ_i en las ecuaciones

$$h=0,\quad \frac{\partial h}{\partial\lambda_1}=0,\dots,\frac{\partial h}{\partial\lambda_k}=0.$$

Si las ecuaciones anteriores son diferenciablemente independientes en un abierto de $\mathbb{R}^{n+k}$, entonces definen una subvariedad $\mathcal{H}\subset\mathbb{R}^{n+k}$, $n-1$–dimensional, y su proyección por $\pi=(x_1,\dots,x_n)$ es la envolvente. Normalmente tendremos que las k ecuaciones $h_{\lambda_i}=0$ nos permiten despejar las k funciones[7] $\lambda_i=\lambda_i(x_1,\dots,x_n)$, con lo cual nuestra envolvente tiene por ecuación

$$h(x_1,\dots,x_n;\lambda_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\lambda_k(x_1,\dots,x_n))=0.$$

Aunque de forma general sólo podremos decir que existe un sistema de coordenadas $(u_1,\dots u_{n-1})$ en un entorno de cada punto de nuestra subvariedad $\mathcal{H}\subset\mathbb{R}^{n+k}$, con el que la podremos parametrizar mediante ciertas funciones

$$\begin{aligned} x_1&=x_1(u_1,\dots,u_{n-1}), & x_n&=x_n(u_1,\dots,u_{n-1}),\\ \lambda_1&=\lambda_1(u_1,\dots,u_{n-1}), & \lambda_k&=\lambda_k(u_1,\dots,u_{n-1}),\end{aligned}$$

y la envolvente $\mathcal{S}$, difeomorfa a $\mathcal{H}$ por la proyección $\pi=(x_1,\dots,x_n)$, tendrá estas mismas coordenadas (que llamamos también u_i aunque en

[7] por ejemplo si $|h_{\lambda_i\lambda_j}|\neq 0$, pues entonces $(x_1,\dots,x_n,h_{\lambda_1},\dots,h_{\lambda_k})$ localmente son coordenadas y por tanto

$$\begin{aligned}\lambda_i&=\lambda_i(x_1,\dots,x_n,h_{\lambda_1},\dots,h_{\lambda_k}) \quad\Rightarrow\\ \lambda_{i|\mathcal{H}}&=\lambda_i(x_1,\dots,x_n,0,\dots,0).\end{aligned}$$

rigor hay que pasarlas por el difeomorfismo π), con lo que está definida paramétricamente por las primeras ecuaciones

$$x_1 = x_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \quad x_n = x_n(u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

Teorema 7.16 *En todo punto, la envolvente es tangente a una hipersuperficie de la familia.*

Demostración. Sea $p \in \mathcal{S}$ y $(p, \lambda) \in \mathcal{H}$ el punto que le corresponde por el difeomorfismo π. Como $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}^\lambda$ son de la misma dimensión, basta demostrar que $T_p(\mathcal{S}) \subset T_p(\mathcal{S}^\lambda)$, para ello sea $D_p = \sum f_i \partial_{x_i} \in T_p(\mathcal{S})$ y $\widehat{D}_{(p,\lambda)} = \sum f_i \partial_{x_i} + \sum g_j \partial_{\lambda_j} \in T_{(p,\lambda)}(\mathcal{H})$, el vector tangente correspondiente por π. Entonces como $h = h_{\lambda_j} = 0$ en $\mathcal{H}$, tendremos que

$$\begin{aligned} 0 = \widehat{D}_{(p,\lambda)} h &= \sum f_i(p) h_{x_i}(p, \lambda) + \sum g_j(p, \lambda) h_{\lambda_j}(p, \lambda) \\ &= \sum f_i(p) h_{x_i}(p, \lambda) = D_p(h^\lambda). \end{aligned}$$ ∎

Corolario 7.17 *La envolvente de una familia de hipersuperficies de $\mathbb{R}^{n+1}$ solución de una EDP, también es solución.*

Demostración. Por el resultado anterior para cada $p \in \mathcal{S}$, existe λ tal que $p \in \mathcal{S}^\lambda$ y $T_p(\mathcal{S}) = T_p(\mathcal{S}^\lambda)$, lo cual implica por (7.1), pág.449, que $\mathcal{S}$ es solución. ∎

Nota 7.18 Veamos el mismo resultado sin hacer uso de los teoremas (7.16) y (7.1), en condiciones menos generales. Tenemos que para cada $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ la función

$$g^\lambda(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k),$$

es solución, ahora supongamos que en las k últimas ecuaciones del sistema

$$\begin{aligned} z &= g(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k), \\ 0 &= g_{\lambda_i}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k), \quad \text{para } i = 1, \ldots, k \end{aligned}$$

podemos despejar, las k incógnitas $\lambda_i = \lambda_i(x_1, \ldots, x_n)$, como funciones de las x, por lo tanto la envolvente es,

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \lambda_k(x_1, \ldots, x_n)),$$

y f también es solución, pues para cada punto $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ y $\lambda_0 = (\lambda_1(x_0), \ldots, \lambda_k(x_0))$, se tiene que g^{λ_0} es solución y

$$f(x_0) = g(x_0; \lambda_0),$$
$$f_{x_i}(x_0) = g_{x_i}(x_0; \lambda_0) + \sum g_{\lambda_j}(x_0; \lambda_0) \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i}(x_0) = g_{x_i}(x_0; \lambda_0).$$

Proposición 7.19 *Sea $\varphi\colon U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ una inmersión con $\varphi(U) = \mathcal{S}_k$ una subvariedad k–dimensional y para cada $\lambda \in U$ y $p = \varphi(\lambda)$ sea $\mathcal{S}^\lambda = \{x : h^\lambda(x) = 0\}$ una hipersuperficie tal que*

$$p \in \mathcal{S}^\lambda, \qquad T_p(\mathcal{S}_k) \subset T_p(\mathcal{S}^\lambda),$$

si además $h^\lambda(x)$ es función diferenciable de (x, λ) y existe la envolvente $\mathcal{S}$ de las hipersuperficies $\mathcal{S}^\lambda$, entonces $\mathcal{S}_k \subset \mathcal{S}$.

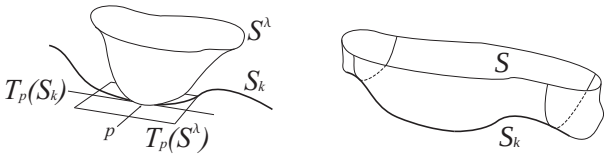


Figura 7.10. Envolvente pasando por $\mathcal{S}_k$

Demostración. Denotemos con $D_j = \varphi_*(\partial_{\lambda_j})$ la base de campos tangentes de $\mathcal{S}_k$. Para cada $\lambda \in U$ tenemos por la primera propiedad que $h(\varphi(\lambda), \lambda) = 0$ y por la segunda que $D_{jp} \in T_p(\mathcal{S}^\lambda)$. Tomemos ahora un punto arbitrario, $p_0 = \varphi(\lambda_0) \in \mathcal{S}_k$, de la subvariedad. Entonces por la segunda en p_0 y derivando en la primera, respecto de λ_j, en λ_0, tendremos que

$$0 = D_{jp_0} h^{\lambda_0} = (\partial_{\lambda_j})_{\lambda_0}(h^{\lambda_0}(\varphi)) = \sum h_{x_i}(p_0, \lambda_0)\varphi_{i\lambda_j}(\lambda_0),$$
$$0 = \sum h_{x_i}(p_0, \lambda_0)\varphi_{i\lambda_j}(\lambda_0) + h_{\lambda_j}(p_0, \lambda_0),$$

y como además $h(p_0, \lambda_0) = 0$, tendremos que $(p_0, \lambda_0) \in \mathcal{H}$ y $p_0 \in \mathcal{S}$. ∎

7.7.3. Método de la envolvente.

El método de las características de Cauchy, visto en la lección anterior, nos permite resolver el PROBLEMA DE CAUCHY que consiste en encontrar una solución de la EDP que pasa por una subvariedad dada de dimensión $n-1$. Para ello es necesario encontrar $2n-1$ integrales primeras del campo característico, que en el caso del plano son 3. Sin embargo el cálculo de 1 integral primera nos permite, con el Método de Lagrange–Charpit, encontrar una integral completa. Veremos ahora que el conocimiento de una integral completa, es decir de una familia de subvariedades solución de $\mathbb{R}^{n+1}$, parametrizadas por $(a_1 \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$g(x_1 \ldots, x_n, z; a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

y por tanto tales que en ellas la función

$$z = f(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n),$$

donde pueda despejarse, es una solución clásica; unido a la noción de *envolvente*, nos permite resolver el PROBLEMA DE CAUCHY en su generalidad, el cual consiste en encontrar una solución de la ecuación, que en $\mathbb{R}^{n+1}$ pase por una subvariedad $n-1$–dimensional dada $\mathcal{S}_{n-1}$.

Nota 7.20 No obstante no debemos esperar que con una integral completa obtengamos todas las soluciones de una EDP, pues por ejemplo si nuestra ecuación está definida por una $F = GH$ y tenemos una integral completa de $G = 0$, también la tenemos de $F = 0$, pero no es esperable que las soluciones de $F = 0$, que lo sean de $H = 0$, las podamos obtener mediante esa integral completa.

Paso 1.- Obtenemos con los métodos conocidos una integral completa de nuestra EDP

$$g(x_1, \ldots, x_n, z; a_1, \ldots, a_n) = g^a(x_i, z),$$

por tanto tenemos una familia $\mathcal{S}^a = \{g^a = 0\}$ de soluciones de la EDP.

Paso 2.- Buscamos coordenadas $\phi = (\lambda_i)$ de $\mathcal{S}_{n-1}$ y para cada $p \in \mathcal{S}_{n-1}$ con coordenadas $\lambda = \phi(p)$, buscamos una solución entre las $\{\mathcal{S}^a\}_{a\in\mathbb{R}^n}$, que denotaremos $\mathcal{S}^\lambda$, que verifique (ver figura (7.10))

$$p \in \mathcal{S}^a \ , \quad T_p(\mathcal{S}_{n-1}) \subset T_p(\mathcal{S}^a).$$

Es decir buscamos $a = (a_1, \dots, a_n)$ tal que si en $\mathcal{S}_{n-1}$ $x_i = x_i(\lambda)$, $z = z(\lambda)$

$$\left.\begin{array}{r} g^a(p) = 0 \\ dg^a\left(i_* \frac{\partial}{\partial \lambda_i}{}_p\right) = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} g^a[x_1(\lambda), \dots, x_n(\lambda), z(\lambda)] = 0, \\ \frac{\partial g^a[x_1(\lambda), \dots, x_n(\lambda), z(\lambda)]}{\partial \lambda_i} = 0. \end{array}$$

Si estas n ecuaciones nos permiten despejar las n incógnitas a_i en función de $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$, tendremos una subfamilia $n-1$–paramétrica de nuestra familia original de hipersuperficies

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}^\lambda = \{h^\lambda = 0\}, \\ &h^\lambda(x, z) = g(x, z; a_1(\lambda), \dots, a_n(\lambda)), \end{aligned}$$

que son soluciones de nuestra EDP y satisfacen que para cada $p \in \mathcal{S}_{n-1}$, con coordenadas $\lambda = \lambda(p)$, $p \in \mathcal{S}^\lambda$ y $T_p(\mathcal{S}_{n-1}) \subset T_p(\mathcal{S}^\lambda)$.

Paso 3.- De los resultados anteriores se sigue que si existe la envolvente $\mathcal{S}$ de $\mathcal{S}^\lambda$, es una solución de la EDP que contiene a $\mathcal{S}_{n-1}$, por tanto obtenemos la envolvente, es decir consideramos el sistema de n ecuaciones

$$h = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \lambda_1} = 0, \dots, \frac{\partial h}{\partial \lambda_{n-1}} = 0,$$

y eliminamos las λ_i.

Ejercicio 7.7.4 Encontrar con este método la solución de $z_x^2 + z_y^2 = 1$, que pasa por la curva $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$.

Ejercicio 7.7.5 Encontrar con este método las soluciones de $x[z_x^2 + z_y^2] - z z_x = 0$, que pasan respectivamente por las curvas:

(1) $\begin{cases} x = 0 \\ z^2 = 4y, \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2 = y = z^2 \\ x > 0, \quad z > 0, \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x = z^2, \\ y = 0. \end{cases}$

Ejercicio 7.7.6 Encontrar con este método la solución de $z_x z_y = 1$, que pasa por la curva $z = 0$, $xy = 1$.

7.7.4. Solución singular.

Hemos visto que el conocimiento de una integral completa

$$z - f(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n).$$

nos permite construir la llamada solución "general" mediante el proceso de la envolvente, pero este proceso, en el que primero seleccionábamos de nuestra familia n–paramétrica de soluciones, una subfamilia $n-1$–paramétrica, hay veces que podemos hacerlo con la familia original, es decir que la envolvente obtenida eliminando las a_i en

$$z = f(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n), \quad f_{a_1} = 0, \ldots, f_{a_n} = 0,$$

nos da una solución que no se obtiene por envolventes de familias $n-1$–paramétricas, en tal caso a esta se la llama "*solución singular*".

Ahora bien derivando

$$F(x_1, \ldots, x_n, f(x;a), f_{x_1}(x;a), \ldots, f_{x_n}(x;a)) = 0,$$

respecto de a_i tenemos

$$F_z f_{a_i} + \sum_{j=1}^{n} F_{z_j} f_{x_j a_i} = 0, \quad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

y si $(x_0, z_0 = f(x_0; a_0))$ es un punto de la envolvente, tendremos de la igualdad anterior que

$$\sum_{j=1}^{n} F_{z_j}(x_0, z_0, f_{x_i}(x_0; a_0)) f_{x_j a_i}(x_0; a_0) = 0, \quad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

y si suponemos que $|f_{a_i x_j}| \neq 0$ [8] entonces se verifica que en el punto $(x_0, z_0, f_{x_i}(x_0; a_0))$

$$F_{z_1} = 0, \ldots, F_{z_n} = 0,$$

por lo que la solución singular está en la proyección de

$$\mathcal{S} = \{F = 0, F_{z_1} = 0, \ldots, F_{z_n} = 0\},$$

[8] lo cual implica que los parámetros a_i son independientes, en el sentido de que no existen $n-1$ funciones $\alpha_i(a_1, \ldots, a_n)$ y una función g para las que

$$f(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = \\ = g(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \alpha_{n-1}(a_1, \ldots, a_n)),$$

pues en caso contrario los n vectores $(f_{a_i x_1}, \ldots, f_{a_i x_n})$ son dependientes pues cada uno se puede poner como combinación de los mismos $n-1$ vectores

$$(f_{a_i x_1}, \ldots, f_{a_i x_n}) = \sum_{j=1}^{n-1} (g_{\alpha_j x_1}, \ldots, g_{\alpha_j x_n}) \alpha_{j a_i}.$$

sin hacer alusión a la integral completa. Para estas ecuaciones se tiene el siguiente resultado.

Proposición 7.21 *Si $F, F_{z_1}, \ldots, F_{z_n}, x_1, \ldots, x_n$ son diferenciablemente independientes en $\mathcal{S}$, entonces la subvariedad $\mathcal{S}$ es solución en el sentido de Lie, de la EDP definida por F si y sólo si $D_p = 0$ para todo $p \in \mathcal{S}$.*

Demostración. En primer lugar en los puntos $p \in \mathcal{S}$, $F_z(p) \neq 0$, pues en caso contrario

$$d_p F = \sum_{i=1}^{n} F_{x_i}(p)dx_i + F_z(p)dz + \sum_{i=1}^{n} F_{z_i}(p)dz_i = \sum_{i=1}^{n} F_{x_i}(p)dx_i,$$

en contra de la hipótesis, por otra parte

$$\begin{aligned} \omega_{|\mathcal{S}} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = dF_{|\mathcal{S}} = [\sum_{i=1}^{n} F_{x_i}dx_i + F_z dz]_{|\mathcal{S}} = \\ &= [\sum_{i=1}^{n}(F_{x_i} + z_i F_z)dx_i]_{|\mathcal{S}} \\ &\Leftrightarrow \quad [F_{x_i} + z_i F_z]_{|\mathcal{S}} = 0, \quad \text{para } i = 1, \ldots, n \\ &\Leftrightarrow \quad D_p = 0, \quad \text{para } p \in \mathcal{S}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 7.22 Debemos observar que puede ocurrir que $\mathcal{S}$ sea subvariedad n–dimensional, se proyecte en una solución de la EDP definida por F, y sin embargo no sea solución en el sentido de Lie, pues $\omega_{|\mathcal{S}} \neq 0$, como por ejemplo para $z = x + z_x z_y$,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{F = 0, F_p = 0, F_q = 0\} \\ &= \{z = x + pq, q = 0, p = 0\} = \{z = x, p = 0, q = 0\}, \end{aligned}$$

la cual se proyecta en la solución $z = x$.

Ejemplo 7.7.5 Consideremos la familia de esferas de radio 1 centradas en el plano xy

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = 1$$

la cual es una integral completa de la EDP $z^2(1 + z_x^2 + z_y^2) = 1$, su envolvente se obtiene eliminando a y b en

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = 1, \quad x - a = 0, \quad y - b = 0,$$

es decir $z = \pm 1$, a la cual llegamos también, como puede demostrar el lector, eliminando p y q en

$$F = 0, \quad F_p = 0, \quad F_q = 0.$$

Ejemplo 7.7.6 Otro ejemplo lo tenemos con las EDP de CLAIRAUT, (ver la Nota (7.15), pág.473, que son

$$z = xz_x + yz_y + f(z_x, z_y),$$

con f una función del plano, las cuales tienen obviamente las integrales completas definidas por la familia de planos

$$z = ax + by + f(a, b),$$

y su solución singular se obtiene eliminando a y b en

$$z = ax + by + f(a, b), \quad x + f_a = 0, \quad y + f_b = 0,$$

la cual coincide con la proyección de

$$F = 0, \quad F_p = 0, \quad F_q = 0.$$

7.8. Definición intrínseca

Podemos dar la definición intrínseca de ecuación en derivadas parciales de primer orden: En primer lugar si en nuestra ecuación no interviene la "z", es decir es de la forma

$$F(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0,$$

entonces $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ y $\{F = 0\}$ es una subvariedad $2n-1$–dimensional de $\mathcal{V} = \mathcal{T}^*(U)$. Y una solución es una función $f(x_1, \dots, x_n)$ para la que

$$\mathcal{S} = \{z_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \ i = 1, \dots, n\} \subset \{F = 0\},$$

es decir $\mathcal{S}$ es una subvariedad n–dimensional de $\{F = 0\}$, que tiene coordenadas (x_i) y en la que (ver pág.396 y siguientes)

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} z_i dx_i = df,$$

es decir en la que λ es exacta y por tanto $\Lambda = 0$.

Definición. Llamaremos *ecuación en derivadas parciales de primer orden* en una variedad diferenciable $\mathcal{U}$, a una hipersuperficie $\mathcal{F}$ de su fibrado cotangente $\mathcal{T}^*(\mathcal{U})$, es decir una subvariedad de dimensión $2n-1$.

Llamaremos *solución* de esta ecuación a toda subvariedad $\mathcal{S}$ de $\mathcal{F}$, de dimensión n, en la que $\Lambda = 0$.

En primer lugar localmente

$$\mathcal{F} = \{F = 0\},$$

y se sigue del LEMA DE POINCARE (3.22), pág.165, que si una subvariedad solución $\mathcal{S}$ existe, como en ella $d\lambda = \Lambda = 0$, λ es localmente exacta en ella y si además tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, entonces en ella $\lambda = df$, para f una función de $(x_1, \ldots, x_n)$, que es solución de la EDP definida por F.

Si por el contrario, nuestra ecuación contiene la "z", es decir es de la forma

$$G(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0,$$

entonces podemos reducirla a una del tipo anterior del siguiente modo: Definimos la función

$$F(x_1, \ldots, x_{n+1}, z_1, \ldots, z_{n+1}) = \\ = G(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, -\frac{z_1}{z_{n+1}}, \ldots, -\frac{z_n}{z_{n+1}}).$$

Si $f(x_1, \ldots, x_{n+1})$ es solución de $\{F = 0\}$, entonces para cada constante $c \in \mathbb{R}$ las subvariedades

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = c,$$

son solución de $\{G = 0\}$, pues si despejamos x_{n+1} en ellas, $x_{n+1} = g(x_1, \ldots, x_n)$, entonces la función g es solución de $\{G = 0\}$, pues derivando respecto de x_i en

$$f(x_1, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n)) = c,$$

tendremos que

$$f_{x_i} + f_{x_{n+1}} g_{x_i} = 0,$$

y por tanto para $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$G(x, g(x), g_{x_1}(x), \ldots, g_{x_n}(x)) = G(x, g(x), -\frac{f_{x_1}}{f_{x_{n+1}}}, \ldots, -\frac{f_{x_n}}{f_{x_{n+1}}}) \\ = F(x, g(x), f_{x_1}(x, g(x)), \ldots, f_{x_{n+1}}(x, g(x))) = 0.$$

No obstante la definición intrínseca de estas EDP está en el Fibrado de Jets de funciones de orden 1, (ver pág.397).

Definición. Llamaremos *ecuación en derivadas parciales de primer orden* en una variedad diferenciable $\mathcal{U}$, a una hipersuperficie $\mathcal{F}$ de su fibrado de jets de orden 1.

Llamaremos *solución* de esta ecuación a toda subvariedad $\mathcal{S}$ de $\mathcal{F}$, de dimensión n, con coordenadas (x_i), en la que $\omega = 0$.

En primer lugar localmente existe $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{J}^1(\mathcal{U}))$, con diferencial no nula, tal que $\mathcal{F} = \{F = 0\}$. Y si $\mathcal{S}$ es una solución, $z = f(x_i)$ y f es una función solución de la EDP definida por F, pues $\omega_{|\mathcal{S}} = dz - \sum_{i=1}^n z_i dx_i = 0$, por tanto

$$\mathcal{S} = \{z = f(x_1, \dots, x_n), z_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},\ i = 1, \dots, n\} \subset \{F = 0\}.$$

7.9. Teoría de Hamilton–Jacobi

Definición. Recordemos (ver la pág.391 y ss.) que llamamos *coordenadas simplécticas* en un abierto de $\mathcal{V} = \mathcal{T}^*(\mathcal{U})$ a cualesquiera $2n$ funciones suyas u_i, v_i, tales que

$$\Lambda = \sum_{i=1}^n dv_i \wedge du_i,$$

en cuyo caso automáticamente son sistema de coordenadas pues si sus diferenciales fuesen dependientes en un punto tendrían un vector incidente, que estaría en el radical de Λ, que no tiene.

Nota 7.23 La importancia de las coordenadas simplécticas radican en que resuelven simultáneamente dos problemas:

1. Hallar una integral completa para una familia parametrizada por a_1 de EDP definidas por una función $h = v_1$,

$$h(x_1, \dots, x_n, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}) = a_1,$$

que es $S^a = \{v_i = a_i\}$, ya que S^a es n–dimensional, en ella $\Lambda_{|S^a} = 0$ y $S^a \subset \{h = a_1\}$.

2. Hallar las soluciones de la EDO de Hamilton $D = D_h$, definida por $h = v_1$,

$$\begin{aligned} x_i'(t) &= h_{z_i}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n), \\ z_i'(t) &= -h_{x_i}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n), \end{aligned} \tag{7.5}$$

pues $Du_1 = 1$ y el resto $Dv_i = Du_j = 0$, ya que

$$dv_1 = -i_D\Lambda = \sum_{i=1}^{n}(Du_i)dv_i - \sum_{i=1}^{n}(Dv_i)du_i,$$

(Realmente esta propiedad la tienen obviamente todas los campos Hamiltonianos correspondientes a las funciones u_i y v_i, es decir en esas coordenadas tienen expresión canónica).

A continuación explicamos dos métodos de construcción de tales coordenadas.

7.9.1. Método de Jacobi.

Este método se utiliza para resolver EDP de primer orden en las que no interviene la variable "z".

Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$h(x_1, \dots, x_n, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}) = a_1,$$

definida por $\{h = a_1\}$ en $\mathcal{V} = \mathcal{T}^*(U)$. Consideremos $D = D_1$ el campo hamiltoniano correspondiente a $v_1 = h$. Del teorema de clasificación local de campos se sigue que localmente D tiene $2n-1$ integrales primeras con diferenciales independientes y por tanto $2(n-1)$ integrales primeras con diferenciales independientes de dv_1. Sea v_2 una de ellas y sea D_2 su campo hamiltoniano correspondiente, entonces por (6.54), pág.395

$$(v_1, v_2) = D_1 v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad [D_1, D_2] = D_{(v_1,v_2)} = 0.$$

Entonces como D_1 y D_2 son independientes D_1 y D_2 generan una distribución involutiva y se sigue del teorema de Frobenius que localmente D_1 y D_2 tienen $2n-2$ integrales primeras comunes con diferenciales

independientes. Como v_1 y v_2 lo son, tendremos $2(n-2)$ integrales primeras comunes diferenciablemente independientes entre sí y de v_1 y v_2. Sea v_3 una de ellas y sea D_3 su campo hamiltoniano correspondiente. Como antes se tiene que

$$[D_1, D_3] = [D_2, D_3] = 0,$$

y D_1, D_2, D_3 generan una distribución involutiva. Por tanto localmente tienen $2(n-3)$ integrales primeras distintas de v_1, v_2 y v_3. Siguiendo este proceso podemos construir n funciones, $v_1, \ldots, v_n$, diferenciablemente independientes, con campos hamiltonianos correspondientes $D_1, \ldots, D_n$, tales que $[D_i, D_j] = 0$ para $i, j = 1, \ldots, n$.

Teorema 7.24 *Para cada* $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Lambda = 0$ *en la subvariedad* n*–dimensional*

$$\mathcal{S}^a = \{v_1 = a_1, \ldots, v_n = a_n\}.$$

Demostración. Como

$$D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{D}(\mathcal{S}^a),$$

es una base de campos, se tiene que

$$\Lambda(D_i, D_j) = i_{D_i}\Lambda(D_j) = -D_j v_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda = 0. \quad \blacksquare$$

Nota 7.25 Ahora tenemos que

$$\mathcal{S}^a = \{v_1 = a_1, v_2 = a_2, \ldots, v_n = a_n\} \subset \{h = a_1\},$$

y en ella $\Lambda = d\lambda = 0$, por tanto se sigue del Lema de Poincare (3.22), pág.165, que en $\mathcal{S}^a$, $\lambda = d\phi^a$. Ahora bien si $x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n$ son coordenadas, $x_1, \ldots, x_n$ lo son en $\mathcal{S}^a$ y tendremos que

$$\phi^a = \phi^a(x_1, \ldots, x_n),$$

y para cada elección de $b \in \mathbb{R}$ y $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, con a_1 fijo

$$f(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n, b) = \phi^a(x_1, \ldots, x_n) + b,$$

es solución de nuestra EDP $h(x, z_x) = a_1$, por tanto es una *integral completa de la ecuación*.

Ejercicio 7.9.1 Resolver la ecuación $xz_x^2 + yz_y^2 = z$, utilizando el método de Jacobi, reduciéndola antes a las de este tipo.

Ejercicio 7.9.2 Aplicar el método de Jacobi a una EDP del tipo $F(u_x, u_y, u_z) = 0$ y encontrar una integral completa de $u_x + u_y + u_z = u_x u_y u_z$.

Ejercicio 7.9.3 Aplicar el método de Jacobi a una EDP del tipo $F(x, u_x, u_z) = G(y, u_y, u_z)$ y encontrar una integral completa de

$$2x^2 y u_x^2 u_z = x^2 u_y + 2y u_x^2.$$

Ejercicio 7.9.4 Aplicar el método de Jacobi a una EDP de Clairaut

$$xu_x + yu_y + zu_z = G(u_x, u_y, u_z),$$

y encontrar una integral completa de

$$(u_x + u_y + u_z)(xu_x + yu_y + zu_z) = 1.$$

Nota 7.26 En los términos de la Nota (7.25), veamos que tenemos coordenadas simplécticas, para ello consideremos las integrales primeras, $v_1 = h, v_2, \ldots, v_n$, de D y supongamos que las (x_i, v_i) forman un sistema de coordenadas, en cuyo caso las x_i serán un sistema de coordenadas en cada subvariedad n–dimensional

$$\mathcal{S}_a = \{v_1 = a_1, \ldots, v_n = a_n\},$$

para cada $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y hemos visto que en estas subvariedades $\Lambda = 0$ y por el LEMA DE POINCARE (3.22), pág.165, $\lambda_{|\mathcal{S}_a} = d\phi^a$. Supongamos que $\phi^a(x) = \phi(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n)$ es función diferenciable de las x y las a, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda_{|\mathcal{S}_a} = \sum_{i=1}^n \phi_{x_i}(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n) dx_i \quad &\Rightarrow \\
\sum_{i=1}^n z_i dx_{i|\mathcal{S}_a} = \sum_{i=1}^n \phi_{x_i}(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n) dx_i \quad &\Rightarrow \\
z_{i|\mathcal{S}_a} = \phi_{x_i}(x_1, \ldots, x_n; v_1, \ldots, v_n)_{|\mathcal{S}_a} \quad &\Rightarrow \\
z_i = \phi_{x_i}(x_1, \ldots, x_n; v_1, \ldots, v_n).
\end{aligned}$$

Teorema 7.27 *Si $x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n$ son diferenciablemente independientes y ϕ es función diferenciable de ellas, entonces las funciones $(u_i = \phi_{v_i}, v_j)$ son un sistema de coordenadas simplécticas. (Además $|\phi_{x_i v_j}| \neq 0$).*

Demostración. En el sistema de coordenadas (x_i, v_i)

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \phi_{x_i} dx_i = d\phi - \sum_{i=1}^{n} \phi_{v_i} dv_i = d\phi - \sum_{i=1}^{n} u_i dv_i \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Lambda = d\lambda = \sum_{i=1}^{n} dv_i \wedge du_i. \quad \blacksquare$$

Corolario 7.28 *En las coordenadas simplécticas (u_i, v_j) del resultado anterior*

$$D_i = \frac{\partial}{\partial u_i},$$

para los campos D_i tales que $i_{D_i}\Lambda = -dv_i$, construidos en el método de Jacobi. En particular las u_j, para $j \neq i$ son integrales primeras de D_i.

Nota 7.29 Se sigue que, en las coordenadas (u_i, v_i), la curva integral del campo $D = D_h$ $(h = v_1)$ por ejemplo, pasando en $t = 0$ por el punto de coordenadas (b_i, a_i) es para $j, k = 1, \ldots, n$, y $k \neq 1$

$$u_1(t) = t + b_1, \quad u_k(t) = b_k, \quad v_j(t) = a_j,$$

y en términos de las coordenadas (x_i, z_i) la trayectoria de esta curva es

$$\begin{aligned} z_i &= \phi_{x_i}(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n), \\ b_k &= \phi_{v_k}(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n), \quad \text{para } k \neq 1. \end{aligned}$$

y si la queremos parametrizada consideramos también $t + b_1 = \phi_{v_1}(x, a)$. Esto explica la Teoría de Hamilton–Jacobi que estudiaremos en el próximo epígrafe.

Ejercicio 7.9.5 Resolver la ecuación diferencial definida por el campo

$$2x_1 z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2 z_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_3 z_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3^2 \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

7.9.2. Ecuación de Hamilton–Jacobi.

En el análisis del método de Jacobi para resolver una EDP partíamos del conocimiento de las funciones v_i —que se obtienen básicamente integrando una ecuación diferencial de Hamilton—, y obteníamos una integral completa ϕ de la EDP. A continuación veremos que este

proceso es reversible, en el sentido de que el conocimiento de una integral completa de la EDP de Hamilton–Jacobi

$$h(x_1, \dots, x_n, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}) = a_1,$$

que en ocasiones podemos encontrar por otros medios —variables separadas por ejemplo—, nos permite resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de Hamilton

$$\begin{aligned} x_i'(t) &= h_{z_i}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n), \\ z_i'(t) &= -h_{x_i}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n), \end{aligned} \tag{7.6}$$

Este útil método, descubierto por HAMILTON y JACOBI da lugar a la teoría que lleva su nombre.

Teorema 7.30 *Sea $\phi = \phi(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n)$ una integral completa de la familia de EDP parametrizada por $a_1 \in \mathbb{R}$*

$$h(x_1, \dots, x_n, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}) = a_1.$$

Si el determinante $|\phi_{a_i x_j}| \neq 0$, podemos despejar las a_i en el sistema $z_i = \phi_{x_i}(x, a)$, $v_i = a_i(x, z)$ y definir $u_i = \phi_{a_i}(x, v)$, entonces las funciones (u_i, v_i) son coordenadas simplécticas, siendo $v_1 = h$.

Demostración. Como $|\phi_{a_i x_j}| \neq 0$, podemos despejar las a_i en $z_i = \phi_{x_i}(x, a)$, como $v_i = a_i(x, z)$ y $h(x, z) = h(x, \phi_x(x, v)) = v_1$. Además las (x_i, v_i) son coordenadas, pues $z_i = \phi_{x_i}(x, v)$ y en ellas

$$d\phi = \sum \phi_{x_i} dx_i + \sum \phi_{v_i} dv_i = \lambda + \sum u_i dv_i,$$

y basta aplicar la diferencial. ∎

Corolario 7.31 *Sea $\phi = \phi(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n)$ una integral completa de la familia de EDP parametrizada por $a_1 \in \mathbb{R}$*

$$h(x_1, \dots, x_n, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}) = a_1.$$

Si el determinante $|\phi_{a_i x_j}| \neq 0$, para cada elección $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, las $2n - 1$ ecuaciones

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_i}(x, a) = b_i, \quad (i \neq 1), \qquad z_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x, a),$$

definen una solución de la EDO (7.6), del campo hamiltoniano D de h, para la que ϕ_{a_1} es el tiempo.

Demostración. Por (7.23) y porque en los términos anteriores las curvas son $u_i = b_i$, para $i \neq 1$ y $v_i = a_i$. ∎

Para estudiar las curvas integrales de una ecuación de Hamilton que dependa del tiempo, remitimos al lector al apéndice (7.14), de la página 563.

Ejemplo 7.9.1 El problema de los dos cuerpos. Consideremos de nuevo este problema que vimos en la pág.404, cuya curva es solución del sistema de ecuaciones diferenciales, para $k = GM$

$$\begin{aligned} x' &= z_1 = h_{z_1}, & z_1' &= -kx/(x^2+y^2)^{3/2} = -h_x, \\ y' &= z_2 = h_{z_2}, & z_2' &= -ky/(x^2+y^2)^{3/2} = -h_y, \end{aligned}$$

que es un sistema *Hamiltoniano* y corresponde a la función energía

$$h = \frac{z_1^2 + z_2^2}{2} - \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

Ahora para resolverla consideramos la EDP de Hamilton–Jacobi asociada

$$\frac{\phi_x^2 + \phi_y^2}{2} = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} + a,$$

o en coordenadas polares

$$\frac{1}{2}\left(\phi_\rho^2 + \frac{\phi_\theta^2}{\rho^2}\right) = \frac{k}{\rho} + a,$$

pues se tiene $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, lo cual implica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\rho} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial\theta} &= -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial x} + \rho\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} \end{aligned}$$

y considerando variables separadas tiene la integral completa

$$\phi = b\theta + \int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{\frac{2k}{r} + 2a - \frac{b^2}{r^2}}\,dr,$$

ahora por el teorema, las constantes a y b son funciones, la a ya sabemos que es la energía h, pero ¿quién es la constante b?, para saberlo tenemos que despejarla (junto con la a) en el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} z_1 = \phi_x \\ z_2 = \phi_y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \phi_\rho = \cos\theta\phi_x + \operatorname{sen}\theta\phi_y = z_1\cos\theta + z_2\operatorname{sen}\theta \\ \phi_\theta = -\rho\operatorname{sen}\theta\phi_x + \rho\cos\theta\phi_y = -yz_1 + xz_2 \end{cases} \\
&\qquad\qquad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2k}{\rho} + 2a - \dfrac{b^2}{\rho^2}} = z_1\cos\theta + z_2\operatorname{sen}\theta \\ b = -yz_1 + xz_2 \end{cases} \\
&\qquad\qquad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2a = \dfrac{(z_1x + z_2y)^2}{\rho^2} - \dfrac{2k}{\rho} + \dfrac{b^2}{\rho^2} \\ \qquad = z_1^2 + z_2^2 - \dfrac{2c}{\rho} \\ b = -z_1y + z_2x \end{cases}
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

de donde se sigue que nuestras constantes son: $a = h$, la energía de m_1 (dividida por m_1, es decir la energía por unidad de masa) y el módulo del momento angular (por unidad de masa), $(0, 0, b)$ pues $b = -x'y + y'x = \rho^2\theta'$.

Ahora el Teorema nos asegura que nuestra curva la despejamos de las ecuaciones

$$
\left.\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial a} &= t \\ \frac{\partial\phi}{\partial b} &= \theta_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} \phi = b\theta + \displaystyle\int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{\frac{2c}{r} + 2a - \frac{b^2}{r^2}}\, dr, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial a} = \displaystyle\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2k}{r} + 2a - \frac{b^2}{r^2}}}, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial b} = \theta - b\displaystyle\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2k}{r} + 2a - \frac{b^2}{r^2}}} \end{cases}
$$

7.9.3. Geodésicas de una variedad Riemanniana.

Consideremos una variedad Riemanniana $(\mathcal{V}, g)$, con la conexión de Levi–Civitta asociada (ver la pág.179). Como en el caso anterior los fibrados tangente y cotangente son canónicamente difeomorfos

$$\phi\colon D_p \in T(\mathcal{V}) \to i_{D_p}g \in T^*(\mathcal{V}),$$

por lo que tenemos una 2–forma canónica en $T(\mathcal{V})$ (y por tanto campos Hamiltonianos), que en coordenadas (x_i) de $\mathcal{V}$ y las correspondientes (x_i, z_i) en $T^*(\mathcal{V})$ vale

$$\phi^*\Lambda = \phi^*(\sum dz_i \wedge dx_i) = \sum dp_i \wedge dx_i.$$

pues la coordenada x_i del fibrado tangente es $x_i = \phi^* x_i$ y definimos $p_i = \phi^* z_i$, la cual en términos de las coordenadas (x_i, z_i) del fibrado tangente es $p_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} z_j$; donde estamos considerando

$$g_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \mathbf{G} = (g_{ij}) = (g^{ij})^{-1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \overset{\nabla}{} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

siendo (x_i, p_i) sistema de coordenadas pues $|p_{iz_j}| = |g_{ij}| \neq 0$.

Recordemos que el campo de las geodésicas está en el fibrado tangente y que en el sistema de coordenadas (x_i, z_i) es

$$Z = \sum_{i=1}^n z_i \partial_i - \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k z_i z_j \right] \frac{\partial}{\partial z_k},$$

y cuyas curvas integrales proyectadas son las geodésicas de nuestra variedad.

Definición. En el fibrado tangente tenemos una función canónica que llamamos *energía cinética*,

$$h(D_p) = \frac{D_p \cdot D_p}{2}. \tag{7.8}$$

En coordenadas (x_i, z_i) y (x_i, p_i) se tienen las expresiones

$$h = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^t \mathbf{G} \mathbf{z} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^t \mathbf{G} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{z} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} p_i p_j.$$

En (7.64), pág.559, se demuestra que el campo geodésico es el Hamiltoniano de h, para $\phi^*\Lambda$, por tanto en las coordenadas (x_i, p_i) se expresa

$$Z = \sum_{i=1}^n h_{p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n h_{x_i} \frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{7.9}$$

y sus curvas integrales satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales en las coordenadas (x_i, p_i)

$$\begin{aligned} x_i' &= h_{p_i}(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n), \quad i = 1, \dots, n \\ p_i' &= -h_{x_i}(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

por lo que, para resolverlo, consideramos la *Ecuación de Hamilton–Jacobi* asociada a este problema

$$h(x_1, \dots, x_n, \phi_{x_1}, \dots, \phi_{x_n}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \phi_{x_i} \phi_{x_j} = a_1.$$

En el caso particular de que la variedad sea bidimensional con coordenadas (u, v) y llamemos

$$E = \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\partial}{\partial v},$$

la *Ecuación de Hamilton–Jacobi* asociada es

$$\frac{1}{2} \frac{G\phi_u^2 - 2F\phi_u\phi_v + E\phi_v^2}{EG - F^2} = a_1.$$

Ejemplo 7.9.2 Geodésicas de un elipsoide. Consideremos ahora el caso particular de que nuestra superficie sea un elipsoide (ver Courant–Hilbert, Tomo II, pág.112)

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1,$$

el cual admite la parametrización —si $a, b, c > 0$—

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{a(u-a)(v-a)}{(b-a)(c-a)}}, \\ y &= \sqrt{\frac{b(u-b)(v-b)}{(a-b)(c-b)}}, \\ z &= \sqrt{\frac{c(u-c)(v-c)}{(b-c)(a-c)}}, \end{aligned}$$

por lo tanto, en este caso tendremos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} &= x_u\frac{\partial}{\partial x} + y_u\frac{\partial}{\partial y} + z_u\frac{\partial}{\partial z},\\ \frac{\partial}{\partial v} &= x_v\frac{\partial}{\partial x} + y_v\frac{\partial}{\partial y} + z_v\frac{\partial}{\partial z},\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}E &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = (u-v)g(u),\\ F &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0,\\ G &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = (v-u)g(v),\end{aligned}$$

para

$$g(s) = \frac{s}{4(a-s)(b-s)(c-s)}.$$

y tendremos que resolver la EDP

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\phi_u^2}{E} + \frac{\phi_v^2}{G}\right) = a_1,$$

y si consideramos $\phi = \varphi(u) + \gamma(v)$, entonces φ y γ deben satisfacer

$$\frac{\varphi'(u)^2}{(u-v)g(u)} + \frac{\gamma'(v)^2}{(v-u)g(v)} = 2a_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\varphi'(u)^2}{g(u)} - \frac{\gamma'(v)^2}{g(v)} = 2a_1(u-v),$$

que podemos resolver en variables separadas, obteniendo

$$\phi(u,v,a_1,a_2) = \int_{u_0}^{u}\sqrt{2a_1 g(s)(s+a_2)}ds + \int_{v_0}^{v}\sqrt{2a_1 g(s)(s+a_2)}ds,$$

de donde obtenemos, derivando respecto de a_2 y puesto que a_1 es una constante, que las geodésicas sobre un elipsoide satisfacen la ecuación

$$\int_{u_0}^{u}\sqrt{\frac{g(s)}{s+a_2}}ds + \int_{v_0}^{v}\sqrt{\frac{g(s)}{s+a_2}}ds = cte.$$

Ejemplo 7.9.3 Geodésicas de una esfera.

Si nuestra superficie es una esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

la cual admite la parametrización

$$\begin{aligned}x &= \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\\ y &= \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\\ z &= \cos\theta,\end{aligned}$$

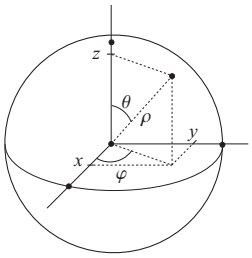


Figura 7.11. Coordenadas esféricas

en las coordenadas esféricas (φ, θ), tendremos que

$$E = \operatorname{sen}^2\theta, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

pues se tiene

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial y},$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \cos\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} - \operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial z},$$

y la función energía es

$$h = \frac{1}{2}(z_1^2\operatorname{sen}^2\theta + z_2^2) = \frac{1}{2}\frac{p_1^2 + p_2^2\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta},$$

y el campo geodésico

$$Z = h_{p_1}\partial_\varphi + h_{p_2}\partial_\theta - h_\varphi\partial_{p_1} - h_\theta\partial_{p_2},$$

y como $h_\varphi = 0$, tendremos que $p_1 = z_1E + z_2F = z_1E = \varphi'\operatorname{sen}^2\theta$ es una integral primera de Z.

Ahora la *ecuación de Hamilton–Jacobi* correspondiente es

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\phi_\varphi^2 + \operatorname{sen}^2\theta\phi_\theta^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) = a,$$

la cual tiene una integral completa en variables separadas

$$\phi(\varphi, \theta, a, b) = b\varphi + \int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{2a - \frac{b^2}{\operatorname{sen}^2 s}}ds,$$

y la geodésica la obtenemos haciendo $\phi_b = \varphi_0$, lo cual implica (tomando $k = 2a/b^2$)

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{b/\operatorname{sen}^2 s}{\sqrt{2a - \frac{b^2}{\operatorname{sen}^2 s}}}\,ds = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{ds}{\operatorname{sen} s\sqrt{k\operatorname{sen}^2 s - 1}}, \tag{7.10}$$

y esta integral podemos resolverla considerando que

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{Ax^2 + Bx - C}} = \frac{1}{\sqrt{C}}\operatorname{arc\,sen}\frac{Bx - 2C}{|x|\sqrt{B^2 + 4AC}},$$

pues haciendo el cambio $\operatorname{sen}^2 s = x$ tendremos que

$$\begin{aligned}\varphi - \varphi_0 &= \int_{\operatorname{sen}^2\theta_0}^{\operatorname{sen}^2\theta} \frac{dx}{2x\sqrt{1-x}\sqrt{kx-1}} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{(k+1)x-2}{x\sqrt{(k+1)^2-4k}}\Bigg]_{\operatorname{sen}^2\theta_0}^{\operatorname{sen}^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{(k+1)x-2}{(k-1)x}\Bigg]_{\operatorname{sen}^2\theta_0}^{\operatorname{sen}^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{(k+1)\operatorname{sen}^2\theta-2}{(k-1)\operatorname{sen}^2\theta} - \alpha_0,\end{aligned}$$

y girando la esfera para que $\alpha_0 - \varphi_0 = \pi/4$, tendremos

$$1 - 2\operatorname{sen}^2\varphi = \cos 2\varphi = \operatorname{sen}(2\varphi + \pi/2) = \frac{(k-1+2)\operatorname{sen}^2\theta - 2}{(k-1)\operatorname{sen}^2\theta} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi = \operatorname{sen}^2\theta + \frac{2\operatorname{sen}^2\theta - 2}{k-1}$$

$$(k-1)y^2 = z^2$$

y esto tiene dos soluciones, para $c = \pm\sqrt{k-1}$

$$z = cy,$$

es decir que nuestra geodésica está sobre un plano que pasa por el origen y por tanto sobre un círculo máximo de la esfera.

Podemos demostrar esto también observando que a y b las despejamos de las ecuaciones

$$p_1 = \phi_\varphi = b, \qquad p_2 = \phi_\theta,$$

y ya sabíamos que p_1 era constante en las trayectorias. Además como vimos antes $p_1 = \varphi' \operatorname{sen}^2\theta = b$ y a lo largo de una trayectoria geodésica $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, las componentes del momento angular $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$

$$\begin{aligned}yz' - zy' &= -\varphi' \cos\varphi \cos\theta \operatorname{sen}\theta - \theta' \operatorname{sen}\varphi, \\ zx' - xz' &= -\varphi' \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \operatorname{sen}\theta + \theta' \cos\varphi, \\ xy' - yx' &= \varphi' \operatorname{sen}^2\theta,\end{aligned}$$

son constantes A, B y $C = b$, lo cual es obvio para la tercera (y por lo tanto para las dos primeras por la simetría del problema en las coordenadas x, y, z). No obstante para las otras dos se demuestra que tienen

derivada nula, utilizando que $b = \varphi' \operatorname{sen}^2\theta$ y que

$$\varphi' = \frac{\theta'}{\operatorname{sen}\theta\sqrt{k\operatorname{sen}^2\theta - 1}},$$

que se obtiene derivando respecto de t en la ecuación (7.10). En definitiva nuestra geodésica está en el plano perpendicular al momento angular, $Ax + By + Cz = 0$, pues

$$Ax + By + Cz = (yz' - zy')x + (zx' - xz')y + (xy' - yx')z = 0,$$

por tanto nuestra geodésica, que está en la esfera y en el plano, está en un círculo máximo. (Veremos de nuevo esto, bajo otro punto de vista en la pág.542).

Veámoslo ahora con las coordenadas $x_1 = x$, $x_2 = y$. En este caso tendremos que

$$\partial_{x_1} = \partial_x - \frac{x}{z}\partial_z, \qquad \partial_{x_2} = \partial_y - \frac{y}{z}\partial_z,$$

y por tanto

$$E = 1+\frac{x^2}{z^2} = \frac{1-y^2}{z^2}, \quad F = \frac{xy}{z^2}, \quad G = 1+\frac{y^2}{z^2} = \frac{1-x^2}{z^2}, \qquad EG-F^2 = \frac{1}{z^2},$$

y la Ecuación de Hamilton–Jacobi es

$$(1-x^2)\phi_x^2 - 2\phi_x\phi_y xy + (1-y^2)\phi_y^2 = 2a_1,$$

y la resolvemos por Lagrange–Charpit, considerando que si llamamos F a la función que la define, $-(F_x + pF_z) = -F_x = 2xp_1^2 + 2yp_1p_2 = p_1(2xp_1 + 2yp_2)$ y $-F_y = p_2(2xp_1 + 2yp_2)$ por tanto tenemos la integral primera del campo característico p_2/p_1 y en $p_2 = bp_1$, $F = 2a_1$, llamando $L^2 = 1 + b^2$ y $t = x + by$

$$(1-x^2)p_1^2 - 2bp_1^2xy + (1-y^2)b^2p_1^2 = 2a_1 \quad \Rightarrow$$
$$p_1 = \sqrt{\frac{2a_1}{1+b^2-(x+by)^2}} = \sqrt{\frac{2a_1}{L^2-t^2}},$$

de donde

$$d\phi - p_1dx - p_2dy = d\phi - \sqrt{\frac{2a_1}{L^2-t^2}}dx - b\sqrt{\frac{2a_1}{L^2-t^2}}dy = d(\phi - \sqrt{2a_1}\operatorname{arc\,sen}\frac{t}{L}),$$

y tenemos una integral completa de la Ecuación de Hamilton–Jacobi,

$$\phi = \sqrt{2a_1}\,\operatorname{arc\,sen}\frac{t}{L},$$

ahora consideramos la integral primera ϕ_b del campo geodésico y las curvas geodésicas $\phi_b = cte$, donde denotaremos $u = (x+by)/\sqrt{1+b^2} = t/L$, $v = (y-xb)/\sqrt{1+b^2}$, que representa un giro en el plano x, y

$$\begin{aligned} cte = \phi_b &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{L^2}}}\left(\frac{yL - \frac{(x+by)b}{L}}{L^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{y-xb}{L^3} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{v}{L^2} \\ cte &= \frac{v^2}{1-u^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = k\ v^2 + u^2, \end{aligned}$$

que es la ecuación de una elipse y sobre la esfera un círculo máximo pues

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-u^2-v^2} = \sqrt{k-1}\ v.$$

Ejemplo 7.9.4 Geodésicas de un cono. Si nuestra superficie es un cono

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

el cual admite la parametrización

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\,\operatorname{sen}\theta, \quad z = \rho,$$

tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\rho} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial\theta} &= -\rho\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial x} + \rho\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

y por tanto

$$E = 2, \quad F = 0, \quad G = \rho^2,$$

y la *ecuación de Hamilton–Jacobi* correspondiente es

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\phi_\rho^2}{2} + \frac{\phi_\theta^2}{\rho^2}\right) = a,$$

la cual tiene una integral completa en variables separadas

$$\phi(\rho,\theta,a,b)=\frac{b\theta}{\sqrt{2}}+\int\sqrt{4a-\frac{b^2}{\rho^2}}d\rho,$$

y la geodésica la obtenemos haciendo $\phi_b=\theta_0$,

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{\sqrt{2}}-\theta_0&=b\int\frac{d\rho}{\rho\sqrt{4a\rho^2-b^2}}\\&=\operatorname{arcsec}\left|\frac{2\rho\sqrt{a}}{b}\right|,\end{aligned}$$

pues $\int dx/x\sqrt{x^2-k}=(1/k)\operatorname{arcsec}|x/k|$, y se sigue que

$$\rho\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}-\theta_0\right)=cte,$$

y sabiendo que la ecuación de las rectas en coordenadas polares del plano (ρ',θ') es

$$\rho'\cos(\theta'-\alpha)=cte,$$

se sigue que cortando el cono por una generatriz y desarrollándolo para hacerlo plano, las geodésicas se transforman en rectas.

Ejemplo 7.9.5 Geodésicas de un toro. Si nuestra superficie es un toro que parametrizamos

$$x=(r+\cos\theta)\cos\varphi,\quad y=(r+\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi,\quad z=\operatorname{sen}\theta,$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}&=-\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial}{\partial y}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial z},\\\frac{\partial}{\partial\varphi}&=-(r+\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial}{\partial x}+(r+\cos\theta)\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$E=1,\quad F=0,\quad G=(r+\cos\theta)^2,$$

y la *ecuación de Hamilton–Jacobi* correspondiente es

$$\frac{1}{2}\left(\phi_\theta^2 + \frac{\phi_\varphi^2}{(r+\cos\theta)^2}\right) = a,$$

la cual tiene la integral completa

$$\phi(\theta,\varphi,a,b) = b\varphi + \int \sqrt{2a - \frac{b^2}{(r+\cos\theta)^2}}\,d\theta,$$

y la geodésica la obtenemos haciendo $\phi_b = \varphi_0$, lo cual implica

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{b\,d\theta}{(r+\cos\theta)\sqrt{2a(r+\cos\theta)^2 - b^2}}.$$

Ejercicio 7.9.6 Encontrar las geodésicas del plano mediante el método de Hamilton–Jacobi. Idem del cilindro.

Ejercicio 7.9.7 Encontrar mediante el método de Hamilton–Jacobi las geodésicas de la métrica de curvatura constante negativa $K = -1$ en el disco unidad

$$\frac{(1-x^2-y^2)(dx\oplus dx + dy\oplus dy) + (xdx+ydy)\oplus(xdx+ydy)}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

Ejercicio 7.9.8 Encontrar mediante el método de Hamilton–Jacobi las geodésicas de la métrica de curvatura constante positiva $K = 1$ en el plano

$$\frac{(1+x^2+y^2)(dx\oplus dx + dy\oplus dy) - (xdx+ydy)\oplus(xdx+ydy)}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

7.10. Introducción al cálculo de variaciones

El *cálculo de variaciones* es una útil herramienta que nos permite resolver problemas en los que se pregunta qué curva, entre todas las que unen dos puntos, minimiza (maximiza ó da un valor estacionario) a un cierto funcional; qué superficie, entre todas las que contienen un borde dado, minimiza (maximiza ó da un valor estacionario) a un cierto funcional, etc. Muchos fenómenos de la Física están íntimamente relacionados con el *cálculo de variaciones*, por ejemplo un rayo de luz sigue, atravesando distintos medios, la trayectoria más rápida; la forma de un cable que cuelga es la que minimiza la energía potencial; las pompas de jabón maximizan el volumen con una superficie dada, etc. Estos hechos conocidos antes de EULER, sugerían que la Naturaleza en algún sentido "minimiza los gastos" y esta idea lo llevó a crear el *cálculo de variaciones* que ha influido de forma notable en el desarrollo de la Física, dando una visión unificadora, al ofrecer un punto de vista bajo el que interpretar de forma común distintos fenómenos físicos, que siguen un principio fundamental: el de la *mínima acción*.

Pongamos algunos ejemplos (ver COURANT–HILBERT, tomo I, p.170 y SIMMONS, p.403): Entre todas las curvas $\sigma\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, $\sigma(t) = (x_i(t))$, que pasan por dos puntos p y q en los instantes t_0 y t_1 respectivamente, $\sigma(t_0) = p$ y $\sigma(t_1) = q$, ¿qué curva tiene longitud mínima? En este caso el funcional a minimizar es

$$\mathcal{I}(\sigma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum x_i'^2}\, dt. \tag{7.11}$$

Entre las funciones f definidas en un abierto que contenga a $R \subset \mathbb{R}^2$ y que coinciden con una función dada h en los puntos del borde ∂R, ¿Qué superficie $z = f(x, y)$, encierra mínima área? En este caso el funcional a minimizar es

$$\mathcal{I}(f) = \int_R \omega = \int_R \sqrt{EG - F^2}\, dx \wedge dy = \int_R \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx dy,$$

donde ω es la 2–forma de superficie de la variedad Riemanniana bidimensional $\{z = f(x, y)\}$.

7.10.1. Ecuaciones de Euler–Lagrange.

Aunque muchos problemas del tipo al que nos referimos fueron planteados en la antigüedad y hasta algunos resueltos por los griegos, no se tuvo una herramienta adecuada para plantearlos hasta que NEWTON y LEIBNITZ introdujeron el cálculo infinitesimal. Y aunque esto le dio un impulso fundamental, resolviéndose muchos problemas, no fue hasta *1744* que EULER descubrió la ecuación diferencial que debe satisfacer la curva buscada, con la que nació el *cálculo de variaciones*, que posteriormente LAGRANGE desarrolló.

En el primero de los dos casos anteriores el funcional es una expresión del tipo

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\sigma) &= \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}[t, \sigma(t), \sigma'(t)]dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}[t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t)]dt,\end{aligned}$$

para $\sigma(t) = (x_i(t))$ y una cierta función $\mathcal{L}$ de $\mathbb{R}^{2n+1}$, a la que se llama *Lagrangiana*,y que en el caso (7.11) vale

$$\mathcal{L}(t, x_i, z_i) = \sqrt{\sum z_i^2}.$$

Veamos qué propiedad tiene tal curva σ que da un valor estacionario a $\mathcal{I}(\sigma)$, si es que existe, entre las curvas que satisfacen la propiedad de pasar por dos puntos fijos p y q en los instantes t_0 y t_1 respectivamente, es decir $\sigma(t_0) = p$ y $\sigma(t_1) = q$.

Teorema 7.32 *Si $\sigma(t) = (x_i(t))$ da un valor estacionario a*

$$\mathcal{I}(\sigma) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}[t, \sigma(t), \sigma'(t)]\, dt,$$

entonces satisface las Ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{x_1}[t, \sigma(t), \sigma'(t)] - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_1}[t, \sigma(t), \sigma'(t)] = 0, \\ \dots \quad \dots \\ \mathcal{L}_{x_n}[t, \sigma(t), \sigma'(t)] - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_n}[t, \sigma(t), \sigma'(t)] = 0,\end{gathered}$$

Demostración. Dadas dos funciones diferenciables $g, h\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, con g tal que $g(t_0) = g(t_1) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} h(t)g'(t)dt &= \int_{t_0}^{t_1} (h(t)g(t))'dt - \int_{t_0}^{t_1} h'(t)g(t)dt = \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} h'(t)g(t)dt.\end{aligned} \tag{7.12}$$

Consideremos $\gamma = (g_i)$ una curva cualquiera tal que $\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = 0$. Entonces para

$$G(\lambda) = \mathcal{I}(\sigma + \lambda\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}[t, \sigma(t) + \lambda\gamma(t), \sigma'(t) + \lambda\gamma'(t)]dt,$$

$G'(0) = 0$, y tendremos por (7.12) que

$$\begin{aligned}0 &= \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{x_i} g_i + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{z_i} g_i'\Big)dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \left[\mathcal{L}_{x_i} - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_i}\right] g_i(t)dt,\end{aligned}$$

lo cual implica, al ser γ arbitraria, y sobrentendiendo la notación, las *Ecuaciones de Euler–Lagrange*

$$\mathcal{L}_{x_1} - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_1} = 0, \ldots, \mathcal{L}_{x_n} - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_n} = 0, \quad \blacksquare$$

Ejemplo 7.10.1 Observemos que para $n = 1$ es la ecuación de segundo orden

$$\mathcal{L}_x - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_x - \mathcal{L}_{tz} - \mathcal{L}_{xz}x' - \mathcal{L}_{zz}x'' = 0,$$

y que en el caso (7.11) se convierte en

$$\frac{d}{dt}\frac{x_i'(t)}{\sqrt{\sum x_i'^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_i'(t)}{\sqrt{\sum x_i'^2}} = a_i \quad \Rightarrow \quad x_i(t) = b_i + f(t)a_i,$$

para $f'(t) = \sqrt{\sum x_i'^2}$ y por tanto $\sigma(t) = b + f(t)a$, es una recta.

Ejercicio 7.10.1 Demostrar que si una lagrangiana en el plano no depende de x, $\mathcal{L}(x, y, y') = \mathcal{L}(y, y')$, la solución de la ecuación de Euler-Lagrange satisface

$$\mathcal{L} - y'\mathcal{L}_{y'} = \text{cte}.$$

El segundo es un caso particular de un funcional del tipo

$$\mathcal{I}[f] = \int_R \mathcal{L}\left[x_1, \ldots, x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right] dx_1 \cdots dx_n,$$

para una cierta *Lagrangiana* $\mathcal{L}$ de $\mathbb{R}^{2n+1}$, definida en un abierto cuya proyección en las n primeras coordenadas contiene una variedad R con borde $\partial R = C$. En nuestro caso

$$\mathcal{L}(x, y, z, p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Veamos, como antes, qué propiedad tiene tal función f que da un valor estacionario a $\mathcal{I}(f)$, si es que existe, entre las funciones $f\colon R \to \mathbb{R}$ que valen lo mismo, pongamos h, en $C = \partial R$.

Teorema 7.33 *Si la función f da un valor estacionario a*

$$\mathcal{I}[f] = \int_R \mathcal{L}\left[x_1, \ldots, x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right] dx_1 \cdots dx_n,$$

entonces f satisface la Ecuación de Euler–Lagrange

$$\mathcal{L}_z(x, f(x), f_{x_i}(x)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{L}_{z_i}(x, f(x), f_{x_i}(x)) = 0.$$

Demostración. Consideremos una función g cualquiera tal que $g = 0$ en el borde C de R, entonces para ella se tiene, por el **Teorema de Stokes**, (14.12), pág.988, que para cualquier función h

$$\begin{aligned}
\int_R h g_{x_1} dx_1 \cdots dx_n &= \int_R h dg \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \int_R d\left(h g dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n\right) - \int_R g dh \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \int_C h g dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n - \int_R g h_{x_1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \qquad (7.13) \\
&= -\int_R g h_{x_1} dx_1 \cdots dx_n, \\
\int_R h g_{x_i} dx_1 \cdots dx_n &= -\int_R g h_{x_i} dx_1 \cdots dx_n,
\end{aligned}$$

y como antes, la función

$$G(\lambda) = \mathcal{I}(f + \lambda g) = \int_R \mathcal{L}\left[x_i, f + \lambda g, f_{x_i} + \lambda g_{x_i}\right] dx,$$

debe tener un valor estacionario en $\lambda = 0$, lo cual implica que $G'(0) = 0$, y tendremos por (7.13) que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_R \left(\mathcal{L}_z g + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{z_i} g_{x_i} \right) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_R g \left(\mathcal{L}_z - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L}_{z_i} \right) dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

lo cual implica, al ser g arbitraria, y sobrentendiendo la notación, la *Ecuación de Euler–Lagrange*

$$\mathcal{L}_z - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L}_{z_i} = 0.$$

Ejemplo 7.10.2 En el segundo de los dos casos expuestos la Lagrangiana vale $\mathcal{L} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ y su Ecuación de Euler–Lagrange es la *ecuación de las superficies mínimas*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) = 0,$$

que podemos simplificar[9]

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2 z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0.$$

Ejercicio 7.10.2 Para cada $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{x = 0, y = 0\}$, consideremos el plano Δ_p que contiene a los puntos $p = (x, y, z)$ y $(0, 0, z)$ y la pendiente de su normal es la distancia de p al eje z. Demostrar que

(a) La distribución es totalmente integrable.

(b) Cada función en el plano cuya gráfica sea solución es una función armónica (i.e. $z_{xx} + z_{yy} = 0$, ver la pág.753).

(c) Dicha gráfica es una superficie mínima.

[9] aunque no siempre es preferible, ver por ejemplo el ejercicio (8.8.7) y su solución en la pág.676.

Ejercicio 7.10.3 (a) Demostrar que si una curva plana, cerrada ó no, gira alrededor de un eje del plano que no la corta, el área de la superficie que genera es igual a la longitud de la curva multiplicada por la distancia que recorre el centro de masa de la curva. En el caso de que la curva sea de la forma $y = y(x)$ en $[a, b]$, es

$$2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + y'^2}dx.$$

(b) Entre todas las curvas $y = y(x)$ que unen dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), encontrar la que genera una superficie de revolución en torno al eje y de mínima área.

(c) ¿Es una superficie mínima?.

Ejemplo 7.10.3 La braquistócrona. Consideremos el siguiente problema: Dejamos caer por un alambre una bola sin fricción, desde un punto A hasta otro B. ¿Cuál es la curva por la que se tarda mínimo tiempo?[10]

Si consideremos una curva $\sigma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ que une $A = \sigma(0)$ con $B = \sigma(1)$, el tiempo T que tarda en ir de A a B es

$$\int_0^1 \frac{|\sigma'(r)|}{v[\sigma(r)]}dr,$$

para v la velocidad en el punto para esa trayectoria, pues si la reparametrizamos con su tiempo $\gamma(t) = \sigma[r(t)]$, de tal forma que $r(0) = 0$ y $r(T) = 1$, tendremos que $v[\gamma(t)] = |\gamma'(t)|$ y

$$T = \int_0^T \frac{|\gamma'(t)|}{v(\gamma(t))}dt = \int_0^T \frac{|\sigma'(r(t))r'(t)|}{v(\sigma(r(t)))}dt = \int_0^1 \frac{|\sigma'(r)|}{v[\sigma(r)]}dr,$$

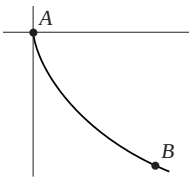


Figura 7.12. Curva de mínimo tiempo de A a B.

[10]Tal curva se llama *braquistócrona*, del griego *brachistos* breve, corto y *chronos* tiempo.

Ahora necesitamos conocer la velocidad, la cual no depende de la trayectoria llevada, pues no hay fricción, sino sólo de la altura y, que ha bajado; y vale (partiendo con velocidad nula) $v(x,y) = \sqrt{2gy}$. Para ver esto observemos que dada cualquier trayectoria γ, parametrizada por el tiempo, como la única fuerza que actúa sobre la bola es la de la gravedad $F = (0, -mg)$ y la que la mantiene en la curva (una fuerza N que es normal a la curva), tendremos que

$$F + N = m\gamma'',$$

por lo tanto la componente tangencial de F coincide con la componente tangencial de la aceleración, es decir

$$-gy' = \frac{F}{m} \cdot \gamma' = \gamma'' \cdot \gamma' = x'x'' + y'y'' = (\frac{x'^2 + y'^2}{2})',$$

y de esto se sigue que $(x'^2 + y'^2)/2 = -gy + a$, para una constante[11] a, la cual es nula si la soltamos con velocidad nula desde $y = 0$. Por lo tanto el módulo de la velocidad, es (observemos que $y < 0$)

$$v[\sigma(t)] = |\sigma'(t)| = \sqrt{-2gy}.$$

Esto nos lleva a considerar el problema variacional

$$\int_0^1 \mathcal{L}(\sigma(s), \sigma'(s))ds,$$

correspondiente a la Lagrangiana que da el tiempo, que esencialmente es (la constante $2g$ no es necesaria y cambiamos el sistema de coordenadas poniendo la y positiva hacia abajo)

$$\mathcal{L}(x, y, z_1, z_2) = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{\sqrt{y}}, \qquad \text{para la que}$$

$$\mathcal{L}_x = 0, \quad \mathcal{L}_y = -\frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{2y\sqrt{y}}, \quad \mathcal{L}_{z_i} = \frac{z_i}{\sqrt{y(z_1^2 + z_2^2)}},$$

y las Ecuaciones de Euler–Lagrange correspondientes son para $\dot{h} = dh/dt$

[11] Que es la energía total, pues $\frac{x'^2+y'^2}{2}$ es la energía cinética y $-gy$ es la potencial.

y $h' = dh/dx$, para las que $\dot{h} = h'\dot{x}$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{y(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}}\right)$$
$$0 = -\frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{2y\sqrt{y}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{y(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}}\right)$$

y por la primera es constante

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{y(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}} = c$$

y si $c = 0$, x es constante en todo punto (que es una solución si A y B tienen la misma abscisa), en caso contrario $\dot{x} \neq 0$ y podemos dividir por él, obteniendo

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right)' \dot{x} \qquad \Leftrightarrow$$

$$0 = \left(\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right)' \quad \Leftrightarrow \quad y(1+y'^2) = cte, \tag{7.14}$$

y además en este caso ($c \neq 0$) se sigue de la segunda que

$$\frac{\dot{x}}{2cy^2} = c\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = c\frac{d}{dt}y' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2c^2} = y^2y''$$

que es consecuencia directa de (7.14), derivando respecto de x, pues

$$0 = (y + yy'^2)' = y' + y'^3 + 2yy'y'' \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 + y'^2 + 2yy'',$$

(pues $y' \neq 0$ en algún punto, ya que en caso contrario $y = cte = 0$) y el resultado se sigue multiplicando por y. Por lo tanto tenemos que resolver la familia de ecuaciones $y(1+y'^2) = k$, es decir

$$dy = \sqrt{\frac{k}{y} - 1}\, dx \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{y}{k-y}}\, dy - dx = 0,$$

la cual tiene la solución

$$-\sqrt{(k-y)y} + k \arctan\sqrt{\frac{y}{k-y}} - x = cte,$$

que podemos resolver también llamando

$$\tan\phi = \sqrt{\frac{y}{k-y}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dx = \tan\phi\, dy, \\ y = (k-y)\tan^2\phi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = k\,\mathrm{sen}^2\,\phi$$

por tanto como $\cos 2\phi = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,\phi$

$$dy = 2k\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta\, d\phi \quad \Rightarrow$$
$$dx = \tan\phi\, dy = 2k\,\mathrm{sen}^2\,\phi\, d\phi = k(1-\cos(2\phi))\, d\phi,$$

cuya solución es $x = k\phi - \frac{k\,\mathrm{sen}(2\phi)}{2} + cte$ y si le pedimos que $A = (0,0)$, tendremos que la constante es 0, pues la $y = k\,\mathrm{sen}^2\,\phi$ vale 0, para $\phi = 0$.

Por tanto tendremos que nuestra solución podemos escribirla, para $\theta = 2\phi$ y $r = k/2$

$$x = r(\theta - \mathrm{sen}\,\theta) \qquad y = r(1-\cos\theta),$$

lo cual significa que nuestra curva es una homotecia de razón r de la curva de puntos (Fig.7.13)

$$(\theta, 1) - (\mathrm{sen}\,\theta, \cos\theta),$$

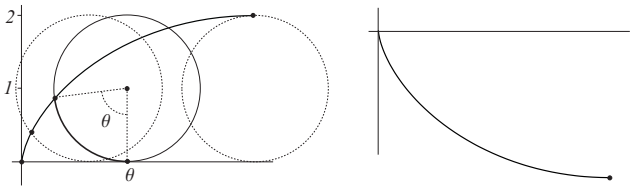


Figura 7.13. La braquistócrona (dcha.) es la cicloide invertida.

que es la *cicloide*, es decir la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sin deslizarse sobre una recta.

El péndulo de Huygens.- Tiene la cicloide invertida una notable propiedad descubierta por *Huygens (1629–1695)* y es que dejada una bola deslizarse sin rozamiento sobre ella llega al punto mas bajo en un tiempo que no depende del punto desde la que la soltamos. Por tanto si la

dejamos que vaya y vuelva en un movimiento pendular su período es constante. Veámoslo.

Si consideramos la parametrización (Fig.7.14, para $r = 1$)

$$\sigma(\theta) = r(\theta - \operatorname{sen}\theta, 1 + \cos\theta),$$

(hemos invertido la cicloide y le hemos sumado $2r$, para que se anule en el punto más bajo y valga $2r$ en el más alto); y soltamos la bola en un punto $A = (x_0, y_0) = \sigma(\theta_0)$, el tiempo que tarda en llegar al punto más bajo, que es el correspondiente a $\theta = \pi$, es

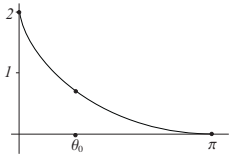


Figura 7.14.

$$\int_{\theta_0}^{\pi} \frac{|\sigma'(\theta)|}{v[\sigma(\theta)]} d\theta = \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{r\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta}}{\sqrt{2gr(\cos\theta_0 - \cos\theta)}} d\theta$$
$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} d\theta,$$

y para $2\alpha = \theta$, $\cos\theta = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, y para $2\alpha_0 = \theta_0$, tendremos que el tiempo es

$$\sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\alpha_0}^{\pi/2} 2\frac{\sqrt{2 - 2\cos^2\alpha}}{\sqrt{2(\cos^2\alpha_0 - \cos^2\alpha)}} d\alpha = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\alpha_0}^{\pi/2} 2\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha_0 \sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha_0}}} d\alpha,$$
$$= 2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} d\varphi = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

donde la última igualdad se sigue considerando el cambio de variable $\alpha \in [\alpha_0, \pi/2] \to \varphi \in [0, \pi/2]$

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_0} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha_0} d\alpha. \quad \blacksquare$$

Observemos que r tiene unidades de longitud y g, que es una aceleración, unidades de longitud/tiempo^2, por lo que r/g tiene unidades de tiempo^2 y su raíz de tiempo.

En segundo lugar también tiene la siguiente propiedad:

Su *evolvente* es ella misma.

Definición. Para verlo recordemos que llamamos *evolvente* a cada curva ortogonal a las tangentes de una dada.

Por tanto dada una curva $\sigma(s)$ parametrizada por la longitud de arco —de tal modo que $|\sigma'(s)| = 1$ y s es la longitud del trozo de curva entre dos puntos $\sigma(r)$ y $\sigma(r+s)$—, sus evolventes son las curvas

$$\gamma(s) = \sigma(s) + \lambda(s)\sigma'(s),$$

tales que γ' es ortogonal a σ', lo cual equivale a que

$$0 = \gamma' \cdot \sigma' = 1 + \lambda'(s) + \lambda(s)\sigma'' \cdot \sigma' = 1 + \lambda'(s),$$

pues $0 = (\sigma' \cdot \sigma')' = 2\sigma'' \cdot \sigma'$, por tanto $\lambda(s) = c - s$, para c constante y las evolventes son

$$\gamma(s) = \sigma(s) + (c - s)\sigma'(s),$$

siendo $\gamma(c) = \sigma(c) = P$ el punto común de ambas curvas, que tiene la propiedad de que el arco de curva que une $\sigma(s)$ y $P = \sigma(c)$, tiene la misma distancia, $c - s$, que el segmento tangente de extremos $\sigma(s)$ y $\gamma(s)$. Por lo tanto la evolvente es la curva que describe una cuerda que despegamos de la curva original manteniéndola tensa.

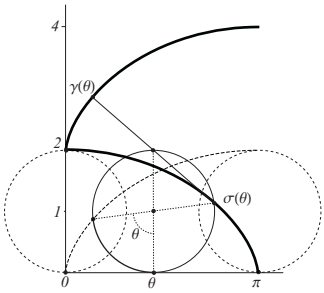


Figura 7.15. La evolvente de la cicloide es la cicloide

Veamos que la cicloide tiene esta propiedad (Fig.7.15), para ello consideremos la parametrización en $[0, \pi]$

$$\sigma(\theta) = (\theta + \operatorname{sen}\theta, 1 + \cos\theta),$$

que va desde $(0, 2)$ hasta $(\pi, 0)$ y veamos que la también cicloide que asciende desde $(0, 2)$ hasta $(\pi, 4)$ y que tiene por ecuación

$$\gamma(\theta) = (\theta - \operatorname{sen}\theta, 3 - \cos\theta),$$

corta perpendicularmente a las tangentes de la primera, lo cual es obvio pues la recta que une $\sigma(\theta)$ y $\gamma(\theta)$ es tangente a la curva y

$$\sigma' = (1 + \cos\theta, -\operatorname{sen}\theta), \qquad \gamma' = (1 - \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

Estas dos excepcionales propiedades las utilizó genialmente Huygens para construir un péndulo que se apoyaba en dos superficies curvas simétricas (Fig.7.16), con forma de cicloide, de modo que el extremo del péndulo describía una cicloide y la frecuencia de su oscilación no dependía del lugar desde el que empezaba el descenso.

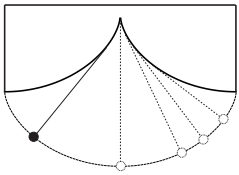


Figura 7.16. Péndulo de Huygens

Ejercicio 7.10.4 Demostrar que si $v(x, y)$ es la velocidad de una partícula en un punto del plano (x, y), el tiempo que la partícula tarda en ir de un punto (x_0, y_0) del plano a otro (x_1, y_1) a través de una curva $y = y(x)$ es

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{v(x, y(x))} dx.$$

Ejercicio 7.10.5 Consideremos en el semiplano $y \geq 0$, el problema variacional de la curva de mínimo tiempo cuando la velocidad en cada punto $v(x, y) = y$.

Ejercicio 7.10.6 Demostrar que la velocidad de un abalorio que cae sin rozamiento por un alambre de un plano x, y perpendicular a la superficie de la tierra, es en cada punto (x, y), $v(x, y) = \sqrt{2g(y_0 - y)}$ (para y_0 la altura a la que lo soltamos con velocidad nula, que podemos suponer como $y_0 = 0$).

Ejercicio 7.10.7 Demostrar que la evolvente de la catenaria es la tractriz.

7.10.2. Ecuaciones de Euler–Lagrange y Hamilton.

Veremos ahora que las ecuaciones de Euler–Lagrange están íntimamente relacionadas con las de Hamilton. Consideremos una *Lagrangiana* $\mathcal{L}$ y supongamos que $\sigma(t) = (x_i(t))$ es una curva que satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\mathcal{L}_{x_1} - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_1} = 0, \ldots, \ \mathcal{L}_{x_n} - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_n} = 0,$$

por ejemplo si es extremal para el problema variacional definido por $\mathcal{L}$ y supongamos además que nuestra Lagrangiana satisface $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| \neq 0$, en estas condiciones se tiene:

Teorema 7.34 *Si $\sigma(t) = (x_i(t))$ es una curva que satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange, para una Lagrangiana que satisface $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| \neq 0$, entonces la curva en coordenadas (t, x_i, z_i)*

$$\gamma(t) = (t, x_1(t), \ldots, x_n(t), z_1(t) = x_1'(t), \ldots, z_n(t) = x_n'(t)),$$

satisface en las coordenadas $(t, x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i})$ una ecuación diferencial de Hamilton, correspondiente a la función (energía),

$$h = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{z_i} z_i - \mathcal{L}. \tag{7.15}$$

Demostración. Como $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| \neq 0$, podemos considerar el sistema de coordenadas $(t, u_i = x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i})$, en el que se tiene la primera igualdad

$$\begin{aligned} dh &= h_t dt + \sum_{i=1}^n h_{u_i} du_i + \sum_{i=1}^n h_{p_i} dp_i \\ dh &= d(\sum_{i=1}^n p_i z_i) - d\mathcal{L} \\ &= \sum_{i=1}^n p_i dz_i + \sum_{i=1}^n z_i dp_i - \mathcal{L}_t dt - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{x_i} dx_i - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{z_i} dz_i \\ &= \sum_{i=1}^n z_i dp_i - \mathcal{L}_t dt - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{x_i} dx_i, \end{aligned}$$

donde la $d\mathcal{L}$ la hemos desarrollado en las coordenadas (t, x_i, z_i). Por tanto como la curva satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange y llamando $u_i(t) = u_i[\gamma(t)]$, $p_i(t) = p_i[\gamma(t)]$, tendremos que (recordemos que las derivadas de la h es en las coordenadas (t, u_i, p_i) y las de $\mathcal{L}$ en las (t, x_i, z_i))

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t &= -h_t, \\ u_i'(t) = x_i'(t) &= z_i(t) = h_{p_i}[\gamma(t)], \\ p_i'(t) &= \mathcal{L}_{x_i}[\gamma(t)] = -h_{u_i}[\gamma(t)]. \end{aligned}$$ ∎

Como consecuencia se tiene que si $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| \neq 0$, entonces

$$(h \circ \gamma)'(t) = h_t + \sum h_{u_i} u_i' + \sum h_{p_i} p_i' = h_t,$$

y por tanto si $\mathcal{L}$ no depende de t, tampoco h, $h_t = -\mathcal{L}_t = 0$ y h es constante en las curvas que satisfacen la Ecuación de Euler–Lagrange[12].

A continuación vemos que, para Lagrangianas que no dependen de t, esto es siempre así aunque no se verifique que $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| \neq 0$.

Proposición 7.35 *Si $\sigma(t) = (x_i(t))$ es una curva parametrizada que satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange para una lagrangiana $\mathcal{L}$ que no*

[12] Además en tal caso podemos considerar la *Ecuación de Hamilton–Jacobi* correspondiente a h (en las coordenadas (x_i, p_i)) y aplicar la teoría estudiada en la lección anterior, para encontrar la curva extremal del problema variacional definido por la *Lagrangiana* $\mathcal{L}$.

depende de t, es decir que para $\overline{\sigma}(t) = (x_i(t), x_i'(t))$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_i}(\overline{\sigma}) = \mathcal{L}_{x_i}(\overline{\sigma}),$$

entonces h es constante en $\overline{\sigma}$.

Demostración. Como $\mathcal{L}_t = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}h(\overline{\sigma}) &= \frac{d}{dt}\left(\sum x_i'\mathcal{L}_{z_i}(\overline{\sigma}) - \mathcal{L}(\overline{\sigma})\right)\\ &= \sum x_i''\mathcal{L}_{z_i}(\overline{\sigma}) + \sum x_i'\frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_i}(\overline{\sigma}) -\\ &\quad - \sum \mathcal{L}_{x_i}(\overline{\sigma})x_i' - \sum \mathcal{L}_{z_i}(\overline{\sigma})x_i'' = 0 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Ejemplo 7.10.4 El Principio de Hamilton. En el caso particular de tener una masa m que se desplaza en el espacio bajo la influencia de una fuerza conservativa $F = -\operatorname{grad} V$, tendremos que la *energía cinética* vale

$$T = \frac{m}{2}\left[x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + x_3'(t)^2\right],$$

y para

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left[z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right] - V,$$

definimos la *acción* a lo largo de una curva $\sigma(t)$, que une dos puntos del espacio entre los instantes a y b, como

$$\int_a^b \mathcal{L}dt = \int_a^b (T - V)dt,$$

la cual toma un valor estacionario, para la curva que satisfaga las *ecuaciones de Euler–Lagrange*

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_1} - \mathcal{L}_{x_1} = 0\\ \frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_2} - \mathcal{L}_{x_2} = 0\\ \frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_3} - \mathcal{L}_{x_3} = 0\end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned}mx_1'' + V_{x_1} = 0\\ mx_2'' + V_{x_2} = 0\\ mx_3'' + V_{x_3} = 0\end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad m\mathbf{x}'' = F,$$

que es la *Ecuación del movimiento de Newton*. Esto justifica en parte el siguiente resultado conocido como *Principio de mínima acción de Hamilton*.

Principio de Hamilton 7.36 *La trayectoria que sigue una masa en el espacio que se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa, es entre todas las trayectorias posibles que unan dos puntos en dos instantes dados, la que realiza la mínima acción.*

Observemos que en este caso $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| \neq 0$, pues

$$p_1 = \mathcal{L}_{z_1} = mz_1, \quad p_2 = \mathcal{L}_{z_2} = mz_2, \quad p_3 = \mathcal{L}_{z_3} = mz_3,$$

y la función *Hamiltoniana* vale

$$\begin{aligned} h &= p_1 z_1 + p_2 z_2 + p_3 z_3 - \mathcal{L} \\ &= m(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) - \frac{m}{2}\left[z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right] + V \\ &= T + V, \end{aligned}$$

que es la energía (cinética mas potencial) de la masa y es constante a lo largo de la trayectoria. Además en las nuevas coordenadas (x_i, p_i)

$$h = \frac{m}{2}\left[z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right] + V = \frac{1}{2m}\left[p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right] + V,$$

por lo tanto la *Ecuación de Hamilton–Jacobi* asociada a este problema es para cada constante E (que es la energía)

$$\frac{1}{2m}\left[\phi_{x_1}^2 + \phi_{x_2}^2 + \phi_{x_3}^2\right] + V = E.$$

Ejemplo 7.10.5 Veamos que el movimiento del péndulo (ver la pág.49)

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta(t).$$

da un valor estacionario a la acción, es decir satisface la ecuación de Euler–Lagrange para la lagrangiana $\mathcal{L} = T - V$ en el fibrado tangente de la circunferencia, donde $T = (m/2)|\sigma'(t)|^2 = (mL^2/2)\dot{\theta}^2(t)$ es la energía cinética y $V = -mgL\cos\theta$ es la energía potencial[13]

$$\mathcal{L} = T - V = m\frac{L^2\dot{\theta}^2(t)}{2} + mgL\cos\theta(t),$$

pues en tal caso la ecuación de Euler–Lagrange es

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_{\dot{\theta}} = \mathcal{L}_{\theta} \quad \Leftrightarrow \quad mL^2\ddot{\theta}(t) = -mgL\operatorname{sen}\theta(t). \quad \blacksquare$$

[13]Observemos que la componente tangencial $D = -mg\operatorname{sen}\theta e_2$ de la fuerza $F = (0, -mg)$, es $D = -\operatorname{grad} V$, pues $\partial_\theta = Le_2$ y $D \cdot \partial_\theta = \partial_\theta V$

Ejercicio 7.10.8 Demostrar que si una masa se mueve sobre una superficie en ausencia de fuerzas, las geodésicas dan un valor estacionario a la acción.

7.10.3. Apéndice. La ecuación de Schrödinger

Siguiendo con lo anterior consideremos una integral completa ϕ para cada E constante, de la *Ecuación de Hamilton–Jacobi*

$$\frac{1}{2m}\left[\phi_{x_1}^{*2}+\phi_{x_2}^{*2}+\phi_{x_3}^{*2}\right]+V-E=0,$$

y recordemos que la constante $E=h(x_i;\phi_{x_i}^*)$, representa la energía total de la partícula a lo largo de su trayectoria.

En uno de sus primeros trabajos SCHRÖDINGER consideró esta ecuación y el cambio de variable $\phi = K\log\psi$, con K una constante. En términos de esta nueva función la *Ecuación de Hamilton–Jacobi* es

$$\frac{K^2}{2m}\left[\psi_{x_1}^2+\psi_{x_2}^2+\psi_{x_3}^2\right]+(V-E)\psi^2=0,$$

y en vez de resolverla considera el problema variacional, en todo el espacio

$$\mathcal{I}(\psi)=\int\left(\frac{K^2}{2m}\left[\psi_{x_1}^2+\psi_{x_2}^2+\psi_{x_3}^2\right]+(V-E)\psi^2\right)dx_1dx_2dx_3,$$

y lo restringe a las funciones ψ que se anulan en el infinito (pues en caso contrario la integral no sería finita) y se pregunta por la existencia de una función extremal, en cuyo caso de existir debe satisfacer la *ecuación de Euler–Lagrange*, que en este caso es

$$-\frac{K^2}{2m}(\psi_{x_1x_1}+\psi_{x_2x_2}+\psi_{x_3x_3})+(V-E)\psi=0,$$

que es la *ecuación de Schrödinger* para una partícula, y en la que $K=\hbar$. (Yo tampoco lo entiendo). Volveremos a ver esta EDP en la pág.914, donde la resolvemos.

7.11. Lagrangianas. Teorema de Noëther

7.11.1. Transformada de Legendre.

En esta lección veremos de forma intrínseca algunos de los conceptos desarrollados en la lección anterior, cuando las lagrangianas no dependen del tiempo y los veremos en general en la próxima lección. Para ello consideremos una variedad diferenciable $\mathcal{V}$ y sea $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ su *Fibrado tangente*.

Definición. Llamaremos *Lagrangiana* en $\mathcal{V}$ a una función $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^\infty[\mathcal{T}(\mathcal{V})]$.

Definición. Dada una *Lagrangiana* $\mathcal{L}$, podemos definir la aplicación, llamada *transformada de Legendre*, entre los fibrados tangente y cotangente

$$\mathbb{L}\colon \mathcal{T}(\mathcal{V}) \to \mathcal{T}^*(\mathcal{V}), \quad D_x \to \mathbb{L}(D_x) = \omega_x, \tag{7.16}$$

donde ω_x es la composición

$$T_x(\mathcal{V}) \simeq T_{D_x}[T_x(\mathcal{V})] \xrightarrow{i_*} T_{D_x}[\mathcal{T}(\mathcal{V})] \xrightarrow{d\mathcal{L}} \mathbb{R}.$$

considerando la inclusión natural $i\colon T_x(\mathcal{V}) \hookrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{V})$ y la identificación natural —a través de la derivada direccional— entre un espacio vectorial y sus espacios tangentes (ver (1.16), pág.15), que en nuestro caso si consideramos un sistema de coordenadas (x_i) en $\mathcal{V}$ y el correspondiente (x_i, z_i) en $\mathcal{T}(\mathcal{V})$,

$$T_x(\mathcal{V}) \simeq T_{D_x}[T_x(\mathcal{V})], \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)_{D_x},$$

y tendremos que la expresión en coordenadas de $\mathbb{L}$ es (entendiendo las correspondientes coordenadas (x_i, z_i) en $\mathcal{T}^*(\mathcal{V})$)

$$\mathbb{L}(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n) = \left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_n}\right).$$

Definición. Llamaremos *campo de las homotecias* en el fibrado tangente al único campo que anula las funciones constantes en fibras $H\pi^* f = 0$,

equivalentemente $\pi_* H = 0$ y que deja invariantes las funciones lineales en fibras, es decir que para las 1–formas ω entendidas como funciones en el fibrado tangente $H\omega = \omega$. En coordenadas vale

$$H = \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i},$$

y su grupo uniparamétrico es $\tau_t(D_x) = \mathrm{e}^t\, D_x$.

Definición. Llamaremos *función energía* de una Lagrangiana $\mathcal{L}$, a la función de $\mathcal{T}(\mathcal{V})$

$$h = H\mathcal{L} - \mathcal{L},$$

que en coordenadas vale

$$h = \sum_{i=1}^{n} z_i \mathcal{L}_{z_i} - \mathcal{L}.$$

Consideremos ahora la *1–forma de Liouville* λ del fibrado cotangente y llevémosla al fibrado tangente

$$\omega_{\mathcal{L}} = \mathbb{L}^* \lambda,$$

cuya expresión en coordenadas es

$$\omega_{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} dx_i \quad \Rightarrow \quad d\omega_{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^{n} d\mathcal{L}_{z_i} \wedge dx_i,$$

y definamos la aplicación entre los módulos

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}[\mathcal{T}(\mathcal{V})] \to \Omega[\mathcal{T}(\mathcal{V})], \\ &D \to i_D d\omega_{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^{n} D(\mathcal{L}_{z_i}) dx_i - \sum_{i=1}^{n} Dx_i d\mathcal{L}_{z_i}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Definición. Diremos que un campo $Z \in \mathcal{D}[\mathcal{T}(\mathcal{V})]$ es *lagrangiano* si $i_Z d\omega_{\mathcal{L}} = -dh$.

No tiene por qué existir tal campo y si existe siempre tiene a h como una integral primera.

No obstante existe y es único si $\mathbb{L}$ es difeomorfismo, ó equivalentemente

$$|\mathcal{L}_{z_i z_j}| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i}) \text{ es sistema de coordenadas}$$

en cuyo caso $d\omega_{\mathcal{L}}$ es una estructura simplética del Fibrado tangente y (7.17) es un isomorfismo, por tanto existe el campo *lagrangiano* y es único.

Nota 7.37 Recordemos que por definición un campo $Z \in \mathcal{D}[T(\mathcal{V})]$ define una ecuación de segundo orden en $\mathcal{V}$ si para la proyección $\pi\colon T(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{V}$

$$\pi_* Z_{D_p} = D_p, \quad \text{para cada } D_p \in T(\mathcal{V}), \tag{7.18}$$

y esto equivale a que en coordenadas (x_i, z_i), $Zx_i = z_i$ como puede comprobar fácilmente el lector.

Teorema 7.38 *Si Z es un campo que define una ecuación de segundo orden en $\mathcal{V}$, entonces*

$$Z \quad \textit{es Lagrangiano} \qquad \Leftrightarrow \qquad Z(\mathcal{L}_{z_i}) = \mathcal{L}_{x_i},$$

en cuyo caso sus curvas integrales satisfacen las ecuaciones de Euler–Lagrange.

Si $\mathbb{L}$ es difeomorfismo, entonces existe un único campo Z Lagrangiano, automáticamente es de segundo orden y una curva en coordenadas (x_i, z_i), $\overline{\sigma}(t) = (x_i(t), x_i'(t))$ satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange sii es una curva integral de Z.

Demostración. En coordenadas tenemos que

$$\begin{aligned} i_Z d\omega_{\mathcal{L}} &= \sum_{i=1}^{n} Z(\mathcal{L}_{z_i}) dx_i - \sum_{i=1}^{n} Zx_i d\mathcal{L}_{z_i} \\ -dh &= d\mathcal{L} - d(H\mathcal{L}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{z_i} dz_i - \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{z_i} dz_i - \sum_{i=1}^{n} z_i d\mathcal{L}_{z_i}, \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{x_i} dx_i - \sum_{i=1}^{n} z_i d\mathcal{L}_{z_i}, \end{aligned}$$

lo cual implica (en ambos casos, pues o bien $Zx_i = z_i$ ó $(x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i})$ son coordenadas) que

$$Zx_i = z_i, \quad Z(\mathcal{L}_{z_i}) = \mathcal{L}_{x_i},$$

y en tal caso tenemos que si $\overline{\sigma}(t) = (x_i(t), z_i(t))$ es una curva integral de Z, entonces satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange, pues

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = Z \quad &\Rightarrow \quad \overline{\sigma}_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) x_i = Z x_i = z_i, \quad \overline{\sigma}_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) p_i = Z p_i = \mathcal{L}_{x_i} \\ &\Rightarrow \quad x_i'(t) = z_i(t), \quad (\mathcal{L}_{z_i} \circ \overline{\sigma})'(t) = \mathcal{L}_{x_i}[\overline{\sigma}(t)],\end{aligned}$$

y si además $\mathbb{L}$ es difeomorfismo se tiene la equivalencia, pues (x_i, p_i) son coordenadas. ∎

Ejercicio 7.11.1 1.- Consideremos la Lagrangiana correspondiente al problema de minimizar la energía cinética de una partícula en el plano

$$\mathcal{L}(x, y, z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2,$$

y calcúlense, $\mathbb{L}$, $|\det \mathcal{L}_{z_i z_j}|$, $\omega_{\mathcal{L}}$, h y Z.

2.- Idem considerando la Lagrangiana correspondiente al problema de minimizar la longitud de una curva en el plano

$$\mathcal{L}(x, y, z_1, z_2) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2},$$

demuéstrese que existen campos lagrangianos y que para cualquiera de ellos sus curvas integrales se proyectan en rectas.

Ejemplo 7.11.1 Curva de energía cinética mínima. Sea $(\mathcal{V}, g)$ una variedad Riemanniana. Consideremos un sistema de coordenadas (x_i), los coeficientes de la primera forma fundamental

$$\partial_i \cdot \partial_j = g_{ij},$$

y consideremos como lagrangiana la energía cinética

$$\mathcal{L}[x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_n] = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} z_i z_j g_{ij},$$

que corresponde al problema de encontrar la curva

$$\sigma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

pasando por dos puntos de la variedad, que hace mínima la *energía cinética*

$$\int_a^b \frac{1}{2} D \cdot D dt = \int_a^b \frac{1}{2} \|D\|^2 dt,$$

para $D = \sigma'(t)$ el vector tangente a la curva. En cuyo caso

$$p_i = \mathcal{L}_{z_i} = \sum_{j=1}^{n} z_j g_{ij} \quad \Rightarrow \quad h = \sum_{i=1}^{n} p_i z_i - \mathcal{L} = \mathcal{L},$$

es decir que la función h de (7.15) es de nuevo la energía cinética. Además $|\mathcal{L}_{z_i z_j}| = |g_{ij}| \neq 0$, por lo tanto $\mathbb{L}$ es un difeomorfismo y la curva que minimiza la integral —si existe— es una curva integral del campo hamiltoniano correspondiente a h, para la dos–forma $d\omega_{\mathcal{L}} = \sum dp_i \wedge dx_i$, que según hemos visto en 7.9 es el campo Z de las geodésicas, pues para él hemos demostrado que en las coordenadas $(u_i = x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i})$

$$Zu_i = h_{p_i}, \quad Zp_i = -h_{u_i},$$

lo cual equivale a que $i_Z d\omega_{\mathcal{L}} = -dh$. Por lo tanto las geodésicas son las curvas extremales para la energía cinética. Pero además en este caso el difeomorfismo $\mathbb{L}$ es conocido:

Proposición 7.39 $\mathbb{L} = \phi$ *para el difeomorfismo*

$$\phi \colon T\mathcal{V} \to T^*\mathcal{V}, \qquad \phi(D_p) = i_{D_p} g.$$

Demostración. Lo haremos de dos formas. La primera observando que en la definición (7.16) identificamos los espacios (ver (1.16), pág.15)

$$T_x(\mathcal{V}) \simeq T_{D_x}[T_x(\mathcal{V})], \qquad T_x \to D_{T_x},$$

siendo D_{T_x} la derivada direccional en $T\mathcal{V}$ relativa al vector T_x, por tanto para $\omega_x = \mathbb{L}(D_x)$

$$\begin{aligned}\omega_x T_x &= d_{D_x}\mathcal{L}(D_{T_x}) = D_{T_x}\mathcal{L}(D_x) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{L}(D_x + tT_x) - \mathcal{L}(D_x)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(1/2)D_x \cdot D_x + tD_x \cdot T_x + (1/2)t^2 T_x \cdot T_x - (1/2)D_x \cdot D_x}{t} \\ &= D_x \cdot T_x.\end{aligned}$$

La segunda forma la vemos en las coordenadas $x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i} = \sum g_{ij} z_j$, pues $\phi^*(x_i) = x_i$ y $\phi^*(z_i) = p_i$ (ver (7.25), pág.558), por tanto

$$\phi = (x_i, p_i) = \mathbb{L}. \quad \blacksquare$$

Proposición 7.40 *En los términos anteriores se tiene que*

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z\mathcal{L}_{z_k} = 0.$$

Demostración. Se sigue de que en las coordenadas (x_i, z_i)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z\mathcal{L}_{z_k} = \mathcal{L}_{x_k} = 0. \quad \blacksquare$$

Aplicación: Superficies de revolución. Es decir que en este caso no sólo tenemos la integral primera $\mathcal{L} = h$ de nuestro campo geodésico Z, sino $\mathcal{L}_{z_k}$, esto tiene una aplicación directa en el caso particular de tener una superficie de revolución, alrededor del eje z por ejemplo, de una curva que localmente parametrizamos $r = r(z)$, en cuyo caso la superficie viene dada en coordenadas (ξ, η) por

$$\begin{array}{l} x = r(\eta)\cos\xi, \\ y = r(\eta)\operatorname{sen}\xi, \\ z = \eta, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial\xi} = -r(\eta)\operatorname{sen}\xi\dfrac{\partial}{\partial x} + r(\eta)\cos\xi\dfrac{\partial}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} = r'(\eta)\cos\xi\dfrac{\partial}{\partial x} + r'(\eta)\operatorname{sen}\xi\dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}, \end{array}$$

$$E = r(\eta)^2, \quad F = 0, \quad G = r'(\eta)^2 + 1,$$

por lo tanto para este problema la lagrangiana vale

$$\mathcal{L} = \frac{Ez_1^2 + Gz_2^2}{2},$$

y como $E_\xi = G_\xi = F_\xi = 0$, tendremos dos integrales primeras de Z,

$$\mathcal{L} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_{z_1} = Ez_1,$$

y si consideramos una geodésica con vector tangente

$$T = z_1(T)\frac{\partial}{\partial\xi} + z_2(T)\frac{\partial}{\partial\eta},$$

que forme un ángulo θ con la circunferencia paralelo, de vector tangente $\frac{\partial}{\partial\xi}$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema de Clairaut 7.41 *La función $r\cos\theta$ es constante a lo largo de cada geodésica.*

Demostración. Es una simple consecuencia de que

$$r\cos\theta = |\partial_\xi|\frac{T\cdot\partial_\xi}{|T|\cdot|\partial_\xi|} = \frac{T\cdot\partial_\xi}{|T|} = \frac{z_1(T)E}{\sqrt{2\mathcal{L}(T)}} = \frac{\mathcal{L}_{z_1}}{\sqrt{2\mathcal{L}}}(T). \quad \blacksquare$$

7.11.2. Ejemplo. Lagrangiana de la longitud

Si ahora consideramos la nueva Lagrangiana (que es diferenciable fuera del cerrado $\{z_i = \cdots = z_n = 0\}$)

$$\overline{\mathcal{L}}[x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_n] = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} z_i z_j g_{ij}},$$

que corresponde al problema de minimizar la longitud de la curva que une dos puntos de la variedad, tendremos que $\overline{\mathbb{L}}$ no define un difeomorfismo, pues $|\overline{\mathcal{L}}_{z_i z_j}| = 0$ ya que para la anterior lagrangiana $\mathcal{L} = (1/2)\sum_{i,j=1}^{n} z_i z_j g_{ij}$, $\mathcal{L}_{z_i} = \sum g_{ij} z_j$ y $H\mathcal{L} = \sum z_i \mathcal{L}_{z_i} = 2\mathcal{L}$, ahora bien

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}}^2 = 2\mathcal{L} = H\mathcal{L} \quad &\Rightarrow \quad \overline{\mathcal{L}} H(\overline{\mathcal{L}}) = H\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}^2 \quad \Rightarrow \\
H\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}} \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i}^{n} z_i \overline{\mathcal{L}}_{z_i} = \overline{\mathcal{L}} \quad \Rightarrow \\
\overline{\mathcal{L}}_{z_j} + \sum_{i}^{n} z_i \overline{\mathcal{L}}_{z_i z_j} = \overline{\mathcal{L}}_{z_j} \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i}^{n} z_i \overline{\mathcal{L}}_{z_i z_j} = 0,
\end{aligned}$$

además se sigue también que la función energía en este caso es nula, pues $H\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}$. Sin embargo, por (7.38), pág.527, se tiene que el campo geodésico Z también es un campo lagrangiano para $\overline{\mathcal{L}}$, pues en términos de la anterior lagrangiana

$$\begin{aligned}
2\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}^2 \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{L}_{z_i} = \overline{\mathcal{L}} \cdot \overline{\mathcal{L}}_{z_i}, \quad \mathcal{L}_{x_i} = \overline{\mathcal{L}} \cdot \overline{\mathcal{L}}_{x_i} \\
&\Rightarrow \quad \overline{\mathcal{L}} \cdot \overline{\mathcal{L}}_{x_i} = \mathcal{L}_{x_i} = Z\mathcal{L}_{z_i} = \overline{\mathcal{L}} \cdot Z\overline{\mathcal{L}}_{z_i},
\end{aligned}$$

por lo que Z es Lagrangiano ya que es de segundo orden y

$$Z\overline{\mathcal{L}}_{z_i} = \overline{\mathcal{L}}_{x_i},$$

además (7.38) nos asegura que las geodésicas satisfacen las ecuaciones de Euler–Lagrange para la lagrangiana $\overline{\mathcal{L}} = \sqrt{\sum z_i z_j g_{ij}}$, pero la cuestión que nos importa es si también se tiene el recíproco, en particular si las curvas extremales en el problema de minimizar la longitud de las curvas de la variedad que pasan por dos puntos fijos, son geodésicas. Observemos que el problema que tenemos con esta lagrangiana es que el campo lagrangiano existe pero no es único. No obstante se tiene el siguiente resultado que se basa en que la longitud de una curva no depende de la parametrización de la curva.

Teorema 7.42 *Si una curva satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange para la lagrangiana* $\overline{\mathcal{L}} = \sqrt{\sum z_i z_j g_{ij}}$, *es una geodésica reparametrizada.*

Demostración. Sea la curva $\sigma(t) = (x_i(t))$ solución de las ecuaciones de Euler–Lagrange, entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum g_{ij}x'_j}{\sqrt{\sum g_{kj}x'_k x'_j}}\right) = \frac{\sum \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i}x'_k x'_j}{2\sqrt{\sum g_{kj}x'_k x'_j}},$$

y si consideramos el parámetro longitud de arco

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\sum g_{kj}x'_k x'_j}dt,$$

y la reparametrización de nuestra curva $(y_i(s))$, tal que $y_i[s(t)] = x_i(t)$, en cuyos términos la ecuación anterior se expresa

$$\frac{d}{dt}\sum g_{ij}y'_j[s(t)] = \frac{\sum \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i}y'_k[s(t)]y'_j[s(t)]s'(t)}{2},$$

es decir

$$\frac{d}{ds}\sum g_{ij}y'_j = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i}y'_k y'_j,$$

lo cual significa que $(y_i(s))$ satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange, para la lagrangiana $\mathcal{L} = (1/2)\sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij}$ y por tanto es una geodésica. ∎

La lagrangiana anterior es un caso particular en la que $h = 0$. A continuación caracterizamos estas Lagrangianas.

Proposición 7.43 $h = 0$ *para una Lagrangiana* $\mathcal{L}$ *si y sólo si* $\mathcal{L}(\lambda D_x) = \lambda\mathcal{L}(D_x)$, *para todo* $\lambda > 0$. *Además para estas lagrangianas la acción*

$$I(\sigma) = \int_a^b \mathcal{L}(\sigma, \sigma')dt,$$

no depende de la parametrización, es decir que si consideramos una reparametrización suya $\gamma[s(t)] = \sigma(t)$, *con* $s'(t) > 0$, $s(a) = a'$ *y* $s(b) = b'$, *entonces*

$$\int_a^b \mathcal{L}(\sigma, \sigma')dt = \int_{a'}^{b'} \mathcal{L}(\gamma, \gamma')ds,$$

y si una curva $\sigma(t) = (x_i(t))$ *satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange, cualquier reparametrización suya, con* $s'(t) > 0$, *también.*

Demostración. Como el grupo uniparamétrico de H es $\tau_t(D_x) = \mathrm{e}^t\, D_x$, tendremos que

$$H\mathcal{L}(\mathrm{e}^t\, D_x) = (\mathcal{L} \circ \tau_{D_x})'(t),$$

y si $\mathcal{L}(\lambda D_x) = \lambda \mathcal{L}(D_x)$ entonces

$$\mathcal{L}[\tau_{D_x}(t)] = \mathcal{L}(\mathrm{e}^t\, D_x) = \mathrm{e}^t\, \mathcal{L}(D_x),$$

y para $t = 0$ $H\mathcal{L}(D_x) = \mathcal{L}(D_x)$, es decir $h = 0$. Recíprocamente si $h = 0$

$$\mathcal{L}(\mathrm{e}^t\, D_x) = H\mathcal{L}(\mathrm{e}^t\, D_x) = (\mathcal{L} \circ \tau_{D_x})'(t),$$

es decir que para $f(t) = \mathcal{L} \circ \tau_{D_x}$, $f'(t) = f(t)$ y por tanto $f(t) = f(0)\,\mathrm{e}^t$.

Para ver la segunda parte lo haremos en coordenadas en las que la condición anterior se expresa de la forma $\mathcal{L}(x, \lambda z) = \lambda \mathcal{L}(x, z)$, en cuyo caso se tiene como fácilmente puede demostrar el lector que

$$\mathcal{L}_{x_i}(x, \lambda z) = \lambda \mathcal{L}_{x_i}(x, z), \quad \mathcal{L}_{z_i}(x, \lambda z) = \mathcal{L}_{z_i}(x, z),$$

y por una parte se tiene que para $\gamma[s(t)] = \sigma(t)$, con $s'(t) > 0$, $s(a) = a'$ y $s(b) = b'$,

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathcal{L}(\sigma, \sigma')dt &= \int_a^b \mathcal{L}(\gamma[s(t)], \gamma'[s(t)]s'(t))dt \\ &= \int_a^b \mathcal{L}(\gamma[s(t)], \gamma'[s(t)])s'(t)dt \\ &= \int_{a'}^{b'} \mathcal{L}(\gamma, \gamma')ds,\end{aligned}$$

y si $\sigma(t) = (x_i(t))$ es una curva que satisface

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_i}(\sigma, \sigma') = \mathcal{L}_{x_i}(\sigma, \sigma'),$$

y $\gamma[s(t)] = \sigma(t)$, con $s' > 0$, entonces

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_i}(\gamma, \gamma' s') = \mathcal{L}_{x_i}(\gamma, \gamma' s'),$$

y por tanto

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}_{z_i}(\gamma, \gamma') = \mathcal{L}_{x_i}(\gamma, \gamma'). \quad \blacksquare$$

7.11.3. Principio de Maupertuis

Principio de Maupertuis 7.44 *Si $(\sigma(t), \sigma'(t))$ es una curva que da un valor extremo a $\int_a^b \mathcal{L}\,dt$, entonces $h(\sigma, \sigma') = E$ es constante y σ también da un valor extremo a la nueva acción "truncada"*

$$\int_a^b H\mathcal{L}\,dt,$$

si nos restringimos a las curvas γ en las que $h(\gamma, \gamma') = E$ (y por supuesto que $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$, para nuestros puntos fijos p y q).

Pero es más: σ da un valor extremal a

$$\int_{t_1}^{t_2} H\mathcal{L}\,dt,$$

si nos restringimos a las curvas γ para las que $h(\gamma, \gamma') = E$ y $\gamma(t_1) = p$, $\gamma(t_2) = q$, con $t_1 < t_2$ en el dominio de γ, sin condiciones.

Demostración. $(\sigma(t))$ satisface las ecuaciones de Lagrange y por (7.35) $h(\sigma, \sigma') = E$ es constante, por lo tanto la misma curva dará un valor extremo a la acción

$$\int_a^b (\mathcal{L} + h)dt = \int_a^b H\mathcal{L}dt,$$

si nos restringimos a las curvas γ en las que $h(\gamma, \gamma') = E$.

Veamos la segunda parte, para ello consideremos un desplazamiento infinitesimal de σ en las condiciones del enunciado, que podemos dar con una familia de curvas, parametrizada por un parámetro λ, tales que

$$\begin{gathered}\sigma_\lambda \colon [t_1(\lambda), t_2(\lambda)] \to \mathcal{V},\\ \sigma_\lambda(t_1(\lambda)) = p, \quad \sigma_\lambda(t_2(\lambda)) = q, \quad h(\sigma_\lambda(t), \sigma'_\lambda(t)) = E,\\ t_1(0) = a, \quad t_2(0) = b, \quad \sigma_0(t) = \sigma(t),\end{gathered}$$

de modo que tanto las funciones $t_i(\lambda)$ como $\sigma(t, \lambda) = \sigma_\lambda(t)$, sean diferenciables. Ahora sea

$$\begin{aligned}G(\lambda) &= \int_{t_1(\lambda)}^{t_2(\lambda)} H\mathcal{L}[\sigma_\lambda(t), \sigma'_\lambda(t)]dt\\ &= \int_{t_1(\lambda)}^{t_2(\lambda)} \mathcal{L}[\sigma_\lambda(t), \sigma'_\lambda(t)]dt + \int_{t_1(\lambda)}^{t_2(\lambda)} h[\sigma_\lambda(t), \sigma'_\lambda(t)]dt\\ &= F[t_2(\lambda), \lambda] - F[t_1(\lambda), \lambda] + E[t_2(\lambda) - t_1(\lambda)],\end{aligned}$$

para la función

$$F(t,\lambda)=\int_c^t \mathcal{L}[\sigma_\lambda(t),\sigma'_\lambda(t)]dt,$$

siendo por ejemplo $c=(a+b)/2$, (que por la continuidad de las t_i, para λ suficientemente pequeño $c\in[t_1(\lambda),t_2(\lambda)]$) y se tiene que

$$\begin{aligned}G'(0)&=F_t[b,0]t'_2(0)+F_\lambda[b,0]-F_t[a,0]t'_1(0)-F_\lambda[a,0]+\\&\quad+E[t'_2(0)-t'_1(0)]=\\&=\mathcal{L}[\sigma(b),\sigma'(b)]t'_2(0)+\int_a^b\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{L}[\sigma_\lambda(t),\sigma'_\lambda(t)]_{|\lambda=0}dt-\\&\quad-\mathcal{L}[\sigma(a),\sigma'(a)]t'_1(0)+E[t'_2(0)-t'_1(0)],\end{aligned}$$

y se sigue que $G'(0)=0$ pues σ satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange, por tanto

$$\begin{aligned}&\int_a^b\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{L}[\sigma_\lambda(t),\sigma'_\lambda(t)]_{|\lambda=0}dt=\\&=\sum\int_a^b\left[\mathcal{L}_{x_i}[\sigma(t),\sigma'(t)]\frac{\partial\sigma_i}{\partial\lambda}(t,0)+\mathcal{L}_{z_i}[\sigma(t),\sigma'(t)]\frac{\partial^2\sigma_i}{\partial t\partial\lambda}(t,0)\right]dt\\&=\sum\left(\int_a^b[\mathcal{L}_{x_i}-\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{z_i}]\frac{\partial\sigma_i}{\partial\lambda}(t,0)dt+\mathcal{L}_{z_i}[\sigma(t),\sigma'(t)]\ \frac{\partial\sigma_i}{\partial\lambda}(t,0)\right]_a^b\Bigg)\\&=\sum\mathcal{L}_{z_i}[\sigma(b),\sigma'(b)]\frac{\partial\sigma_i}{\partial\lambda}(b,0)-\sum\mathcal{L}_{z_i}[\sigma(a),\sigma'(a)]\frac{\partial\sigma_i}{\partial\lambda}(a,0)\\&=H\mathcal{L}[\sigma(a),\sigma'(a)]t'_1(0)-H\mathcal{L}[\sigma(b),\sigma'(b)]t'_2(0)\end{aligned}$$

pues $\sigma(t(\lambda),\lambda)=cte$, por tanto derivando en $\lambda=0$

$$\frac{\partial\sigma_i}{\partial\lambda}(a,0)=-\sigma'_i(a)t'_1(0),\quad \frac{\partial\sigma_i}{\partial\lambda}(b,0)=-\sigma'_i(b)t'_2(0).\quad\blacksquare$$

7.11.4. Curvas de mínima acción y geodésicas

Consideremos una variedad Riemanniana $\mathcal{V}$, en ella una función, que llamaremos *energía potencial* $U\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ y la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(D_x)=(1/2)D_x\cdot D_x-U(x)=T-U,$$

es decir en coordenadas

$$\mathcal{L}[x_1,\cdots,x_n,z_1,\cdots,z_n]=\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^n z_iz_jg_{ij}\right)-U(x),$$

entonces si σ da un valor extremal a la acción

$$\int_a^b \mathcal{L}dt = \int_a^b (T-U)dt,$$

y $\sigma' \neq 0$, entonces satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange y por tanto la energía, que en este caso es suma de las energías cinética y potencial

$$h = H\mathcal{L} - \mathcal{L} = 2T - \mathcal{L} = T + U$$

es constante en ella $h(\sigma, \sigma') = E$ y por el principio de Maupertuis también es extremal de la nueva acción "truncada"

$$\begin{aligned}\int_a^b (H\mathcal{L})dt = \int_a^b 2Tdt &= \int_a^b \sqrt{2T}\sqrt{2T}dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij}}\sqrt{2(h-U)}dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n z_i z_j g_{ij}}\sqrt{2(E-U)}dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n z_i z_j \overline{g_{ij}}}dt,\end{aligned}$$

si nos restringimos a las curvas ϕ tales que $\phi(a) = p$, $\phi(b) = q$ y $h(\phi, \phi') = E$ (por tanto $T + U = E$ y $U < E$), para la métrica

$$\overline{g_{ij}} = 2(E-U)g_{ij},$$

en el abierto $\{x \in \mathcal{V} : \ U(x) < E\}$. Ahora como la nueva acción es una longitud de una curva que pasa por p y q —que por (7.43) no cambia su valor si reparametrizamos la curva— y como dada una curva ϕ, que pase por p y q siempre podemos conseguir una reparametrización suya $\chi[t] = \phi[s(t)]$, para la que $h[\chi, \chi'] = E$, —pues basta considerar

$$\begin{aligned}h[\chi, \chi'] &= (T+U)[\phi[s(t)], \phi'[s(t)]s'(t)] \\ &= T[\phi[s(t)], \phi'[s(t)]s'(t)] + U(\phi[s(t)]) \\ &= s'(t)^2 T[\phi[s(t)], \phi'[s(t)]] + U(\phi[s(t)]) = E,\end{aligned}$$

que define una ecuación diferencial $s'(t) = F[s(t)]$ (y basta considerar la solución que pasa por $s(0) = a$)—, tendremos que la restricción a las

curvas en las que $h = E$ es constante es superflua, por lo que nuestra curva inicial σ da un valor extremal a la acción

$$\int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} z_i z_j \overline{g_{ij}} dt},$$

sin restricciones, y por (7.42) es una geodésica reparametrizada de la métrica $\overline{g_{ij}}$. En definitiva hemos demostrado el siguiente resultado (veremos desde otro punto de vista este resultado en el apéndice).

Teorema 7.45 *En una variedad Riemanniana, si una curva σ da un valor extremal a la acción definida por la lagrangiana*

$$\mathcal{L}(D_x) = (1/2)D_x \cdot D_x - U(x),$$

tiene energía constante $E = h(\sigma, \sigma')$ y es una geodésica reparametrizada para la nueva métrica

$$\overline{g}(D_x, E_x) = 2[E - U(x)]D_x \cdot E_x.$$

Corolario 7.46 *La trayectoria de una partícula que en $\mathbb{R}^3$ satisface la ley de Newton $F = ma$, para una fuerza F que deriva de un potencial $U(x)$, tiene energía (cinética mas potencial) constante E y es una curva geodésica reparametrizada, de la métrica*

$$g_{ij} = 2m[E - U(x)]\delta_{ij}.$$

7.11.5. El Teorema de Noëther.

Consideremos un campo tangente $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ con grupo uniparamétrico X_s, entonces si en coordenadas $D = \sum f_i \partial x_i$ y $F = (f_i)$

$$X_s(p) = p + sF(p) + o(s^2).$$

Consideremos ahora una Lagrangiana $\mathcal{L}$ y supongamos que D la deje invariante, en el sentido de que para cada s y cada $B_p \in T(\mathcal{V})$

$$\mathcal{L}(B_p) = \mathcal{L}(X_{s*}B_p),$$

lo cual implica que para cada curva

$$\sigma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

y la nueva curva transformada por el grupo

$$\gamma_s(t) = X_s[\sigma(t)],$$

se tiene, en términos de coordenadas,

$$\mathcal{L}(\sigma(t), \sigma'(t)) = \mathcal{L}(\gamma_s(t), \gamma_s'(t)),$$

y por tanto para cualesquiera t_0, t_1 de su dominio, es constante la función en s

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\gamma_s(t), \gamma_s'(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\sigma + sF + o(s^2), \sigma' + sF' + o(s^2))dt$$

y si denotamos $f_i(t) = f_i[\sigma(t)]$ y derivamos esta expresión en $s = 0$, tendremos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} (\sum \mathcal{L}_{x_i}(\sigma, \sigma')f_i + \sum \mathcal{L}_{z_i}(\sigma, \sigma')f_i')dt \\ &= \sum \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L}_{x_i} - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_i})f_i dt + \sum \int_{t_0}^{t_1} (\frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_i} f_i + \mathcal{L}_{z_i} f_i')dt \\ &= \sum \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L}_{x_i} - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_i})f_i dt + \sum \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L}_{z_i} f_i)'dt, \end{aligned}$$

y si σ es una curva que satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange, tendremos que

$$\sum \mathcal{L}_{z_i}(\sigma(t), \sigma'(t))f_i(\sigma(t)),$$

es constante en t. Este resultado constituye el *Teorema de Noëther* que a continuación demostramos de forma rigurosa e intrínseca. Pero antes veamos el siguiente Lema.

Lema 7.47 *Si $\overline{D} \in \mathcal{D}(T\mathcal{V})$ y Z es Lagrangiano entonces*

$$Z(\omega_{\mathcal{L}}\overline{D}) = \overline{D}\mathcal{L} - \omega_{\mathcal{L}}(\overline{D}^L Z).$$

Demostración. En coordenadas se tiene que $\omega_{\mathcal{L}} Z = \sum \mathcal{L}_{z_i} Z x_i = H\mathcal{L}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} Z(\omega_{\mathcal{L}}\overline{D}) &= Z^L \omega_{\mathcal{L}}(\overline{D}) + \omega_{\mathcal{L}}(Z^L \overline{D}) \\ &= (i_Z d\omega_{\mathcal{L}} + d i_Z \omega_{\mathcal{L}})(\overline{D}) - \omega_{\mathcal{L}}(\overline{D}^L Z) \\ &= (-dh + d(H\mathcal{L}))(\overline{D}) - \omega_{\mathcal{L}}(\overline{D}^L Z) = \overline{D}\mathcal{L} - \omega_{\mathcal{L}}(\overline{D}^L Z). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 7.48 *Si Z es un campo Lagrangiano de segundo orden y $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ es un campo con subida $\overline{D} \in \mathcal{D}(T\mathcal{V})$, entonces*

$$Z(\omega_{\mathcal{L}}\overline{D}) = \overline{D}\mathcal{L}.$$

Demostración. Es consecuencia del resultado anterior y de que $(\overline{D}^L Z)x_i = 0$ (ver (7.61), pág.554), pues

$$\omega_{\mathcal{L}}(\overline{D}^L Z) = \sum \mathcal{L}_{z_i}(\overline{D}^L Z)x_i = 0.$$

Teorema de Noëther 7.49 *Si Z es un campo Lagrangiano de segundo orden y $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ es un campo cuya subida deja invariante la lagrangiana, es decir $\overline{D}(\mathcal{L}) = 0$, entonces la función $\omega_{\mathcal{L}}\overline{D}$, es una integral primera de Z.*

Demostración. Por el resultado anterior. ∎

Nota 7.50 Observemos que en términos de coordenadas la integral primera del Teorema de Noëther es

$$\omega_{\mathcal{L}}\overline{D} = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathcal{L}_{z_i},$$

y por tanto no es necesario calcular $\overline{D}$, sino que basta con conocer D. El teorema pide no obstante que $\overline{D}\mathcal{L} = 0$ y esto puede precisar el cálculo de $\overline{D}$, sin embargo si D es una simetría del problema en cuestión y la lagrangiana es canónica, esa condición se satisface automáticamente.

Nota 7.51 Observemos que el **Teorema de Noëther** es una simple consecuencia de la definición de campo Lagrangiano (cuando es de segundo orden que es de los que habla el Teorema), o con mas precisión, de su caracterización (7.38), pues el campo Z es Lagrangiano si y sólo si

$$Z(\mathcal{L}_{z_i}) = \mathcal{L}_{x_i},$$

ahora bien en nuestra variedad $\mathcal{V}$ elegimos el sistema de coordenadas x_i que queramos, a partir de él construimos las (x_i, z_i) correspondientes en el fibrado tangente y para esas coordenadas es para las que se satisface la igualdad anterior (recordemos que el que Z sea de segundo orden es intrínseco, no depende de coordenadas). Pues bien, si nosotros tenemos un campo D tal que $\overline{D}(\mathcal{L}) = 0$, lo único que hay que hacer es elegir un

sistema de coordenadas x_i, en el que $D = \partial x_j$, en cuyo caso $\overline{D} = \partial x_j$ y lo único que decimos es que si $\mathcal{L}_{x_j} = 0$, entonces $\mathcal{L}_{z_j}$ es una integral primera de Z y esa es la función de la que habla el Teorema, pues en este sistema de coordenadas

$$\omega_{\mathcal{L}}\overline{D} = \sum \mathcal{L}_{z_i} dx_i(\partial x_j) = \mathcal{L}_{z_j}.$$

Por último el Lema (7.47) nos da un Teorema de Noëther más general en el siguiente sentido: si $\overline{D}$ es un campo del fibrado tangente $T(\mathcal{V})$, tal que

$$\overline{D}\mathcal{L} = 0 \quad \text{y} \quad \omega_{\mathcal{L}}[\overline{D}, Z] = 0 \quad \Rightarrow \quad Z(\omega_{\mathcal{L}}\overline{D}) = 0.$$

Ejemplo 7.11.2 El Problema de los dos cuerpos El problema de los dos cuerpos, visto en la sección 6.13, pág.404, tiene asociada la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{2} + \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

pues en este caso $H(\mathcal{L}) = z_1^2 + z_2^2$, por tanto

$$h = \frac{z_1^2 + z_2^2}{2} - \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$
$$\omega_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_{z_1} dx + \mathcal{L}_{z_2} dy = z_1 dx + z_2 dy,$$

y como el campo Hamiltoniano correspondiente a h

$$Z = z_1 \frac{\partial}{\partial x} + z_2 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{xc}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{yc}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \frac{\partial}{\partial z_2},$$

satisface $Z\mathcal{L}_{z_1} = Zz_1 = \mathcal{L}_x$, $Z\mathcal{L}_{z_2} = Zz_2 = \mathcal{L}_y$, es el campo lagrangiano.

Es natural pensar que el campo de los giros

$$D = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y},$$

deje invariante nuestra Lagrangiana, pues es una simetría de nuestro problema, y es cierto pues su subida es

$$\overline{D} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

por lo tanto el teorema anterior nos asegura que

$$u_2 = \omega_{\mathcal{L}}(\overline{D}) = -z_1 y + z_2 x,$$

es integral primera de Z (ver (7.7), pág.498). Es decir que para cualquier trayectoria

$$-x'y + y'x = cte,$$

lo cual significa en coordenadas polares

$$\rho^2\theta' = cte,$$

que según vimos en la sección 4.14.4, pág.265, es *la segunda ley de Kepler*. Recordemos que $\rho\theta'$ es la componente de la velocidad de la masa m en la dirección perpendicular a la línea que une ambas masas, por lo que este resultado se conoce como la *ley de conservación del momento angular* (ver pág.404).

Ahora bien en la página 498 encontramos tres integrales primeras de nuestro campo hamiltoniano Z

$$u_1 = h = \frac{z_1^2 + z_2^2}{2} - \frac{c}{\rho}, \quad u_2 = -z_1 y + z_2 x, \quad u_3 = c(x/r) - z_2 u_2,$$

para $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, siendo la tercera una de las componentes del *vector de Runge–Lenz* (ver la pág.405) . La cuestión es si u_3 se obtiene también por un invariante Noëther y la respuesta es que sí, aunque la demostración la hagamos al revés (con lo cual queda por entender) pues ya conocemos la función, para ello hacemos uso de la generalización del Teorema de Noëther (7.51), pues lo que no hay es un campo subido que nos la dé, sin embargo podemos encontrar un campo D verificando

$$D\mathcal{L} = 0, \quad \omega_{\mathcal{L}}[D, Z] = 0 \quad \text{y} \quad \omega_{\mathcal{L}} D = z_1(Dx) + z_2(Dy) = \frac{cx}{\rho} - z_2 u_2.$$

para el que tomamos por la tercera ecuación

$$Dx = \frac{cx}{\rho z_1}, \quad Dy = -u_2,$$

y para que se verifique la segunda, $[D, Z]x_i = 0$ lo cual equivale a que $Dz_i = Z(Dx_i)$, es decir,

$$\begin{aligned} Dz_1 &= Z(Dx) = Z\left(\frac{cx}{\rho z_1}\right) = \frac{c}{\rho} - \frac{cx^2}{\rho^3} - \frac{cxyz_2}{z_1\rho^3} + \frac{c^2x^2}{z_1^2\rho^4}, \\ Dz_2 &= Z(-u_2) = 0, \end{aligned}$$

y para este campo tenemos (la suerte de que)

$$D\mathcal{L} = -\frac{cx}{\rho z_1}\frac{cx}{\rho^3} + (xz_2 - yz_1)\frac{cy}{\rho^3} + \left(\frac{c}{\rho} - \frac{cx^2}{\rho^3} - \frac{cxyz_2}{z_1\rho^3} + \frac{c^2x^2}{z_1^2\rho^4}\right) z_1 = 0.$$

A continuación vamos a aplicar el resultado anterior a distintas variedades Riemannianas bidimensionales, en las que consideraremos un sistema de coordenadas (u, v) y la lagrangiana de la energía cinética

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} z_i z_j g_{ij} = \frac{Ez_1^2 + 2Fz_1z_2 + Gz_2^2}{2}.$$

En cuyo caso hemos visto que la energía es $h = \mathcal{L}$ y el campo lagrangiano es el campo geodésico Z. Además para cada simetría de la superficie $D = f\partial_u + g\partial_v$

$$\omega_{\mathcal{L}}(\overline{D}) = f\mathcal{L}_{z_1} + g\mathcal{L}_{z_2},$$

es una integral primera de Z por el *Teorema de Noëther*.

Ejemplo 7.11.3 La esfera. Consideremos la *esfera* y las coordenadas esféricas (φ, θ),

$$\begin{array}{l} x = \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, \\ y = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \\ z = \cos\theta, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial\varphi} = -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \dfrac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \dfrac{\partial}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta} = \cos\varphi\cos\theta \dfrac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \dfrac{\partial}{\partial y} - \operatorname{sen}\theta \dfrac{\partial}{\partial z}, \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad E = \operatorname{sen}^2\theta, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

por lo tanto para este problema la lagrangiana vale

$$\mathcal{L} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta z_1^2 + z_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_{z_1} = \operatorname{sen}^2\theta z_1, \quad \mathcal{L}_{z_2} = z_2.$$

Ahora bien la esfera tiene tres campos tangentes cuyos grupos uniparamétricos la dejan invariante: los tres giros espaciales

$$\begin{aligned} y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} &= -\frac{\cos\varphi\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \operatorname{sen}\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}, \\ z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} &= -\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}, \\ x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial\varphi}, \end{aligned}$$

(compruébese que para ellos $\overline{D}\mathcal{L} = 0$), lo cual implica que las tres funciones

$$\begin{gathered} -z_1\cos\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\theta - z_2\operatorname{sen}\varphi, \\ -z_1\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\theta + z_2\cos\varphi, \\ z_1\operatorname{sen}^2\theta, \end{gathered}$$

son integrales primeras del campo geodésico. Ahora bien esto significa que a lo largo de una trayectoria geodésica $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, las componentes del momento angular $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$

$$\begin{aligned} yz' - zy' &= -\varphi' \cos\varphi \cos\theta \operatorname{sen}\theta - \theta' \operatorname{sen}\varphi, \\ zx' - xz' &= -\varphi' \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \operatorname{sen}\theta + \theta' \cos\varphi, \\ xy' - yx' &= \varphi' \operatorname{sen}^2\theta, \end{aligned}$$

son constantes y si su valor es respectivamente a, b y c, entonces nuestra geodésica está en el plano perpendicular al momento angular, $ax + by + cz = 0$, pues

$$ax + by + cz = (yz' - zy')x + (zx' - xz')y + (xy' - yx')z = 0,$$

por tanto nuestra geodésica, que está en la esfera y en el plano, está en un círculo máximo. Por último observemos que la energía, que también es integral primera de Z, deberíamos de poder ponerla en función de ellas y así es, pues es

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 7.11.4 El cono. Si nuestra superficie es el *cono*, $x^2 + y^2 = z^2$ y consideramos coordenadas polares

$$\begin{aligned} &x = \rho\cos\theta, \\ &y = \rho\operatorname{sen}\theta, \quad \Rightarrow \\ &z = \rho, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\rho} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \\ &\frac{\partial}{\partial\theta} = -\rho\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial x} + \rho\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}, \\ \Rightarrow \quad &E = 2, \quad F = 0, \quad G = \rho^2, \end{aligned}$$

la lagrangiana vale

$$\mathcal{L} = z_1^2 + \frac{\rho^2 z_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_{z_1} = 2z_1, \quad \mathcal{L}_{z_2} = z_2\rho^2,$$

y podemos considerar el campo de los giros ∂_θ que nos deja el cono invariante, (compruébese que para este campo $\overline{D}\mathcal{L} = 0$), esto implica que

$$z_2\rho^2,$$

es una integral primera del campo geodésico. Compruébese que es el módulo del momento angular dividido por $\sqrt{2}$. $\blacksquare$

Ejercicio 7.11.2 Aplicar el teorema de Noëther, como en los ejemplos anteriores, para el plano, para el cilindro, para el toro y en general para una superficie de revolución.

7.12. Cálculo de variaciones en Jets

7.12.1. Jets de aplicaciones diferenciables

En (6.9.3), pág.397 estudiamos el jet 1 de funciones, el cual es un caso particular de jets de aplicaciones.

Dados dos variedades diferenciables $\mathcal{U}$ de dimensión n y $\mathcal{V}$ de dimensión m, consideremos para cada $x \in \mathcal{U}$ e $y \in \mathcal{V}$ el conjunto

$$\mathcal{J}^1_{xy} = Hom(T_x(\mathcal{U}), T_y(\mathcal{V})) = \{\phi_{xy} \colon T_x(\mathcal{U}) \to T_y(\mathcal{V}), \text{lineales}\} \simeq \mathcal{F}_{xy}/\sim,$$

para $\mathcal{F}_{xy}$ el espacio de las aplicaciones diferenciables $F \colon U_x \to V_y$, para U_x un entorno abierto de x y V_y un entorno abierto de y, tales que $F(x) = y$, en el que definimos la relación de equivalencia

$$F \sim G \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = G(x) = y, \quad F_* = G_* \colon T_x(\mathcal{U}) \to T_y(\mathcal{V}).$$

Definición. Definimos el *jet* 1 *de aplicaciones* entre $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ como la unión de todos estos conjuntos

$$\mathcal{J}^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \bigcup_{x \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{V}} \mathcal{J}^1_{xy},$$

ahora consideramos las proyecciones

$$\pi_1 \colon \mathcal{J}^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \to \mathcal{U} \quad \pi_1(\phi_{xy}) = x, \qquad \pi_2 \colon \mathcal{J}^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \to \mathcal{V} \quad \pi_2(\phi_{xy}) = y.$$

Para cada punto ϕ_{xy} del jet, consideremos un entorno coordenado (U, x_j) de $x \in \mathcal{U}$ y otro (V, y_i) de $y \in \mathcal{V}$ y el conjunto (entorno abierto coordenado de ϕ_{xy}) $\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$ con las funciones (coordenadas)

$$x_i(\phi_{pq}) = x_i(p), \quad y_j(\phi_{pq}) = y_j(q), \quad z_{ij}(\phi_{pq}) = \phi_{pq}(\partial_{x_j}) y_i,$$

las cuales establecen una biyección (homeomorfismo) entre $\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$ y un abierto $U_n \times V_m \times \mathbb{R}^{nm}$ de $\mathbb{R}^{n+m+nm}$. Se demuestra que estas cartas definen una estructura diferenciable y que para ella π_1 y π_2 son *proyecciones regulares*.

7.12.2. Distribución canónica

En el jet podemos definir una distribución canónica, considerando en cada punto ϕ, el núcleo Δ_ϕ, de la aplicación lineal entre los espacios tangentes (para $y = \pi_2(\phi)$)

$$T_\phi(\mathcal{J}^1(\mathcal{U},\mathcal{V})) \to T_y(\mathcal{V}),$$
$$D_\phi \to \pi_{2*}(D_\phi) - \phi(\pi_{1*}D_\phi),$$

es decir los vectores tales que

$$\pi_{2*}(D_\phi) = \phi(\pi_{1*}D_\phi),$$

cuyas ecuaciones en términos de coordenadas son

$$\theta_i = dy_i - \sum_{i=1}^{n} z_{ij}dx_j = 0,$$

por tanto el sistema de Pfaff asociado es $\mathcal{P} = \Delta^0 =< \theta_1, \ldots, \theta_n >$.

A veces —como veremos a continuación—, es preferible ver los elementos del jet, no como aplicaciones lineales $\phi\colon T_x(\mathcal{U}) \to T_y(\mathcal{V})$, sino como su gráfica en $T_x(\mathcal{U}) \times T_y(\mathcal{V}) \sim T_{(x,y)}(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$, es decir como el subespacio de dimensión $n = \dim \mathcal{U}$, $H_\phi = \{(T_x, \phi(T_x)) : T_x \in T_x(\mathcal{U})\}$ (observemos que no son todos los subespacios de dimensión n de $T_{(x,y)}(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$, sino sólo los que se proyectan en $T_x(\mathcal{U})$). En estos términos la distribución Δ se expresa de forma mas sencilla; en cada punto del jet, entendido como subespacio H,

$$D_H \in \Delta_H \quad \Leftrightarrow \quad \pi_* D_H \in H, \tag{7.19}$$

para $\pi\colon \mathcal{J}^1(\mathcal{U},\mathcal{V}) \to \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, $\pi(H) = (x, y)$.

Proposición 7.52 *Dado un campo $E \in \mathcal{D}(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$ existe un único campo $\bar{E} \in \mathcal{D}(\mathcal{J}^1(\mathcal{U},\mathcal{V}))$, que llamaremos subida de E al jet, tal que para $\pi(\phi_{xy}) = (x, y)$, $\pi_*\bar{E} = E$ y $\bar{E}^L\Delta \subset \Delta$.*

Demostración. Como decíamos anteriormente en este caso es preferible ver los elementos del jet, no como aplicaciones lineales sino como subespacios $H \subset T_{(x,y)}(\mathcal{U}\times\mathcal{V})$, de dimensión $n = \dim\mathcal{U}$. En estos términos si σ_t es el grupo uniparamétrico de E el de $\bar{E}$ es $\tau_t(H_\phi) = \sigma_{t*}(H_\phi)$, para los t para los que este subespacio no es vertical. Obviamente $\pi_*\bar{E} = E$, pues $\pi\circ\tau_t = \sigma_t\circ\pi$ y por (7.19) $\bar{E}^L\Delta \subset \Delta$, pues si $D_H \in \Delta_H$, $\tau_{t*}D_H \in \Delta_{\tau_t H}$, ya que

$$\pi_*\tau_{t*}D_H = \sigma_{t*}\pi_*D_H \in \sigma_{t*}H = \tau_t(H).$$

Unicidad: Si hubiese dos campos, su diferencia $\bar{E}$ verificaría

$$\pi_*\bar{E} = 0, \quad \bar{E}^L\theta_i = \sum f_{ik}\theta_k, \quad \text{para todo } i$$

de la primera se sigue que $\bar{E}x_j = \bar{E}y_i = 0$, por tanto $\bar{E}^L\theta_i = -\sum \bar{E}z_{ij}dx_j$ y por la segunda y esto $f_{ik} = \bar{E}^L\theta_i(\partial_{y_k}) = 0$, lo cual implica $\bar{E}z_{ij} = 0$ y por tanto $\bar{E} = 0$[14]. ∎

Nota 7.53 El jet 1 de funciones estudiado en (6.9.3), pág.397, corresponde al caso en que $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ en cuyo caso tenemos una única $\theta = dy - \sum z_i dx_i$, que es la que vimos en la Nota (6.57), pág.398 y que aparece de forma natural en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden.

Por otro lado las lagrangianas sobre curvas estudiadas en el Teorema (7.32), pág.509, corresponden intrinsecamente al caso en que $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ —y por tanto son lagrangianas definidas en el jet 1 de curvas—. En este caso tenemos n 1–formas que son

$$dy_1 - z_1 dt, \ldots, \ dy_n - z_n dt.$$

Mientras que las lagrangianas estudiadas en el Teorema (7.33), pág.511, corresponden intrínsecamente de nuevo al caso en que $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ y por tanto son lagrangianas definidas en el jet 1 de funciones.

[14] Una cuenta análoga nos muestra cómo es en coordenadas la subida de un campo $E = \sum f_j\partial_{x_j} + \sum g_i\partial_{y_i}$. Por una parte $\bar{E}x_j = f_j$ y $\bar{E}y_i = g_i$ y por otra tenemos que $\bar{E}^L\theta_i = \sum f_{ik}\theta_k$; ahora igualando coeficientes en esta ecuación tenemos

$$g_{iy_k} - \sum_j z_{ij}f_{jy_k} = f_{ik}, \qquad g_{ix_j} - \bar{E}z_{ij} - \sum_k z_{ik}f_{kx_j} = -\sum_k f_{ik}z_{kj},$$

que nos da el valor de $\bar{E}z_{ij} = g_{ix_j} - \sum_k z_{ik}f_{kx_j} + \sum_k(g_{iy_k} - \sum_s z_{is}f_{sy_k})z_{kj}$.

Proposición 7.54 *Dada una aplicación diferenciable $F\colon U \to V$, con $U \subset \mathcal{U}$ y $V \subset \mathcal{V}$ abiertos,*

$$\mathcal{S} = \{F_*\colon T_x(\mathcal{U}) \to T_{F(x)}(\mathcal{V}) :\ x \in U\},$$

es una subvariedad n–dimensional del jet $\mathcal{J}^1(\mathcal{U},\mathcal{V})$, difeomorfa a U por π_1 y tangente a la distribución Δ. Además podemos definir la aplicación $\bar{F}\colon U \to \mathcal{J}^1$, $\bar{F}(x) = F_*$, tal que $\bar{F}^*\theta_i = 0$ y $\pi_2 \circ \bar{F} = F$. Recíprocamente si $\phi\colon U \to \mathcal{J}^1$ es una aplicación diferenciable tal que $\phi^*\theta_i = 0$, entonces existe una única $F\colon U \to \mathcal{V}$, tal que $\bar{F} = \phi$.

Demostración. En coordenadas se tiene que

$$\mathcal{S} = \{y_i(F_*) = y_i(F(x)) = f_i(x), z_{ij}(F_*) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\},$$

por tanto es subvariedad, tiene coordenadas (x_j) y

$$\theta_{i|\mathcal{S}} = (dy_i - \sum z_{ij}dx_j)_{|\mathcal{S}} = 0.$$

Para el recíproco, como $\pi_2 \circ \bar{F} = F$, basta definir $F(x) = \pi_2[\phi(x)]$ y se tiene que

$$x_j[\bar{F}(x)] = x_j(x) = x_j[\phi(x)], y_i[\bar{F}(x)] = y_i[\phi(x)], z_{ij}[\bar{F}(x)] = z_{ij}[\phi(x)],$$

pues para la última tenemos

$$\sum F^* z_{ij}dx_j = F^*dy_i = \phi^*dy_i = \sum \phi^* z_{ij}dx_j. \quad \blacksquare$$

Definición. Llamamos *Lagrangiana* a cualquier función $\mathcal{L}$ en el jet.

Consideramos que $\mathcal{U}$ tiene una orientación definida por una n–forma $\omega_{\mathcal{U}} \in \Omega_n(\mathcal{U})$, que llevamos al jet por π_1, definiendo $\Omega = \pi_1^*\omega_{\mathcal{U}}$.

Definición. Dada una Lagrangiana $\mathcal{L}$, diremos que una aplicación diferenciable $F\colon U \to \mathcal{V}$ da un *valor extremal al problema variacional* definido por la n–forma $\mathcal{L}\Omega$ si para[15]

$$\mathcal{S} = \{F_*\colon T_x(\mathcal{U}) \to T_{F(x)}(\mathcal{V}) :\ x \in U\},$$

y todo campo $D \in \mathcal{D}$, que deje invariante el sistema de Pfaff, $D^L\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ —a los que se llama *transformaciones infinitesimales de contacto*—, y con soporte compacto, se tiene

$$\int_{\mathcal{S}} D^L(\mathcal{L}\Omega) = 0.$$

[15] A veces también llamaremos extremal a la subvariedad $\mathcal{S}$.

Nota 7.55 Obviamente los extremales no cambian si cambiamos la n–forma por $\mathcal{L}\Omega + \sum \theta_i \wedge \Omega_i$, para cualesquiera $n-1$–formas Ω_i, pues

$$\begin{aligned} D^L(\mathcal{L}\Omega + \sum \theta_i \wedge \Omega_i)_{|\mathcal{S}} &= D^L(\mathcal{L}\Omega)_{|\mathcal{S}} + \sum (D^L\theta_i \wedge \Omega_i + \theta_i \wedge D^L\Omega_i)_{|\mathcal{S}} \\ &= D^L(\mathcal{L}\Omega)_{|\mathcal{S}}, \end{aligned}$$

ya que $D^L\theta_i \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{P}_{|\mathcal{S}} = 0$.

Lema Fundamental 7.56 *Dada una Lagrangiana $\mathcal{L}$, existe una única $\Theta = \mathcal{L}\Omega + \sum \theta_i \wedge \Omega_i$, con $d\Theta = 0$ módulo las θ_i.*

Demostración. Se tiene que $d\Omega = 0$, por tanto $d(\mathcal{L}\Omega) = d\mathcal{L} \wedge \Omega$ es una $n+1$–forma múltiplo de Ω, por lo tanto combinación única de

$$dy_i \wedge \Omega = \theta_i \wedge \Omega, \quad dz_{ij} \wedge \Omega = (i_{\partial_{x_j}} d\theta_i) \wedge \Omega,$$

ahora bien $d\theta_i = \sum dx_j \wedge dz_{ij}$ y $\Omega = f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, por tanto $d\theta_i \wedge \Omega = 0$ y se sigue que[16]

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}\Omega) = d\mathcal{L} \wedge \Omega &\equiv \sum_{i,j} f_{ij} dz_{ij} \wedge \Omega = \sum_{i,j} f_{ij} (i_{\partial_{x_j}} d\theta_i) \wedge \Omega \\ &= \sum_i (i_{\sum f_{ij}\partial_{x_j}} d\theta_i) \wedge \Omega = \sum_i (i_{E_i} d\theta_i) \wedge \Omega \\ &= -\sum_i d\theta_i \wedge i_{E_i}\Omega \equiv -d(\sum_i \theta_i \wedge i_{E_i}\Omega), \end{aligned}$$

y el resultado se sigue para $\Theta = \mathcal{L}\Omega + \sum \theta_i \wedge \Omega_i$, siendo $\Omega_i = i_{E_i}\Omega$, $E_i = \sum f_{ij}\partial_{x_j}$ y $f_{ij} = \mathcal{L}_{z_{ij}}$. ∎

Definición. A la n–forma del resultado anterior la llamamos *n–forma de Poincare–Cartan* y se expresa

$$\Theta = \mathcal{L}\Omega + \sum \theta_i \wedge \Omega_i = \mathcal{L}\Omega + \sum \theta_i \wedge i_{E_i}\Omega, \qquad E_i = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{L}_{z_{ij}} \partial_{x_j}.$$

[16] Escribiremos $\equiv$ cuando las igualdades sean módulo las θ_i.

Nota 7.57 Se sigue de (7.56) que existen n–formas γ_i tales que $d\Theta = \sum \theta_i \wedge \gamma_i$, veamos quienes son

$$\begin{aligned} d\Theta &= d\mathcal{L} \wedge \Omega + \sum d\theta_i \wedge \Omega_i - \sum \theta_i \wedge d\Omega_i = \\ &= \sum \mathcal{L}_{y_i} dy_i \wedge \Omega + \sum \mathcal{L}_{z_{ij}} dz_{ij} \wedge \Omega \\ &\qquad + \sum (\sum dx_j \wedge dz_{ij}) \wedge \Omega_i - \sum \theta_i \wedge d\Omega_i = \\ &= \sum \mathcal{L}_{y_i} \theta_i \wedge \Omega - \sum \theta_i \wedge d\Omega_i = \\ &= \sum \theta_i \wedge (\mathcal{L}_{y_i} \Omega - d\Omega_i) \quad \Rightarrow \quad \gamma_i = \mathcal{L}_{y_i} \Omega - E_i^L \Omega, \end{aligned}$$

pues se tiene que $i_{E_i}(dx_j \wedge dz_{ij} \wedge \Omega) = 0$ lo cual implica

$$0 = i_{E_i}(dx_j \wedge dz_{ij}) \wedge \Omega + (dx_j \wedge dz_{ij}) \wedge i_{E_i}\Omega = \mathcal{L}_{z_{ij}} dz_{ij} \wedge \Omega + (dx_j \wedge dz_{ij}) \wedge i_{E_i}\Omega.$$

Lema 7.58 *Dada una variedad orientada y $\gamma \in \Lambda_n$ tal que para toda función de soporte compacto ρ, $\int \rho\gamma = 0$, entonces $\gamma = 0$.*

Demostración. Sea x un punto y consideremos un entorno coordenado orientado $(U; x_i)$, entonces en él $\gamma = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ y $\gamma_x = 0$ pues $f(x) = 0$ ya que en caso contrario, si $f(x) = a > 0$, existe un entorno de x, $V \subset U$, en el que $f \geq a/2$ y tomando una $\rho \geq 0$ con soporte en U y $\rho = 1$ en un compacto $K \subset V$, entorno de x

$$0 = \int_U \rho f \, dx_1 \cdots dx_n \geq \int_K \rho f \, dx_1 \cdots dx_n \geq (a/2) m[K] > 0,$$

lo cual es absurdo. ∎

Teorema 7.59 *En los términos de la aplicación diferenciable F y la subvariedad $\mathcal{S}$ de (7.54), pág.547, los enunciados siguientes son equivalentes:*

(i) F es un extremal del problema variacional.

(ii) Para todo campo $D \in \mathcal{D}$, con soporte compacto y tal que $D^L\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$, se tiene

$$\int_{\mathcal{S}} D^L\Theta = 0.$$

(iii) $\mathcal{S}$ satisface las Ecuaciones de Euler–Lagrange[17]*:*

$$\gamma_{i|\mathcal{S}} = (\mathcal{L}_{y_i}\Omega - E_i^L\Omega)_{|\mathcal{S}} = 0.$$

(iv) Para todo campo tangente $E \in \mathcal{D}$, $i_E d\Theta_{|\mathcal{S}} = 0$.

Demostración. (i)⇔(ii) por (7.56) y la Nota (7.55).

(ii)⇒(iii): Si $E \in \mathcal{D}$ es de soporte compacto, podemos aplicar el corolario (14.14) del Teorema de Stokes, (14.12), pág.988, pues $\mathcal{S}$ es orientada e $i_E\Theta_{|\mathcal{S}}$ es de soporte compacto, ya que $\mathcal{S} \cap \operatorname{sop} E$ es un compacto de $\mathcal{S}$ pues es cerrado y su imagen por el homeomorfismo π_1 es un cerrado del compacto $\pi_1(\operatorname{sop} E)$. Por tanto si además $E^L\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$, se tiene por (ii) que

$$0 = \int_{\mathcal{S}} E^L\Theta = \int_{\mathcal{S}} i_E d\Theta = \sum \int_{\mathcal{S}} \theta_k(E)\gamma_k,$$

y si tomamos $\rho(x)\partial_{y_i} \in \mathcal{D}(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$, con $\rho \geq 0$ de soporte compacto arbitraria y su subida $E = \rho\partial_{y_i} + \sum_{j=1}^n \rho_{x_j}\partial_{z_{ij}}$ (ver el Lema (7.52) y la nota a pie de la pág.546), para la que $E^L\theta_k = Ex_j = 0$, tendremos que $\theta_k(E) = Ey_k = \rho\delta_{ik}$ y

$$0 = \int_{\mathcal{S}} \rho\gamma_i,$$

por tanto se sigue del Lema (7.58), que $\gamma_{i|\mathcal{S}} = 0$

(iii)⇒(iv) Por (7.57) $d\Theta = \sum \theta_i \wedge \gamma_i$, por tanto para todo campo D, $i_D d\Theta = \sum \theta_i(D)\gamma_i - \sum \theta_i \wedge i_D\gamma_i$ y $\theta_{i|\mathcal{S}} = \gamma_{i|\mathcal{S}} = 0$.

(iv)⇒(ii) Sea $D \in \mathcal{D}$, entonces por (iv) $(i_D d\Theta)_{|\mathcal{S}} = 0$, por tanto si $D^L\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ y es de soporte compacto, se tiene por el Teorema de Stokes, (ver (ii)⇒(iii))

$$\int_{\mathcal{S}} di_D\Theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{S}} D^L\Theta = \int_{\mathcal{S}} i_D d\Theta + \int_{\mathcal{S}} di_D\Theta = 0. \quad \blacksquare$$

[17] En coordenadas estas ecuaciones son

$$\mathcal{L}_{y_i} = \sum_{j=1}^n \left(\mathcal{L}_{z_{ij}}(\log f)_{x_j} + \frac{\partial \mathcal{L}_{z_{ij}}}{\partial x_j} \right),$$

que se reducen en el caso particular de $\Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, es decir $f = 1$, a

$$\mathcal{L}_{y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}_{z_{ij}}}{\partial x_j}, \tag{7.20}$$

Corolario (Invariantes Noether) 7.60 *Sea $\mathcal{S}$ extremal del problema variacional y $D \in \mathcal{D}$ tal que $D^L\Theta = 0$, entonces $di_D\Theta_{|\mathcal{S}} = 0$.*

Ejemplo 7.12.1 Consideremos el caso de una lagrangiana $\mathcal{L}$, definida en el jet 1 de curvas, y por tanto en el que $\mathcal{U} = \mathbb{R}$. En este caso tenemos en coordenadas

$$\begin{gathered}\Omega = dt, \quad \theta_1 = dy_1 - z_1 dt, \dots, \ \theta_n = dy_n - z_n dt,\\ E_i = \mathcal{L}_{z_i}\partial_t, \quad \Omega_i = i_{E_i}dt = \mathcal{L}_{z_i},\\ \Theta = \mathcal{L}dt + \sum \mathcal{L}_{z_i}\theta_i,\\ d\Theta = \sum \theta_i \wedge \gamma_i, \qquad \gamma_i = \mathcal{L}_{y_i}dt - d\mathcal{L}_{z_i},\end{gathered}$$

y por el resultado anterior una curva σ es extremal si en la subvariedad $\mathcal{S} = \{(t, \sigma(t), \sigma'(t))\}$ que define en $\mathcal{J}_1$, $\gamma_{i|\mathcal{S}} = 0$, es decir se satisfacen las ecuaciones de *Euler–Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_{z_i} = \mathcal{L}_{y_i}.$$

Por último si $\mathcal{L}$ no depende de t, $\partial_t^L\Theta = 0$ y por el corolario tenemos un invariante Noether que es la función energía

$$\Theta(\partial_t) = \mathcal{L} - \sum \mathcal{L}_{z_i} z_i = -h.$$

Ejemplo 7.12.2 Consideremos ahora el otro caso extremo: el de una lagrangiana $\mathcal{L}$, definida en el jet 1 de funciones, y por tanto en el que $\mathcal{V} = \mathbb{R}$. En este caso tenemos en coordenadas

$$\begin{gathered}\Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad \theta = dy - \sum z_j dx_j,\\ E = \sum \mathcal{L}_{z_j}\partial_{x_j}, \qquad \Theta = \mathcal{L}\Omega + \theta \wedge i_E\Omega,\\ d\Theta = \theta \wedge \gamma, \qquad \gamma = \mathcal{L}_y\Omega - E^L\Omega,\end{gathered}$$

y una función g es extremal si en la subvariedad $\mathcal{S} = \{(x, g(x), g_{x_j}(x))\}$ que define en $\mathcal{J}_1$, $\gamma_{|\mathcal{S}} = 0$, es decir se satisfacen las ecuaciones de *Euler–Lagrange*

$$\mathcal{L}_y - \sum \frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{L}_{z_j} = 0.$$

Ejemplo 7.12.3 Consideremos el problema de la cuerda vibrante y la lagrangiana de la energía cinética menos la potencial (ver la lección 11.1.3, pág.882)

$$\mathcal{L}(t,x,y,z_1,z_2)=\frac{\rho}{2}z_1^2-\frac{T}{2}z_2^2,$$

en este caso $\Omega=dt\wedge dx$, $\theta=dy-z_1dt-z_2dx$, $E=\mathcal{L}_{z_1}\partial_t+\mathcal{L}_{z_2}\partial_x$ y la forma de Poincaré–Cartan es

$$\begin{aligned}\Theta&=\mathcal{L}\Omega+\theta\wedge i_E\Omega=-\mathcal{L}\Omega+\mathcal{L}_{z_1}dy\wedge dx+\mathcal{L}_{z_2}dt\wedge dy\\&=-\left(\frac{\rho}{2}z_1^2-\frac{T}{2}z_2^2\right)dt\wedge dx+\rho z_1dy\wedge dx+Tz_2dy\wedge dt,\end{aligned}$$

y $d\Theta=\theta\wedge\gamma$, para

$$\gamma=\mathcal{L}_y\Omega-E^L\Omega=E^L(dx\wedge dt)=d(Ex)\wedge dt+dx\wedge d(Et)=Tdt\wedge dz_2+\rho dx\wedge dz_1,$$

por tanto una función $y=y(t,x)$ es solución de la ecuación de Euler–Lagrange si para la subvariedad $\mathcal{S}=\{(t,x,y(t,x),y_t(t,x),y_x(t,x))\}$ que define

$$0=(Tdt\wedge dz_2+\rho dx\wedge dz_1)_{|\mathcal{S}}=(Ty_{xx}-\rho y_{tt})(dt\wedge dx)\quad\Leftrightarrow\quad Ty_{xx}-\rho y_{tt}=0,$$

que es la ecuación de ondas. Ahora bien $\partial_t^L\Theta=0$, y

$$\begin{aligned}i_{-\partial_t}\Theta_{|\mathcal{S}}&=\mathcal{L}dx+Tz_2dy\ {}_{|\mathcal{S}}=\left(\frac{\rho}{2}y_t^2-\frac{T}{2}y_x^2\right)dx+Ty_x(y_tdt+y_xdx)\\&=\left(\frac{\rho}{2}y_t^2+\frac{T}{2}y_x^2\right)dx+Ty_xy_tdt,\end{aligned}$$

por tanto tenemos un invariante Noether que es la energía pues

$$\begin{aligned}0=di_{-\partial_t}\Theta_{|\mathcal{S}}=\left(\left(\frac{\rho}{2}y_t^2+\frac{T}{2}y_x^2\right)_t-(Ty_xy_t)_x\right)dt\wedge dx\quad\Rightarrow\\\Rightarrow\quad\left(\frac{\rho}{2}y_t^2+\frac{T}{2}y_x^2\right)_t=(Ty_xy_t)_x\end{aligned}$$

e integrando y suponiendo que la solución $y(t,x)$ en cada instante es de soporte compacto —para lo cual basta que lo sean la posición y velocidad en el instante inicial (ver el ejercicio (8.4.2), pág.629 ó la solución de la

Ecuación de ondas de la pág.878)—, tendremos llamando

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\rho}{2} y_t^2(t,x) + \frac{T}{2} y_x^2(t,x) \right) dx,$$
$$E'(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\rho}{2} y_t^2(t,x) + \frac{T}{2} y_x^2(t,x) \right)_t dx = \int_{\mathbb{R}} (T y_x y_t)_x dx = 0.$$

es decir la energía es constante.

7.13. Apéndice. El Campo geodésico

7.13.1. Subidas canónicas de un campo tangente.

Como en todo fibrado vectorial, el fibrado tangente $T(\mathcal{V})$ (ver la lección 6.6.1, pág.369), tiene un campo tangente especial $H \in \mathcal{D}[T(\mathcal{V})]$, que llamamos *campo de las homotecias*, tal que para cada función f de $\mathcal{V}$, $Hf = 0$ y para cada 1–forma ω, $H\omega = \omega$, en coordenadas se expresa

$$H = \sum z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \qquad \text{(campo de las homotecias)}.$$

Consideremos un campo tangente $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$. Si en un entorno coordenado es $D = \sum f_i \partial x_i$, tendremos que sus curvas integrales $\sigma(t) = (x_i(t))$, satisfacen el sistema de ED

$$x_i'(t) = f_i[\sigma(t)],$$

en cuyo caso la curva $(x_i(t), z_i(t) = x_i'(t))$ satisface

$$x_i' = f_i,$$
$$z_i' = x_i'' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} x_j' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} z_j.$$

A continuación definimos este sistema intrínsecamente.

Definición. Llamaremos *primera subida canónica al fibrado tangente*, de un campo tangente $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, con grupo uniparamétrico X_t, al campo $\overline{D} \in \mathcal{D}[\mathcal{T}(\mathcal{V})]$, con grupo uniparamétrico $Y_t = X_{t*}$.

Ejercicio 7.13.1 Demostrar que si $\overline{D}$ es la subida canónica de un campo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ al fibrado tangente, entonces:

i) $\pi \circ Y_t = X_t \circ \pi$, lo cual equivale por (2.40), pág.106 a que $\pi_* \overline{D} = D$.

ii) $[H, \overline{D}] = 0$, para H el campo de las homotecias.

Proposición 7.61 *Sea $D = \sum f_i \partial x_i \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$. Entonces:*

i) *En coordenadas*

$$\overline{D} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

ii) *Si Z es un campo en el fibrado tangente, que define una ecuación de segundo orden en $\mathcal{V}$, entonces para la proyección $\pi \colon T(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{V}$ y $\mathcal{L}$ una lagrangiana*

$$\pi_*[Z, \overline{D}] = 0 \quad y \quad \omega_{\mathcal{L}}[Z, \overline{D}] = 0.$$

iii) *Si para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ definimos $\overline{f} \in \mathcal{C}^\infty[T(\mathcal{V})]$, tal que $\overline{f}(B_p) = B_p f$, entonces*

$$\overline{D}\,\overline{f} = \overline{Df}.$$

iv) *Si para cada $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$ definimos la función $\overline{\omega} \in \mathcal{C}^\infty[T(\mathcal{V})]$, tal que $\overline{\omega}(B_p) = \omega_p B_p$, entonces $\overline{df} = \overline{f}$ y*

$$\overline{D}\,\overline{\omega} = \overline{D^L \omega}.$$

v) *Si $E \colon \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty[T\mathcal{V}]$ es el campo universal, tangente a $\mathcal{V}$ con soporte en $T(\mathcal{V})$, entonces $\overline{f} = Ef$.*

Demostración. Lo veremos de dos formas.

i) Sea $E_p = \sum z_i (\partial x_i)_p$ un punto del fibrado tangente, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{D}_{E_p} x_i &= \lim_{t \to 0} \frac{x_i[Y_t(E_p)] - x_i(E_p)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{x_i[X_t(p)] - x_i(p)}{t} = D_p x_i = f_i(p), \\
\overline{D}_{E_p} z_i &= \lim_{t \to 0} \frac{z_i[Y_t(E_p)] - z_i(E_p)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{z_i[X_{t*} \sum_{j=1}^{n} z_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p] - z_i}{t}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} z_j \left(\lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial x_i \circ X_t}{\partial x_j}(p) - \delta_{ij}}{t} \right) = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p),$$

ya que se tiene

$$X_i(t,x) = x_i + \int_0^t f_i[X(s,x)]ds$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t,x) = \delta_{ij} + \int_0^t \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}(s,x)ds$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(0,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)\frac{\partial X_k}{\partial x_j}(0,x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x).$$

ii) Como $\omega_{\mathcal{L}}$ no tiene componentes en dz_i, lo segundo es consecuencia de lo primero. Basta entonces demostrar que $[Z,\overline{D}]x_i = 0$, y por (i) tenemos que

$$[Z,\overline{D}]x_i = Z(\overline{D}x_i) - \overline{D}(Zx_i)$$
$$= Zf_i - \overline{D}z_i = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0.$$

iii) Basta aplicar (ii) sabiendo que $\overline{f} = Z(\pi^* f)$.

iv) Basta considerar que $E_{B_p} = B_p$.

Veamos otra forma de demostrarlo. Primero demostramos (ii). Sea T_p un punto del fibrado tangente y $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, entonces aplicando (7.18)

$$\pi_*(\overline{D}^L Z)_{T_p} f = \lim_{t\to 0} \frac{\pi_*(Y_{-t})_* Z_{Y_t(T_p)} - \pi_* Z_{T_p}}{t} f$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{X_{-t*}\pi_* Z_{Y_t(T_p)} - T_p}{t} f$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{X_{-t*}X_{t*}(T_p) - T_p}{t} f = 0,$$

por tanto $[Z,\overline{D}]x_i = 0$ y de aquí se sigue (i) pues por un lado como $\pi_*\overline{D} = D$ tendremos (sobreentendiendo que x_i tiene dos significados: como coordenada en $\mathcal{V}$ y en el fibrado en el que realmente es $\pi^* x_i$)

$$\overline{D}x_i = \overline{D}\pi^* x_i = \pi_*(\overline{D})x_i = Dx_i = f_i,$$

y por otra parte se sigue de $[Z,\overline{D}]x_i = 0$ que

$$\overline{D}z_i = \overline{D}(Zx_i) = Z(\overline{D}x_i) = Zf_i = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}. \quad \blacksquare$$

Definición. Llamaremos *segunda subida canónica* al fibrado tangente, de un campo tangente $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, al campo $\tilde{D} \in \mathcal{D}[\mathcal{T}(\mathcal{V})]$, con grupo uniparamétrico $Z_t(E_p) = E_p + tD_p$.

Es fácil demostrar que en coordenadas x_i,

$$D = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad \tilde{D} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

7.13.2. Variedad con conexión. Campo geodésico.

Consideremos que nuestra variedad $\mathcal{V}$ tiene una conexión ∇, (ver la lección 3.8.4, pág.177), entonces hemos visto en la lección 6.6.2, pág.370 que cada campo $D \in \mathcal{D}(U)$ con $U \subset \mathcal{V}$ abierto, define canónicamente un campo $D^\nabla \in \mathcal{D}(T(U))$, en el abierto $T(U)$ del fibrado tangente, que para las funciones $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$,

$$D^\nabla f = Df,$$

y para cada 1–forma entendida como función en el fibrado

$$D^\nabla(\omega) = D^\nabla \omega,$$

es decir la función correspondiente a la 1–forma $D^\nabla\omega$ que es

$$D^\nabla\omega(E) = D(\omega E) - \omega(D^\nabla E).$$

Se verifica trivialmente

$$D = \sum f_i D_i \quad \Rightarrow \quad D^\nabla = \sum f_i D_i^\nabla,$$

por tanto en un entorno coordenado $(U; x_i)$

$$D = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad D^\nabla = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}^\nabla,$$

ahora bien en coordenadas $(\partial x_i)^\nabla x_k = \delta_{ik}$ y $(\partial x_i)^\nabla z_k$ es la función lineal en fibras correspondiente a la 1–forma $(\partial x_i)^\nabla dx_k$ cuya componente j–esima es

$$(\partial x_i)^\nabla dx_k(\partial x_j) = \partial x_i[dx_k(\partial x_j)] - dx_k(\partial x_i^\nabla \partial x_j) = -\Gamma_{ij}^k,$$

por tanto

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j,k=1}^{n} z_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial z_k} \quad \Rightarrow \tag{7.21}$$

$$D^{\nabla} = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i,j,k=1}^{n} f_i z_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial z_k}. \tag{7.22}$$

Lema 7.62 *Si $H \in \mathcal{D}(T\mathcal{V})$ es el campo de las homotecias, para cada $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, $[H, D^{\nabla}] = 0$.*

Demostración. Consideremos un sistema de coordenadas (x_i) en $\mathcal{V}$ y el correspondiente (x_i, z_i) en $T\mathcal{V}$, entonces

$$[H, D^{\nabla}]x_i = H(D^{\nabla} x_i) - D^{\nabla}(Hx_i) = 0,$$
$$[H, D^{\nabla}]z_i = H(D^{\nabla} z_i) - D^{\nabla}(Hz_i) = 0,$$

pues $D^{\nabla} z_i$ es una función lineal en fibras, la correspondiente a la 1–forma $D^{\nabla} dx_i$, $Hz_i = z_i$ y en general $H(f) = f$ para toda función f lineal en fibras (es decir las correspondientes a 1–formas). ∎

Las *geodésicas* en una variedad con una conexión son las curvas integrales de los campos tangentes D, para los que $D^{\nabla} D = 0$, en coordenadas x_i una geodésica satisface la ecuación diferencial de segundo orden

$$x_k'' + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k x_i' x_j' = 0,$$

para Γ_{ij}^k los *símbolos de Christoffel* de la conexión

$$\frac{\partial}{\partial x_i}^{\nabla} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{7.23}$$

Las geodésicas definen realmente una ecuación de primer orden en el fibrado tangente, en el que tenemos un campo tangente canónico $Z \in \mathcal{D}(T[\mathcal{V}])$, al que llamamos *campo de las geodésicas de la conexión* , que en coordenadas es

$$Z = \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k z_i z_j\right] \frac{\partial}{\partial z_k} = \sum z_i (\partial x_i)^{\nabla}, \tag{7.24}$$

(lo último por (7.22), pág.557) y cuyas curvas integrales proyectadas son las geodésicas de nuestra variedad.

Proposición 7.63 *Si $H \in \mathcal{D}(T\mathcal{V})$ es el campo de las homotecias y Z es el campo geodésico de una conexión cualquiera en $\mathcal{V}$ entonces $[H, Z] = Z$. En particular la distribución $\Delta =< H, Z >$, definida fuera de la sección cero, es totalmente integrable.*

Demostración. En coordenadas se sigue de (7.24), pues

$$[H, Z] = [H, \sum z_i (\partial x_i)^\nabla] = \sum z_i (\partial x_i)^\nabla = Z,$$

y Δ es totalmente integrable por el Teorema de Frobenius. ∎

7.13.3. Campo geodésico en una variedad Riemanniana.

Consideremos ahora una variedad Riemanniana $(\mathcal{V}, g)$, con la conexión de Levi–Civitta ∇ asociada (ver la pág.179). Entonces en su fibrado tangente $T(\mathcal{V})$ tenemos una función canónica

$$h(D_p) = \frac{1}{2} D_p \cdot D_p,$$

que en coordenadas (x_i, z_i) se expresa

$$h = \frac{1}{2} \sum z_i z_j g_{ij},$$

y un difeomorfismo canónico entre los fibrados tangente y cotangente

$$\phi \colon T(\mathcal{V}) \to T^*(\mathcal{V}), \quad \phi(D_p) = i_{D_p} g, \tag{7.25}$$

para el que

$$\phi^*(x_i) = x_i, \quad \phi^*(z_i) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} z_j = h_{z_i} = p_i,$$

siendo (x_i, p_i) sistema de coordenadas pues $|p_{iz_j}| = |g_{ij}| \neq 0$, por tanto en el fibrado tangente tenemos una 1–forma y una estructura simplética canónicas dadas por

$$\gamma = \phi^*(\lambda) = \phi^*(\sum z_i dx_i) = \sum p_i dx_i, \quad \Gamma = d\gamma = \sum dp_i \wedge dx_i.$$

Teorema 7.64 *El fibrado tangente de una variedad Riemanniana es una variedad simplética y el campo geodésico es el hamiltoniano de la energía h, es decir*

$$i_Z\Gamma = -dh,$$

además $\gamma Z = 2h$.

Demostración. $\gamma Z = \sum_i p_i z_i = \sum_{i,j} g_{ij} z_i z_j = 2h$. Ahora como $Z^L\gamma = i_Z d\gamma + d i_Z\gamma$, tendremos que

$$i_Z d\gamma = Z^L\gamma - d(\gamma Z) = Z^L\gamma - 2dh,$$

y basta demostrar que $Z^L\gamma = dh$, es decir que

$$\begin{aligned} Z^L(\sum_i p_i dx_i) &= \sum_i (Zp_i)dx_i + \sum_i p_i dz_i \\ &= \sum_i (Zp_i)dx_i + \sum_i h_{z_i} dz_i = dh, \end{aligned}$$

lo cual equivale a demostrar que $Zp_i = h_{x_i}$ para ello recordemos (ver 3.1, pág.179), que $\partial_i^\nabla \partial_j = \partial_j^\nabla \partial_i$, pues la torsión es nula y que

$$\partial_i\left(\partial_k \cdot \partial_r\right) = \partial_i^\nabla \partial_k \cdot \partial_r + \partial_k \cdot \partial_i^\nabla \partial_r.$$

Ahora se tiene que (ver también 7.23 en la pág.557)

$$\begin{aligned} h_{x_i} &= \frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^n z_k z_r \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^n z_k z_r\ \partial_i(\partial_k \cdot \partial_r) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^n z_k z_r\ (\partial_i^\nabla \partial_k \cdot \partial_r + \partial_k \cdot \partial_i^\nabla \partial_r) = \sum_{k,r=1}^n z_k z_r\ \partial_i^\nabla \partial_k \cdot \partial_r \\ Zp_i &= Z(\sum z_r g_{ir}) = \sum_{r=1}^n z_r (Zg_{ir}) + \sum_{j=1}^n g_{ij}(Zz_j) \\ &= \sum_{r=1}^n z_r(\sum_k z_k (g_{ir})_{x_k}) - \sum_{j=1}^n \sum_{k,r=1}^n z_k z_r \Gamma_{kr}^j g_{ij} \\ &= \sum_{k,r=1}^n z_k z_r\ ((g_{ir})_{x_k} - \partial_i \cdot \partial_k^\nabla \partial_r) = \sum_{k,r=1}^n z_k z_r\ \partial_i^\nabla \partial_k \cdot \partial_r. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 7.65 *En el sistema de coordenadas simpléticas* $(q_i = x_i, p_i)$ *el campo geodésico se expresa*

$$Z = \sum_{i=1}^{n} h_{p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{n} h_{q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Demostración. Por ser $i_Z(\sum dp_i \wedge dq_i) = -dh$. ∎

Observemos que la función energía en las coordenadas simpléticas se expresa

$$h = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} z_i z_j g_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^t \mathbf{G} \mathbf{z} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^t \mathbf{G} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{z} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} p_i p_j,$$

para $\mathbf{G} = (g_{ij})$ y $\mathbf{G}^{-1} = (g^{ij})$.

Proposición 7.66 *En las coordenadas* $(q_i = x_i, p_i)$ *el campo* H *de las homotecias se expresa* $H = \sum p_i \partial p_i$.

Demostración. $Hp_i = \sum z_j h_{z_i z_j} = \sum z_j g_{ij} = p_i$. ∎

7.13.4. Ejemplo

Consideremos de nuevo una variedad Riemanniana con una *función potencial* $U \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ y la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(D_x) = (1/2) D_x \cdot D_x - U(x) = T - U,$$

es decir en coordenadas

$$\mathcal{L}[x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_n] = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^{n} z_i z_j g_{ij} \right) - U(x),$$

y si una curva σ da un valor extremal a la acción

$$\int_a^b \mathcal{L} dt = \int_a^b (T - U) dt,$$

y $\sigma' \neq 0$, entonces satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange y por tanto la energía

$$h = H\mathcal{L} - \mathcal{L} = 2T - \mathcal{L} = T + U$$

es constante en ella ($h(\sigma,\sigma') = E$, por tanto $T + U = E$ y $U < E$) y a continuación demostramos de otra forma, que σ es una geodésica reparametrizada de la nueva métrica

$$\overline{g_{ij}} = 2(E-U)g_{ij},$$

cuyo campo geodésico Z_G es el campo lagrangiano de la nueva lagrangiana

$$\overline{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} z_i z_j \overline{g_{ij}}\right) = (E-U)\sum z_i z_j g_{ij} = 2(E-U)(\mathcal{L}+U),$$

para lo cual necesitamos unos resultados previos.

Lema 7.67 *En las coordenadas $(x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i})$ el campo H de las homotecias se expresa $H = \sum p_i \partial p_i$.*

Demostración. $Hp_i = \sum z_j \mathcal{L}_{z_i z_j} = \sum z_j g_{ij} = p_i$. ∎

Lema 7.68 *En la hipersuperficie $\{h = E\}$, $Z_G = Z + \frac{Z_G U}{E-U} H$, para Z_G el campo geodésico de $\overline{g_{ij}}$, H el campo de las homotecias y Z el campo lagrangiano de $\mathcal{L}$.*

Demostración. Sea $D = Z_G - Z$ y expresémoslo en el sistema de coordenadas $(x_i, p_i = \mathcal{L}_{z_i})$, en el que por el lema anterior $H = \sum p_i \partial p_i$. Por una parte $Dx_i = z_i - z_i = 0$, por tanto basta demostrar que

$$Dp_i = \frac{Z_G U}{E-U} p_i,$$

es decir que $(E-U)(Z_G p_i - Z p_i) = (Z_G U)p_i$, ó dicho de otro modo, pues $Zp_i = Z\mathcal{L}_{z_i} = \mathcal{L}_{x_i}$, basta demostrar que

$$(E-U)Z_G \mathcal{L}_{z_i} - (E-U)\mathcal{L}_{x_i} = (Z_G U)\mathcal{L}_{z_i},$$

y como se tiene que

$$\overline{\mathcal{L}}_{x_i} = -2U_{x_i}(\mathcal{L}+U) + 2(E-U)(\mathcal{L}_{x_i} + U_{x_i}),$$
$$\overline{\mathcal{L}}_{z_i} = 2(E-U)\mathcal{L}_{z_i},$$

tendremos que al ser $\mathcal{L}+U=T=h-U$ y $Z_G\overline{\mathcal{L}}_{z_i}=\overline{\mathcal{L}}_{x_i}$

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{L}}_{x_i} &= -2U_{x_i}(h-U)+2(E-U)(\mathcal{L}_{x_i}+U_{x_i})=\\ Z_G\overline{\mathcal{L}}_{z_i} &= 2\mathcal{L}_{z_i}Z_G(E-U)+2(E-U)Z_G\mathcal{L}_{z_i}\\ &= -2\mathcal{L}_{z_i}Z_GU+2(E-U)Z_G\mathcal{L}_{z_i},\end{aligned}$$

y el resultado se sigue en $h=E$. ∎

Como consecuencia tenemos otra forma de demostrar el siguiente resultado que ya vimos como consecuencia del *Principio de Maupertuis.*

Teorema 7.69 *Si una curva $\sigma\colon(a,b)\to\mathcal{V}$ en una variedad Riemanniana con una función potencial da un valor extremal a la acción definida por la lagrangiana*

$$\mathcal{L}(D_x)=(1/2)D_x\cdot D_x-U(x),$$

tiene energía constante $E=h(\sigma,\sigma')$ y es una geodésica reparametrizada para la nueva métrica

$$\overline{g}(D_x,E_x)=2[E-U(x)]D_x\cdot E_x.$$

Demostración. Consideremos la curva integral de Z, $\gamma(t)=\sigma_*(\partial t)_t\in T(\mathcal{V})$, subida de σ —con componentes $(\sigma(t),\sigma'(t))$—. Como la distribución $<H,Z_G>$ es totalmente integrable y por el resultado anterior $Z\in<H,Z_G>$ en los puntos de la hipersuperficie $\{h=E\}$, que contiene a la curva $\gamma(t)$, tendremos que esta curva es tangente a la distribución así como la familia de curvas integrales de H, $\mathrm{e}^s\,\gamma(t)$ pasando por cada punto de la curva y transversales a ella, pues Z y H no son proporcionales en la curva. Por tanto tenemos la superficie tangente a la distribución, $\mathcal{S}=\{r\gamma(t):\ r>0,t\in(a,b)\}$, que contiene a la curva y se proyecta en nuestra curva original. Ahora como esta superficie tiene al campo geodésico Z_G tangente, dado un punto cualquiera $t_0\in(a,b)$, tenemos una única curva integral de Z_G, $\phi(s)=r(s)\gamma(t(s))\in\mathcal{S}$, tal que $\phi(0)=\gamma(t_0)/\|\gamma(t_0)\|$ y por ser geodésica debe tener módulo constante $\|\phi(s)\|=\|\phi(0)\|=1$, por tanto $\phi(s)=\gamma(t(s))/\|\gamma(t(s))\|$, es decir su trayectoria es la de $\gamma(t)/\|\gamma(t)\|$ (aunque tienen parametrizaciones distintas) y su proyección es la geodésica $\sigma(t(s))$. ∎

7.14. Apéndice. Teoría de Hamilton–Jacobi

En (7.31), pág.496 hemos resuelto la EDO de Hamilton (7.5), pág.492, en el caso autónomo. Si ahora queremos resolver una ecuación diferencial de Hamilton no autónoma

$$\begin{aligned} x_i'(t) &= h_{z_i}(x_1,\dots,x_n,t,z_1,\dots,z_n),\\ z_i'(t) &= -h_{x_i}(x_1,\dots,x_n,t,z_1,\dots,z_n), \end{aligned} \tag{7.26}$$

lo primero que hacemos es hacerla autónoma ampliando el sistema con una nueva componente $x(t)$,

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1,\\ x_i'(t) &= h_{z_i}(x_1,\dots,x_n,x,z_1,\dots,z_n),\\ z_i'(t) &= -h_{x_i}(x_1,\dots,x_n,x,z_1,\dots,z_n), \end{aligned}$$

y basta encontrar las curvas integrales del campo

$$D = h_{z_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_{z_n}\frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial x} - h_{x_1}\frac{\partial}{\partial z_1} - \cdots - h_{x_n}\frac{\partial}{\partial z_n},$$

que en el instante $t=0$ pasan por un punto de coordenada $x=0$, en cuyo caso $x(t)=t$ y el resto de coordenadas $x_i(t), z_i(t)$ satisfacen el sistema original (7.26). Ahora bien el campo D sugiere el campo Hamiltoniano de una función $F = F(x_1,\dots,x_{n+1},z_1,\dots,z_{n+1})$ para la que $x_{n+1}=x$ y

$$F_{z_1} = h_{z_1},\dots,F_{z_n} = h_{z_n}, F_{z_{n+1}} = 1, \quad F_{x_1} = h_{x_1},\dots,F_{x_n} = h_{x_n},$$

es decir

$$F(x_1,\dots,x_n,x,z_1,\dots,z_{n+1}) = z_{n+1} + h(x_1,\dots,x_n,x,z_1,\dots,z_n),$$

la cual nos define la EDP

$$z_x + h(x_1,\dots,x_n,x,z_{x_1},\dots,z_{x_n}) = 0, \tag{7.27}$$

que llamaremos *ecuación de Hamilton–Jacobi asociada a nuestro sistema de ecuaciones diferenciales*.

A continuación veremos que el conocimiento de una integral completa ϕ de esta EDP nos permite resolver, en ciertas condiciones, paramétricamente el sistema de ecuaciones diferenciales no autónomo (7.26). Este útil método, descubierto por Hamilton y Jacobi da lugar a la teoría que lleva su nombre.

Teorema 7.70 *Si existe una función diferenciable*

$$\phi = \phi(x_1, \ldots, x_n, t; a_1, \ldots, a_n),$$

tal que el determinante $|\phi_{a_i x_j}| \neq 0$ *y es solución de la EDP definida por* F*, en el sentido de que fijados los valores de* $a_1, \ldots, a_n$ *la función* $n+1$*–dimensional correspondiente satisface*

$$\phi_t + h(x_1, \ldots, x_n, t, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}) = 0,$$

entonces las $2n$ *ecuaciones*

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_i} = b_i, \quad z_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i},$$

definen implícitamente las soluciones —dependiendo de los $2n$ *parámetros* a_i, b_i*—, del sistema de ecuaciones*

$$x_i'(t) = h_{z_i}(x_1, \ldots, x_n, t, z_1, \ldots, z_n),$$
$$z_i'(t) = -h_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, t, z_1, \ldots, z_n).$$

Demostración. Por una parte derivando respecto de a_i la expresión $\phi_t + h(x_i, t, \phi_{x_i}) = 0$, tenemos que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial a_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_i \partial x_j} h_{z_j} = 0,$$

y por otra parte como $|\phi_{a_i x_j}| \neq 0$, el teorema de las funciones implícitas nos asegura que para cada elección de a_i, b_i podemos encontrar n funciones $x_j(t) = x_j(t, a_i, b_i)$, que satisfacen

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_i}(x_1, \ldots, x_n, t, a_1, \ldots, a_n) = b_i,$$

y derivando esta expresión respecto de t tendremos que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial a_i} x_j'(t) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial a_i} = 0,$$

de donde se sigue que $x_j'(t) = h_{z_j}$, pues ambas son soluciones del mismo sistema lineal con determinante no nulo. Para obtener la segunda relación basta derivar respecto de t en $z_i(t) = \phi_{x_i}[x(t), t, a]$ y respecto de x_i en $\phi_t(x, t, a) + h(x, t, \phi_{x_i}(x, t, a)) = 0$, obteniendo

$$z_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} \phi_{x_i x_j} x_j'(t) + \phi_{x_i t} = \sum_{j=1}^{n} \phi_{x_i x_j} h_{z_j} + \phi_{x_i t} = -h_{x_i}. \quad \blacksquare$$

7.15. Apéndice. Óptica geométrica

7.15.1. Ley de Snell

Leyes básicas (a un nivel corpuscular, no ondulatorio) de la luz:

1.- **Trayectoria recta**. La luz va, de un punto a otro de un mismo medio, en linea recta.

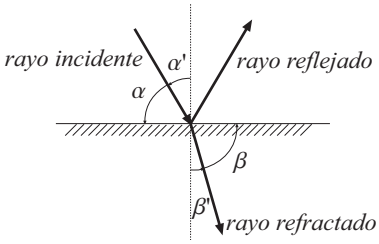


Figura 7.17. Refracción y reflexión

2.- **Ley de incidencia**. La luz que incide en un punto de un plano se refleja de modo que las dos trayectorias tienen por bisectriz la perpendicular al plano por el punto de incidencia, por tanto ambas trayectorias están en un plano perpendicular al dado y forman ángulos iguales con este.

3.- **Ley de Snell**. Si un rayo de luz incide en un plano que separa dos medios y lo atraviesa, se refracta, cambiando el ángulo α que trae, por otro β, de modo que es constante la razón de sus cosenos,

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = cte \left(= \frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\beta'} \right).$$

7.15.2. Principio de Fermat

Estas Leyes se pueden obtener como consecuencia del **Principio de mínimo tiempo de Fermat** que dice que *la luz pasa de un punto a otro por la trayectoria en la que tarde menos tiempo* (realmente por una en la que el tiempo, en función de la trayectoria, es estacionario).

Si un rayo de luz va de un punto A a otro B sin obstáculos y en un mismo medio en el que su velocidad no cambia, la trayectoria de mínimo tiempo es el segmento de recta AB (que es la primera Ley).

Si sale de A, rebota en un plano y luego pasa por B, el punto del plano que hace mínimo el tiempo es el que dice la segunda ley, como fácilmente se comprueba.

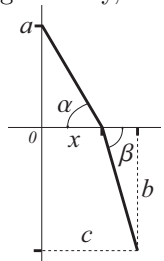


Figura 7.18.

Si por el contrario los puntos A y B están en lados distintos de un plano que separa dos medios en los que la velocidad de la luz es respectivamente v_1 (donde está A) y v_2 (donde está B), tendremos que el punto P del plano que hace mínimo el tiempo es —considerando un sistema de coordenadas como en la Fig.7.18, en el que el plano es $z = 0$ y los puntos son $A = (0, 0, a)$ y $B = (0, b, c)$—, el que corresponde al mínimo de la función para cada $(x, y, 0)$ del plano

$$t(x, y) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{y^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{x^2 + (y - b)^2 + c^2}}{v_2},$$

el cual se obtiene, haciendo $t_x = 0$ y $t_y = 0$, en $x = 0$ e y tal que

$$\frac{y}{v_1\sqrt{y^2 + a^2}} + \frac{y - b}{v_2\sqrt{(y - b)^2 + c^2}} = 0,$$

lo cual equivale a que

$$\frac{\cos\alpha}{v_1} = \frac{\cos\beta}{v_2},$$

que no sólo da la constancia de la Ley de Snell sino que nos dice que esa constante es la relación v_1/v_2, de velocidades en los dos medios. Esta relación también podemos expresarla como n_2/n_1, para $n = c/v$ el *índice de refracción de la luz* en un medio en el que tiene velocidad v, siendo c la velocidad de la luz en el vacío. Este índice tiene la ventaja de no tener unidades.

7.15.3. Óvalo de Descartes

Consideremos la siguiente cuestión. Dados dos puntos A y B encontrar la curva de puntos P del plano euclídeo para la que es

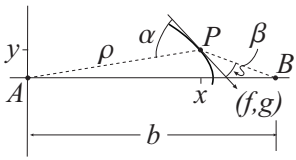


Figura 7.19.

constante la relación de cosenos, $\cos\alpha/\cos\beta$, de los segmentos AP y PB, respecto de la recta tangente a la curva en P.

Consideremos un sistema de coordenadas con eje x la recta AB y eje y su perpendicular por A; sea $B = (b, 0)$. En cada punto $P = (x, y)$, consideramos la recta $\Delta_p =< f\partial_x + g\partial_y >$, con $f^2 + g^2 = 1$, por tanto, para $\rho = |P| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\cos\alpha = \frac{-P}{|P|} \cdot (-f, -g) = \frac{xf + yg}{\rho},$$
$$\cos\beta = \frac{B - P}{|B - P|} \cdot (f, g) = \frac{(b - x)f - yg}{\sqrt{(x - b)^2 + y^2}},$$

por lo tanto, si la relación de cosenos es la constante $k = \cos\alpha/\cos\beta$, tendremos que

$$k\frac{(b - x)f - yg}{\sqrt{(x - b)^2 + y^2}} = \frac{xf + yg}{\rho} \quad \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{x}{\rho} + \frac{k(x - b)}{\sqrt{(x - b)^2 + y^2}}\right) f + \left(\frac{y}{\rho} + \frac{ky}{\sqrt{(x - b)^2 + y^2}}\right) g = 0,$$

y la recta es para $\rho' = \sqrt{(x - b)^2 + y^2}$, la distancia de P a B

$$\left(\frac{x}{\rho} + \frac{k(x - b)}{\rho'}\right) dx + \left(\frac{y}{\rho} + \frac{ky}{\rho'}\right) dy = 0,$$

por lo tanto $d(\rho + k\rho') = 0$ y las soluciones son

$$\rho + k\rho' = \text{cte},$$

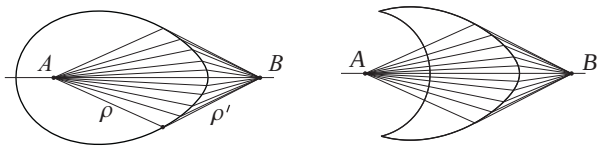


Figura 7.20. Óvalo de Descartes. Refracción

que son curvas de grado 4 llamadas *óvalos de Descartes*, con focos A y B. Son simétricas respecto de la recta AB y generan una superficie de

revolución con forma de huevo, de ahí su nombre, y tienen la propiedad de que dada una figura limitada por ella, de un material con índice de refracción $n = 1/k$, los rayos de luz emitidos desde un foco se refractan en el otro. Obviamente si consideramos una esfera centrada en A y se la quitamos al óvalo (ver la figura 7.20–derecha), la propiedad permanece, pues los rayos que salen del foco entran en la figura sin cambiar su dirección dado que la superficie esférica es ortogonal a la trayectoria y esta continúa en linea recta igual que en la figura original.

Consideremos, para cada b el óvalo que pasa por un punto fijo del eje x, por ejemplo por $(1,0)$, en el que $\rho = 1$ y $\rho' = b - 1$, por tanto son para cada $b > 1$

$$\rho + k\sqrt{(x-b)^2 + y^2} = 1 + k(b-1),$$

y ahora veamos que curva límite se obtiene cuando $b \to \infty$. Para ello veamos esta ecuación en términos de $c = 1/b$ (denotemos $T = \frac{1-\rho-k}{k}$), por tanto

$$(x-b)^2 + y^2 = (T+b)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2bx + b^2 + y^2 = T^2 + 2Tb + b^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\rho^2 - T^2 = 2b(T+x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{2}(\rho^2 - T^2) = T + x$$

y para $c = 0$ la ecuación es

$$T + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = kx + 1 - k,$$

que es una elipse con foco en el origen y que pasa por $(1,0)$. Veamos a continuación el problema en su generalidad.

7.15.4. Propiedad de refracción de las elipses

Consideremos la situación extrema del problema anterior en la que el punto B está en el infinito, es decir que PB es una recta paralela a una dada que pasa por A.

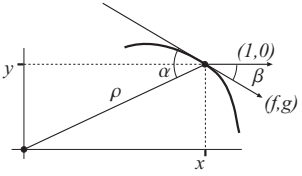


Figura 7.21.

Consideremos como eje x la recta, y eje y la perpendicular pasando por A, que tomamos como origen del sistema de coordenadas. Dada $e \geq 0$ constante consideremos las curvas para las que $\cos\alpha / \cos\beta = e$.

Consideremos en cada punto (x,y) del plano la recta, $< f\partial_x + g\partial_y >$, tangente a la curva que tiene la propiedad del enunciado. Como antes consideremos (f,g) unitario, entonces tendremos que α es el ángulo que

forman (f,g) y (x,y) y β el que forman (f,g) y $(1,0)$, por tanto para $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\cos\alpha=(f,g)\cdot\left(\frac{x}{\rho},\frac{y}{\rho}\right)=\frac{fx+gy}{\rho},\qquad \cos\beta=f,$$

de donde se sigue que

$$e=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{fx+gy}{f\rho}\quad\Leftrightarrow\quad f(x-\rho e)+gy=0,$$

y por tanto nuestra recta es

$$(x-\rho e)dx+ydy=0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{xdx+ydy}{\rho}-edx=0,$$

que es exacta $d(\rho-ex)$, por lo tanto las curvas solución son

$$\rho=ex+p, \tag{7.28}$$

para cada constante p, que son las ecuaciones de las cónicas del plano con eje x y un foco en el origen (ver la pág.406). Pues en las coordenadas (x,y) son

$$\begin{aligned}x^2+y^2=(ex+p)^2=e^2x^2+2epx+p^2\\ \Leftrightarrow\quad (1-e^2)x^2+y^2-2epx-p^2=0,\end{aligned}$$

además la e es la excentricidad y $\rho=ex+1$ y $\rho=ex+p$ son homotéticas de razón p, pues (x,y) satisface la primera ecuación sii (px,py) satisface la segunda. ∎

Observemos que las coordenadas (x,ρ) tienen la ventaja de que en ellas las soluciones son líneas rectas de pendiente e. Lo cual nos da una interpretación geométrica obvia de la excentricidad como la relación constante $\Delta\rho/\Delta x$, que a su vez es, $\cos\alpha/\cos\beta$, como se ve en el dibujo tomando Q en la curva infinitesimálmente próximo a P.

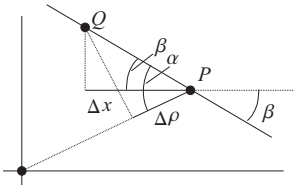


Figura 7.22.

Como consecuencia de lo anterior, dado un material con índice de refracción n, si consideramos la cónica de excentricidad $e=1/n$ y el elipsoide de revolución que define en torno a su eje, tendremos que la figura de ese material limitada por esta cuádrica (ver la Fig.7.23), tendrá la

propiedad de que un rayo de luz emitido desde el foco se refracta en el exterior en haces de líneas rectas paralelas al eje; y recíprocamente un rayo de luz que incida en la figura y traiga la dirección del eje se refracta en el interior en un rayo que pasa por el foco "mas lejano".

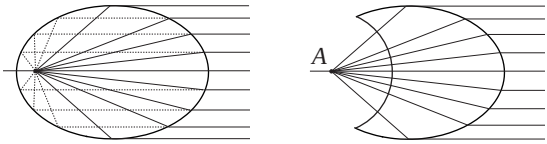


Figura 7.23. Refracción Elipsoide de revolución

Obviamente si a la figura con forma de elipsoide le quitamos, como antes, una parte con forma de esfera centrada en el foco, la propiedad permanece, pues los rayos que salen del foco entran en la figura sin cambiar su dirección pues la superficie esférica es ortogonal a la trayectoria que continua en línea recta igual que en la figura original.

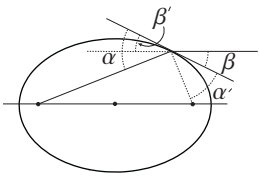


Figura 7.24.

7.15.5. Propiedades de reflexión de las elipses

Por último observemos que de las propiedades de refracción de las cónicas se tienen las de reflexión, pues por ejemplo para la elipse se tiene (ver figura 7.24) que por simetría vertical se tiene la igualdad

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha'}{\cos\beta'},$$

y esto implica que $\alpha = \alpha'$, pues $\beta = \beta'$.

7.15.6. Trayectoria en un medio de índice variable

Consideremos ahora un medio con índice de refracción una función diferenciable $n(x)$. Determinemos la trayectoria $\sigma(t)$ que debe llevar un

rayo de luz que pasa en unos instantes determinados por sendos puntos $\sigma(0) = A$, $\sigma(1) = B$. Para ello seguimos asumiendo el Principio de Fermat según el cual la luz viajará por la trayectoria para la que el tiempo es estacionario.

Ahora bien si consideremos una curva $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ que une $A = \sigma(0)$ con $B = \sigma(1)$, el tiempo T que tarda en ir de A a B es

$$\frac{1}{c}\int_0^1 n[\sigma(r)]|\sigma'(r)|dr,$$

pues si la reparametrizamos con su tiempo $\gamma(t) = \sigma[r(t)]$, de tal forma que $r(0) = 0$ y $r(T) = 1$, tendremos que la integral anterior es

$$\int_0^T \frac{|\sigma'(r(t))r'(t)|}{v(\sigma(r(t)))}dt = \int_0^T \frac{|\gamma'(t)|}{v(\gamma(t))}dt = T.$$

Esto nos lleva a considerar el problema variacional

$$\int_0^1 \mathcal{L}(\sigma(s), \sigma'(s))ds,$$

correspondiente a la Lagrangiana que da el tiempo, que esencialmente es (la constante c no es necesaria)

$$\mathcal{L}(x, z) = n[x]\sqrt{\sum z_i^2},$$

siendo $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $(z = (z_1, z_2, z_3)$ y para ella es

$$\mathcal{L}_{x_i} = n_{x_i}\sqrt{\sum z_i^2}, \qquad \mathcal{L}_{z_i} = n\frac{z_i}{\sqrt{\sum z_j^2}},$$

y las Ecuaciones de Euler–Lagrange correspondientes son para $i = 1, 2, 3$

$$n_{x_i}\sqrt{\sum x_j'^2} = \left(n\frac{x_i'}{\sqrt{\sum x_j'^2}}\right)'$$

de aquí se sigue que para $s(t) = \int_0^t \sqrt{\sum x_j'^2}dt$ el parámetro longitud de arco de la curva, para su reparametrización $\gamma(s(t)) = \sigma(t)$ y para

$T = \sigma'(t)/|\sigma'(t)| = \gamma'(s)$, el vector tangente unitario a la curva solución, se tiene

$$(\operatorname{grad} n)s'(t) = \frac{d(nT)}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{grad} n = \frac{d(nT)}{ds} = \frac{dn}{ds}T + n\kappa N,$$

para N el vector normal a la curva y κ la curvatura, por lo que el $\operatorname{grad} n$ está en el plano osculador a la curva es decir que las superficies $\{n = cte\}$ son ortogonales al plano osculador de la curva en cada punto.

7.16. Apéndice. Envolventes y cáusticas

Figura 7.25. Cáustica

Cuando una superficie (o una curva plana) recibe un haz de luz emitido desde una fuente puntual, los rayos reflejados se concentran en puntos de una superficie (o curva) que se observan con mas luminosidad que otros; a dicha superficie o curva se la llama cáustica (del griego *kaysticos*, quemar) —matemáticamente es la envolvente de los rayos reflejados—. El corte de esta superficie con un plano se observa por ejemplo en la superficie de leche de un cazo de acero iluminado por la luz del sol.

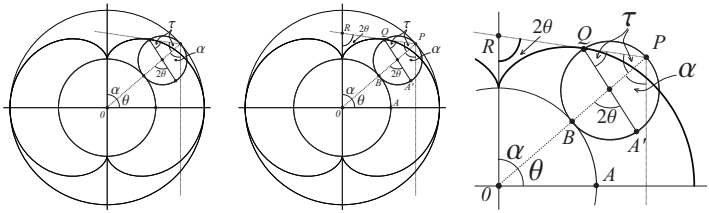


Figura 7.26. La caustica es la epicicloide.

Ejemplo 7.16.1 *La cáustica de una circunferencia de radio r, iluminada por rayos paralelos al eje y, es la epicicloide definida por una circunferencia de radio $r/4$ que rueda sin deslizarse sobre otra de radio $r/2$.*

Veamos geométricamente (ver figura 7.26) que la epicicloide es la envolvente de los reflejos de los rayos verticales que inciden interiormente en una circunferencia S. Para ello consideremos una circunferencia base, de radio la mitad de la de S y sobre esta, otra de radio la mitad de la de la base, que rueda sobre ella, sin deslizarse. La trayectoria de un punto fijo de esta última es la epicicloide.

Sea Q el punto fijo cuando la que rueda ha abarcado un arco AB, de ángulo θ en la base, y de arco $A'B$ en la pequeña, igual en longitud, por tanto de ángulo 2θ en esta, pues es de radio la mitad. Ahora si BP es la diagonal de la pequeña por B, tendremos en el triángulo isosceles formado por P, Q y el centro de la pequeña, que

$$2\theta + 2\tau = \pi = 2\theta + 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \tau = \alpha,$$

por lo tanto PQ es el reflejo en P del rayo vertical por P. Además es tangente a la epicicloide en Q, pues el tramo infinitesimal que describe Q si rodamos la circunferencia infinitesimalmente en B es un arco de circunferencia de radio BQ y centro en B, por tanto BQ es perpendicular a la tangente a la epicicloide por Q, pero BQ es perpendicular a BP, pues BP es un diámetro. Se sigue que la epicicloide es la envolvente. ∎

Ejemplo 7.16.2 *Demostrar que la cáustica de la exponencial con la fuente luminosa en el infinito (positivo) del eje y, es la catenaria.*

Si la recta reflejada en el punto (t, e^t), tiene dirección (a, b), con $a^2 + b^2 = 1$ y $a = -\sqrt{1-b^2} < 0$, tendremos que $(a, b) + (0, 1)$ tiene dirección normal a la curva y por tanto proporcional a $(-\mathrm{e}^t, 1)$, de donde

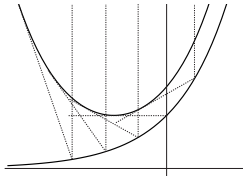


Figura 7.27.

$$\mathrm{e}^t = \frac{-a}{b+1} = \frac{\sqrt{1-b^2}}{b+1} = \sqrt{\frac{1-b}{1+b}}$$

$$\mathrm{e}^{2t} = \frac{1-b}{1+b} \quad \Rightarrow \quad b(\mathrm{e}^{2t}+1) = 1 - \mathrm{e}^{2t},$$

y despejando

$$b = \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} = -\frac{\operatorname{senh} t}{\cosh t}, \qquad a = -\sqrt{1 - \frac{\operatorname{senh}^2 t}{\cosh^2 t}} = -\frac{1}{\cosh t},$$

para $\operatorname{senh} t = (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})/2$ y $\cosh t = (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})/2$, y para la pendiente $p(t) = b/a = \operatorname{senh} t$, tendremos que la ecuación de la recta reflejada es

$$y = p(t)x + b(t), \quad p(t) = \operatorname{senh} t, \quad b(t) = \mathrm{e}^t - tp(t)$$

y su envolvente la obtenemos eliminando t en

$$y = xp(t) + b(t), \quad 0 = xp'(t) + b'(t) = x\cosh t + \mathrm{e}^t - \operatorname{senh} t - t\cosh t \\ = (x + 1 - t)\cosh t,$$

de donde se sigue que $t = x + 1$ y la ecuación es

$$y = x\operatorname{senh}(x+1) + \mathrm{e}^{x+1} - (x+1)\operatorname{senh}(x+1) = \cosh(x+1). \quad \blacksquare$$

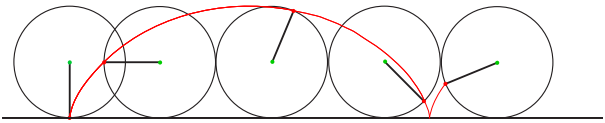


Figura 7.28. Cicloide

La *cicloide* es la curva descrita por un punto de una circunferencia de centro C que rueda sin deslizarse sobre una recta.

Ejemplo 7.16.3 *Demostrar que la cáustica de la cicloide con la fuente luminosa en el $-\infty$ del eje y es la cicloide duplicada, de radio la mitad.*

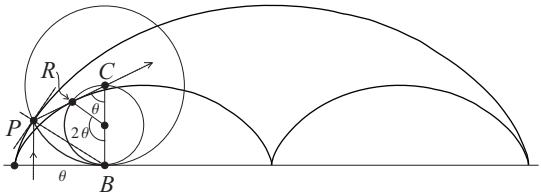


Figura 7.29.

Lo vemos primero geométricamente. Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas en el que la recta es el eje x y el punto está inicialmente en el origen. Por tanto si la circunferencia es de radio 1, después de rodar un arco de longitud θ, la circunferencia se apoya en la recta en el punto $B = (\theta, 0)$ y el ángulo central (desde $C = (\theta, 1)$), correspondiente a este arco es también θ, por lo tanto el punto de la circunferencia está en $\sigma(\theta) = (\theta - \operatorname{sen}\theta, 1 - \cos\theta) = P$. Observemos que la normal a la cicloide en P pasa por la base B, pues geométricamente: si giramos infinitesimalmente la circunferencia con base en B el arco infinitesimal que describe P es el de una circunferencia con centro B y radio BP. Esto

mismo se sigue analíticamente considerando que $PB = (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta - 1)$ es perpendicular a $\sigma' = (1 - \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

Ahora consideremos otra circunferencia, de radio la mitad, que gira al mismo tiempo que la de radio 1 y pasa por C y B, por tanto es tangente interior a la circunferencia de radio 1 y en el mismo punto B a la recta. Entonces el radio PC corta a la circunferencia pequeña en un punto R, de modo que el arco BR de esta tiene longitud θ, pues el ángulo de este arco desde C es θ y por tanto desde el centro de la pequeña es 2θ y tiene radio la mitad. Por tanto R describe una cicloide de radio la mitad y CR es perpendicular a RB, por tanto tangente a la cicloide pequeña en R. Además PR es el reflejo en P (sobre la cicloide original) de un rayo vertical por P, por tanto la cicloide pequeña es la envolvente de los rayos reflejados.

Demostración analítica: (para $\theta < \pi$). Si el reflejo en P tiene dirección (a, b), con $a^2 + b^2 = 1$ y $a = \sqrt{1 - b^2} > 0$, tendremos que $(a, b) - (0, 1)$ tiene dirección normal a la curva y por tanto proporcional a

$$(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta - 1),$$

se sigue que

$$\frac{\cos\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{b-1}{a} = -\frac{b-1}{\sqrt{1-b^2}} = -\sqrt{\frac{1-b}{1+b}},$$

por tanto $\operatorname{sen}^2\theta(1-b) = (1+b)(1-\cos\theta)^2$ y

$$\begin{aligned} b &= \frac{\operatorname{sen}^2\theta - (1-\cos\theta)^2}{\operatorname{sen}^2\theta + (1-\cos\theta)^2} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta - 1 + 2\cos\theta - \cos^2\theta}{2 - 2\cos\theta} \\ &= \frac{\cos\theta - \cos^2\theta}{1 - \cos\theta} = \cos\theta, \\ a &= \operatorname{sen}\theta, \end{aligned}$$

y como la recta reflejada en el punto $(\theta - \operatorname{sen}\theta, 1 - \cos\theta)$ tiene pendiente $p = b/a = \cos\theta/\operatorname{sen}\theta$, tendremos que tiene ecuación

$$y = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}x + 1 - \theta\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}(x - \theta) + 1,$$

(por tanto pasa por el punto $(\theta, 1)$ y la envolvente se obtiene eliminando θ entre esta ecuación y su derivada

$$0 = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2\theta}(x - \theta) - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

lo cual implica para $2\theta = \alpha$

$$x = \theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2},$$

$$y = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}(-\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + 1 = \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 + \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos\alpha}{2},$$

que es la homotecia de razón $1/2$ de la cicloide original. ∎

7.17. Ejercicios resueltos

Ejercicio 7.1.2.- Demostrar que si $\{z = z(x, y)\}$ es una superficie de revolución con eje pasando por el origen del espacio, entonces

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \end{vmatrix} = 0$$

para $u = -y - zz_y$, $v = x + zz_x$, $w = xz_y - yz_x$.

Solución.- En cada punto $p = (x, y, z)$ de la superficie tenemos una recta tangente a ella (tangente al paralelo correspondiente de la superficie de revolución), que también es tangente a la esfera pasando por p, por tanto la recta es perpendicular a (x, y, z) y a $(z_x, z_y, -1)$, por tanto con vector director su producto vectorial que tiene componentes

$$u = -y - zz_y, \quad v = x + zz_x, \quad w = xz_y - yz_x,$$

y si el eje de la superficie tiene vector director (a, b, c), tendremos que $ua+vb+wc = 0$ y derivando respecto de x y respecto de y tendremos que

$$\begin{array}{r} ua + vb + wc = 0 \\ u_x a + v_x b + w_x c = 0 \\ u_y a + v_y b + w_y c = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 7.1.3.- Sean P, Q y R funciones de (x, y) y $Pdx^2+Qdxdy+Rdy^2 = 0$ la ecuación[18] de la proyección al plano $z = 0$, de una red de curvas de una superficie $u = 0$. Demostrar que las curvas son perpendiculares sii

$$P(u_y^2 + u_z^2) - Qu_x u_y + R(u_x^2 + u_z^2) = 0.$$

Solución.- Supongamos que $P \neq 0$. La proyección de un campo tangente a la superficie, $D = f\partial_x + \partial_y + g\partial_z$, satisface la ecuación del enunciado sii

$$Pf^2 + Qf + R = 0,$$

por tanto en general hay dos soluciones f_1, f_2 y son tales que $Pf_1f_2 = R$ y $P(f_1 + f_2) = -Q$. Además como $Du = 0$ tendremos que las funciones g_i correspondientes satisfacen $f_i u_x + u_y + g_i u_z = 0$ y para los campos D_i correspondientes

$$\begin{aligned} D_1 \cdot D_2 = f_1 f_2 + 1 + g_1 g_2 &= \frac{R}{P} + 1 + (f_1 \frac{u_x}{u_z} + \frac{u_y}{u_z})(f_2 \frac{u_x}{u_z} + \frac{u_y}{u_z}) \\ &= \frac{R+P}{P} + \frac{f_1 f_2 u_x^2 + (f_1 + f_2) u_x u_y + u_y^2}{u_z^2} \\ &= \frac{u_z^2(R+P) + Ru_x^2 - Qu_x u_y + Pu_y^2}{Pu_z^2}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

[18] Esta notación debe entenderse del siguiente modo: dx y dy son en cada punto funciones lineales del espacio tangente y dx^2 es el cuadrado de la función lineal, por tanto la expresión de la izquierda en cada punto es un polinomio.

Ejercicio 7.1.4.- Encontrar las superficies formadas por rectas paralelas al plano $z = 0$ que se apoyan en la hipérbola del plano $y = 0$, $xz = 1$, tales que a lo largo de cada recta el plano tangente es constante

Solución. Para cada z la superficie contiene una recta de ecuación $a(z)x+b(z)y = p(z)$ (donde uno de los dos coeficientes a ó b es no nulo), siendo para $y = 0$ $zx = 1$, es decir $a(z) = zp(z)$, por tanto la superficie y su vector normal son

$$zp(z)x + b(z)y = p(z), \quad N = (zp(z), b(z), x(p(z) + zp'(z)) + b'(z)y - p'(z))$$

y a lo largo de la recta $z = c$, $cp(c)x + b(c)y = p(c)$, N tiene dirección constante y como sus dos primeras componentes son constantes, también lo es la tercera (si una de las dos primeras es no nula como es el caso). Ahora hay dos posibilidades: $p(c) \neq 0$, en cuyo caso $x = (p(c) - b(c)y)/cp(c)$ y es constante en y

$$\frac{p(c) - b(c)y}{cp(c)}(p(c) + cp'(c)) + b'(c)y = \frac{p(c) + cp'(c)}{c} + y(b'(c) - \frac{b(c)(p(c) + cp'(c))}{cp(c)},$$

es decir $b'(c)cp(c) = b(c)(p(c) + cp'(c)$, lo cual implica $(b(c)/cp(c))' = 0$, es decir $b(c) = kcp(c)$, por tanto las superficies son los cilindros

$$zx + kzy = 1.$$

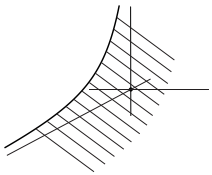


Figura 7.30.

Y si $p(c) = 0$, la recta correspondiente es $z = c$, $yb(c) = 0$, es decir $z = c$, $y = 0$ y es constante

$$x(p(c) + cp'(c)) = xcp'(c),$$

lo cual implica $p'(c) = 0$ y como ninguna de las superficies anteriores en k contiene esta recta, tendremos que en todo punto $p(z) = 0$, lo cual implica que nuestra superficie es $b(z)y = 0$, es decir $y = 0$, la cual satisface la propiedad, con la familia de rectas pasando por la hiperbola y paralelas al eje x. ∎

Ejercicio 7.3.1.- Encontrar la función $v(t, x)$ del plano, tal que $v(0, x) = f(x)$ y $T^{\nabla}T = 0$, para la conexión estándar del plano y $T = \partial_t + v(t, x)\partial_x$. Además, dado $x_0 \in \mathbb{R}$ y $v_0 = f(x_0)$, demostrar que dicha solución v existe en un entorno de $(0, x_0)$ y es constante a lo largo de la recta $(t, x_0 + v_0t)$ (y vale v_0) y que T es constante y tangente a la recta.

Indicación. $0 = T^{\nabla}T = T^{\nabla}(\partial_t + v(t, x)\partial_x) = (Tv)\partial_x$, por tanto v es solución de la EDP cuasilineal $0 = Tv = v_t + vv_x$, con la condición inicial $v(0, x) = f(x)$. El campo característico correspondiente en las coordenadas (t, x, v), es $D = \partial_t + v\partial_x$ y tiene 1–forma incidente $dx - vdt$ y como v es una integral primera, también es

incidente $d(x-vt)$ y $u = x - vt$ es integral primera. La solución general es $v = h(u)$, para cualquier función h y como en $t = 0$, $u = x$, la que satisface la condición se obtiene despejando v en la ecuación, $v = f(x - vt)$, cosa que podemos hacer si $h_v \neq 0$, para $h = v - f(x - vt)$, es decir $1 + f'(x - vt)t \neq 0$, lo cual es cierto en $(0, x_0, v_0)$. Por tanto existe un entorno de $(0, x_0)$ en el que podemos despejar v de forma única, siendo $v(0, x_0) = v_0$. Ahora bien la superficie $h = 0$ es reglada y contiene a la recta $(t, x_0 + tv_0, v_0)$, por lo tanto $v = v_0$ y $T = \partial_t + v_0\partial_x$, en un entorno de $(0, x_0)$ sobre la recta $(t, x_0 + tv_0)$. ∎

Ejercicio 7.3.2.- En los siguientes problemas encontrar la solución de la EDP que contiene a la curva correspondiente

$$yzz_x + z_y = 0, \quad \text{que en } y = 0 \text{ pasa por } z^2 = 2x,$$
$$yzz_x + xzz_y + 2xy = 0, \quad \text{que en } z = 0, \text{ pasa por } x^2 + y^2 = 1,$$
$$2y(z-3)z_x + (2x - z)z_y = y(2x - 3), \quad \text{que en } z = 0 \text{ pasa por } x^2 + y^2 = 2x.$$

Solución. Para el primero. Consideremos el campo característico

$$yz\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

el cual tiene integrales primeras $u = z$ y $v = x - y^2z/2$. Ahora expresamos x y z en términos de y, u y v,

$$z = u, \qquad x = v + u\frac{y^2}{2},$$

y consideramos las integrales primeras que coinciden con z y x en $y = 0$,

$$z, \qquad v,$$

por tanto la solución es

$$z^2 = 2v \quad \Rightarrow \quad z^2 = 2x - y^2z.$$

Para la última. Consideremos el campo en $\mathbb{R}^3$

$$D = 2y(z-3)\frac{\partial}{\partial x} + (2x - z)\frac{\partial}{\partial y} + y(2x-3)\frac{\partial}{\partial z},$$

que en el sistema de coordenadas $v_1 = 2x - 3$, $v_2 = y$, $v_3 = z - 3$ se escribe

$$D = 4v_2v_3\frac{\partial}{\partial v_1} + (v_1 - v_3)\frac{\partial}{\partial v_2} + v_1v_2\frac{\partial}{\partial v_3},$$

y tiene integrales primeras

$$u_1 = 2v_3^2 - \frac{v_1^2}{2}, \quad u_2 = v_1 + 2v_2^2 - 4v_3.$$

Ahora tenemos que encontrar una integral primera de D, es decir una función g de (u_1, u_2), tal que la superficie $\{g = 0\}$ se interseque con $\{z = 0\}$ en

$$\{z = 0,\ x^2 + y^2 = 2x\} = \{z = 0,\ (x-1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Escribamos x e y en términos de (u_1, u_2, z)

$$x = \frac{\sqrt{4(z-3)^2 - 2u_1} + 3}{2},$$
$$y = \sqrt{\frac{u_2 - \sqrt{4(z-3)^2 - 2u_1} + 4(z-3)}{2}}.$$

Y consideremos las integrales primeras

$$X = \frac{\sqrt{4(-3)^2 - 2u_1} + 3}{2},$$
$$Y = \sqrt{\frac{u_2 - \sqrt{4(-3)^2 - 2u_1} + 4(-3)}{2}},$$

que en $z = 0$ coinciden con x e y y para las que

$$(X-1)^2 + Y^2 - 1 = 2 + \frac{1}{4} - \frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2},$$

por tanto basta considerar la función

$$\begin{aligned} g &= 2u_1 - 2u_2 - 9 = 4v_3^2 - v_1^2 - 2v_1 - 4v_2^2 + 8v_3 - 9 \\ &= 4(z-3)^2 - (2x-3)^2 - 2(2x-3) - 4y^2 + 8(z-3) - 9 \\ &= [2(z-3)+2]^2 - 4 - [2x-3+1]^2 + 1 - 4y^2 - 9 \\ &= (2z-4)^2 - (2x-2)^2 - 4y^2 - 12. \end{aligned}$$

Por tanto la solución es el hiperboloide de dos hojas

$$(z-2)^2 - (x-1)^2 - y^2 = 3.$$

Ahora bien como a nosotros nos piden la solución que pasa por la circunferencia, la contestación es

$$z = 2 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + 3}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.3.3.- Demostrar que las soluciones de la EDP

$$(z+3y)z_x + 3(z-x)z_y + (x+3y) = 0,$$

son superficies de revolución de un cierto eje. ¿Qué eje?.

Solución.- Como es cuasilineal define el campo (proyección del característico)

$$D = (z+3y)\frac{\partial}{\partial x} + 3(z-x)\frac{\partial}{\partial y} - (x+3y)\frac{\partial}{\partial z},$$

y las soluciones están formadas por curvas integrales suyas. Ahora si existe un eje (a, b, c) tal que las superficies solución son de revolución en torno a él, tendremos que D y el campo E de los giros en torno a ese eje son proporcionales, pues toda integral primera de D lo sería de E, por tanto D sería tangente a los planos definidos por la función lineal $u = ax + by + cz$, por tanto $Du = 0$, lo cual equivale a que

$$0 = a(z+3y) + b3(z-x) - c(x+3y) = -(3b+c)x + 3(a-c)y + (a+3b)z,$$

y esto a que $3b + c = 0$ y $a = c$, que tiene una única solución proporcional a $e = (3, -1, 3)$. Ahora el resultado se sigue pues $Du = D(x^2 + y^2 + z^2) = 0$, por tanto las curvas integrales de D son las circunferencias de planos perpendiculares a la recta $< e >$ centradas en ese eje y una superficie que esté formada por ellas es de revolución. ∎

Ejercicio 7.3.4.- Caracterizar las EDP cuasilineales

$$f_1 z_x + f_2 z_y = f_3,$$

cuyas soluciones sean superficies de revolución de un cierto eje.

Solución.- Sea $< (a, b, c) >$ el eje de revolución de las superficies solución y E el campo de los giros alrededor de este eje, por tanto $E(x^2 + y^2 + z^2) = 0$ y $aEx + bEy + cEz = 0$, es decir

$$xEx + yEy + zEz = 0, \quad aEx + bEy + cEz = 0,$$

lo cual implica que E es perpendicular a (x, y, z) y a (a, b, c), es decir es proporcional al producto vectorial de (a, b, c) y (x, y, z), que tiene componentes

$$bz - yc, \quad cx - az, \quad ay - bx.$$

Ahora el campo asociado a nuestra EDP es

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + f_3 \frac{\partial}{\partial z},$$

y sabemos que para toda integral primera suya, $Dh = 0$, $\{h = cte\}$ es una superficie de revolución del eje dado, pero entonces $Eh = 0$, pues h es constante en las curvas integrales de E (que son circunferencias, centradas en el eje, de los planos perpendiculares al eje). Por tanto D y E son proporcionales ya que toda integral primera de D lo es de E, por lo que nuestra EDP es (simplificada)

$$(bz - yc)z_x + (cx - az)z_y = ay - bx. \quad ∎$$

Ejercicio 7.3.5.- Dada una recta en el espacio encontrar la EDP de las superficies cuya recta normal en cada punto corte a la dada. Resolver la EDP.

Solución.- Sin pérdida de generalidad podemos considerar el sistema de coordenadas en el que la recta dada sea el eje z. Ahora la normal $n = (-z_x, -z_y, 1)$ en cada punto $P = (x, y, z)$ de nuestra superficie define la recta $p + \lambda n$ que si corta al eje z, hay un valor λ para el las dos primeras coordenadas valen 0, es decir $x = \lambda z_x$, $y = \lambda z_y$, lo cual equivale a que $yz_x = xz_y$, que es una EDP cuasilineal con campo asociado el campo de los giros $y\partial_x - x\partial_y$, con integrales primeras z y $x^2 + y^2$ y las soluciones son para cualquier función g del plano,

$$g(x^2 + y^2, z) = cte,$$

que son superficies de revolución en torno al eje z. ∎

Ejercicio 7.3.6.- Dado $k \in \mathbb{R}$ encontrar la EDP de las superficies cuya recta normal en cada punto P corte a los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, en tres puntos A, B, C para los que sea constante la razón doble $(P, A, B, C) = k$.

Resolver la ecuación y encontrar las cuádricas en forma normal $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, que sean solución.

Solución.- La normal $n = (-z_x, -z_y, 1)$ en cada punto $P = (x, y, z)$ de nuestra superficie define la recta $p + \lambda n$ que se corta con los planos en los puntos

$$\begin{aligned} A = p + \lambda_1 n = (x - \lambda_1 z_x, y - \lambda_1 z_y, z + \lambda_1) \quad &\Rightarrow \quad \lambda_1 = x/z_x, \\ B = p + \lambda_2 n = (x - \lambda_2 z_x, y - \lambda_2 z_y, z + \lambda_2) \quad &\Rightarrow \quad \lambda_2 = y/z_y, \\ C = p + \lambda_3 n = (x - \lambda_3 z_x, y - \lambda_3 z_y, z + \lambda_3) \quad &\Rightarrow \quad \lambda_3 = -z, \end{aligned}$$

y la razón doble es

$$\begin{aligned} k = (PABC) = \frac{PB}{AB} \cdot \frac{AC}{PC} \quad &\Leftrightarrow \quad k \cdot AB \cdot PC = PB \cdot AC \quad \Leftrightarrow \\ k(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_3 = \lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1) \quad &\Leftrightarrow \quad (k-1)\lambda_2\lambda_3 - k\lambda_1\lambda_3 = -\lambda_2\lambda_1 \quad \Leftrightarrow \\ (1-k)\frac{yz}{z_y} + k\frac{xz}{z_x} = -\frac{xy}{z_x z_y} \quad &\Rightarrow \quad (1-k)yzz_x + kxzz_y = -xy, \end{aligned}$$

que es una EDP cuasilineal con campo asociado

$$D = (1-k)yz\partial_x + kxz\partial_y - xy\partial_z$$

que tiene dos 1–formas incidentes exactas obvias

$$xdx + (1-k) + zdz, \qquad ydy + kzdz,$$

y por tanto las integrales primeras $u = x^2 + (1-k)z^2$, $v = y^2 + kz^2$, por tanto las superficies $g(u, v) = cte$ son solución (las que a nosotros nos interesan además deben cumplir $z_x, z_y \neq 0$, que no lo cumplen ninguno de los dos casos particulares —$u = cte$, ó $v = cte$—, pero en general sí). En particular tenemos la solución, para $a, b \in \mathbb{R}$

$$1 = au + bv = a(x^2 + (1-k)z^2) + b(y^2 + kz^2) \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + by^2 + (a(1-k) + bk)z^2 = 1,$$

tenemos las cuádricas del enunciado con $c = a(1-k) + bk$. Observemos que para ellas el resultado es obvio pues tomando el gradiente $n \sim (ax, by, cz)$, de donde se sigue que las λ_i no dependen del punto $P = (x, y, z)$ ni por tanto las razones simples de cualesquiera 3 de los 4 puntos ni la razón doble. Por otra parte hay que quitar el caso singular en el que $a = b$, pues en ese caso es una esfera, ya que $a = b = c$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ y $A = B = C$, por lo que la razón doble no existe. ∎

Ejercicio 7.4.1.- Demostrar que para cada solución f de (7.1), D es tangente a

$$\mathcal{S}_n(f) = \{z = f(x),\ z_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, z_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\}.$$

Solución.- En $\mathcal{S}_n(f)$ se tiene que $Dv_i = 0$. ∎

Ejercicio 7.6.1.- Encontrar con el método de Cauchy la solución de la EDP

$$z = \frac{1}{2}(z_x^2 + z_y^2) + (z_x - x)(z_y - y).$$

que pasa por el eje x.

Solución. $F = \frac{1}{2}(p^2+q^2) + (p-x)(q-y) - z$ y su campo característico es

$$D = (p+q-y)\frac{\partial}{\partial x} + (p+q-x)\frac{\partial}{\partial y} + (p(p+q-y)+q(p+q-x))\frac{\partial}{\partial z} + (p+q-y)\frac{\partial}{\partial p} + (p+q-x)\frac{\partial}{\partial q},$$

el cual tiene integrales primeras las funciones diferenciablemente independientes

$$u_1 = p - x, \quad u_2 = q - y, \quad u_3 = \frac{p+q-y}{p+q-x}, \quad u_4 = F,$$

pues $p + q - y = u_1 + u_2 + x$ y $p + q - x = u_1 + u_2 + y$, siendo u_1y u_2 integrales primeras por tanto constantes para D.

Ahora el eje x es la curva $(x(t) = t, y(t) = 0, z(t) = 0)$ y hay dos soluciones en

$$F[x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)] = 0, \qquad z'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t),$$

que corresponden a dos valores de q, pues por la segunda $0 = p(t)$ y por la primera $\frac{q^2}{2} - xq = 0$. Por tanto tenemos dos posibles curvas $\sigma(t)$ en $\mathbb{R}^5$

$$x(t) = t, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = 0, \quad p(t) = 0, \quad q(t) = \begin{cases} 0. \\ 2t. \end{cases}$$

Ahora para cada t consideramos la curva integral de D pasando por $\sigma(t)$ (lo haremos para las dos curvas a la vez), que es $\{u_i = u_i[\sigma(t)] : i = 1, 2, 3, u_4 = 0\}$ y es respectivamente

$$u_1 = -t, \quad u_2 = \begin{cases} 0 \\ 2t \end{cases}, \quad u_3 = \begin{cases} 0 \\ \frac{2t}{t} = 2 \end{cases}, \quad u_4 = 0,$$

ó en términos de las coordenadas primitivas

$$p = x - t, \quad q = \begin{cases} y \\ 2t + y \end{cases}, \quad p + q = \begin{cases} y \\ 2x - y \end{cases}, \quad z = \frac{1}{2}(p^2+q^2) + (p-x)(q-y),$$

lo cual da para la primera curva $\sigma(t)$, como $q = y = p + q$, que $p = 0$ y por tanto

$$z = \frac{y^2}{2},$$

que es una solución pasando por el eje x. La correspondiente a la segunda $\sigma(t)$ da

$$p = x - t, \quad q = 2t + y, \quad p + q = 2x - y, \quad z = \frac{1}{2}(p^2+q^2) + (p-x)(q-y),$$

y de las tres primeras

$$t = x - 2y, \quad p = 2y, \quad q = 2x - 3y,$$

y haciendo cuentas en la cuarta tenemos la otra solución

$$z = \frac{1}{2}(4xy - 3y^2). \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.6.2.- Encontrar con el método de Cauchy la solución de la EDP

$$z = z_x z_y$$

que pasa por la curva $x = 0$, $z = y^2$.

Solución. $F = pq - z$ y su campo característico es

$$D = q\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y} + 2pq\frac{\partial}{\partial z} + p\frac{\partial}{\partial p} + q\frac{\partial}{\partial q},$$

el cual tiene integrales primeras las funciones diferenciablemente independientes

$$u_1 = x - q, \quad u_2 = y - p, \quad u_3 = \frac{q}{p}, \quad u_4 = F,$$

Ahora la curva es $x(t) = 0$, $y(t) = t$, $z(t) = t^2$; y hay una solución en

$$p(t)q(t) = z(t) = t^2, \qquad 2t = z'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t) = q(t),$$

que define la curva $\sigma(t)$ en $\mathbb{R}^5$

$$x(t) = 0, \quad y(t) = t, \quad z(t) = t^2, \quad p(t) = t/2, \quad q(t) = 2t.$$

Ahora para cada t consideramos la curva integral de D pasando por $\sigma(t)$

$$x - q = -2t, \quad y - p = t - t/2 = t/2, \quad q/p = 4, \quad z = pq,$$

lo cual implica eliminando t, p y q

$$z = \left(y + \frac{x}{4}\right)^2. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.6.3.- Encontrar con el método de la proyección una integral completa de la EDP

$$z = xz_x + yz_y + z_xz_y.$$

Solución. $F = -z + xp + yq + pq$ y el campo característico es

$$D = (x+q)\frac{\partial}{\partial x} + (y+p)\frac{\partial}{\partial y} + (p(x+q) + q(y+p))\frac{\partial}{\partial z},$$

el cual tiene la 1–forma incidente $(y+p)dx - (x+q)dy$, por tanto tiene por integrales primeras las funciones

$$u_1 = p, \quad u_2 = q, \quad u_3 = \frac{x+q}{y+p}.$$

Ahora escribimos y, z en términos de las u_i, x y F

$$y = \frac{x+u_2}{u_3} - u_1, \quad z = u_1x + u_2(\frac{x+u_2}{u_3} - u_1) + u_1u_2 - F,$$

y haciendo $x = 0$ y $F = 0$ consideramos las integrales primeras

$$Y = \frac{u_2}{u_3} - u_1, \quad Z = \frac{u_2^2}{u_3},$$

que igualadas a constantes, junto con $F = 0$, nos determinan una integral completa de la ecuación. $\blacksquare$

Ejercicio 7.6.4.- Encontrar con el método de la proyección una integral completa de la ecuación

$$z_x^2 + z_y^2 = 1.$$

Solución. En este caso $F = p^2 + q^2 - 1$, por lo que el campo característico es

$$D = 2p\frac{\partial}{\partial x} + 2q\frac{\partial}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial z},$$

y tiene integrales primeras

$$u_1 = p, \quad u_2 = zp - x, \quad u_3 = py - qx, \quad u_5 = F,$$

ahora despejamos y y z en función de las u_i y $u_4 = x$ y consideramos las integrales primeras que coinciden con ellas en $x = 0$

$$y = \frac{u_3 + qx}{u_1} \qquad Y = \frac{u_3}{u_1} = \frac{py - qx}{p},$$
$$z = \frac{x + u_2}{u_1} \qquad Z = \frac{u_4}{u_1} = \frac{zp - x}{p},$$

y tenemos una integral completa para cada $a, b \in \mathbb{R}$, eliminando p y q entre las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{qx - py}{p} = a \\ \dfrac{x - zp}{p} = b \\ p^2 + q^2 = 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (z+b)^2 = x^2 + (y+a)^2. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.6.5.- Encontrar con el método de la proyección la solución, que en $x = 0$ pasa por $z = y^3$, de la EDP: $yzz_x + z_y = 0$.

Solución. Como $F(x, y, z, p, q) = yzp + q$ entonces el campo del sistema característico es

$$yz\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - yp^2\frac{\partial}{\partial p} - (zp + ypq)\frac{\partial}{\partial q} + F\frac{\partial}{\partial z},$$

y dadas sus características —F es una de sus componentes—, consideramos el campo

$$D = yz\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - yp^2\frac{\partial}{\partial p} - (zp + ypq)\frac{\partial}{\partial q},$$

que coincide con él en $\mathcal{F}$ y tiene por integrales primeras las funciones

$$u_1 = z\ , \quad u_2 = zy^2 - 2x\ , \quad u_3 = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{p}.$$

Pongamos ahora y, z, p y q en términos de las u_i, x y F

$$z = u_1\ , \quad y = \sqrt{\frac{u_2 + 2x}{u_1}},$$

$$p = \frac{2u_1}{u_2 + 2x - 2u_1u_3}\ , \quad q = F - yzp = F - \sqrt{\frac{u_2 + 2x}{u_1}}\,\frac{2u_1^2}{u_2 + 2x - 2u_1u_3},$$

y consideremos las integrales primeras de D que en $x = 0$ y $F = 0$ coinciden con z, y, p, q

$$Z = u_1\ , \quad Y = \sqrt{\frac{u_2}{u_1}}\ , \quad P = \frac{2u_1}{u_2 - 2u_1u_3}\ , \quad Q = -\sqrt{\frac{u_2}{u_1}}\,\frac{2u_1^2}{u_2 - 2u_1u_3},$$

la solución la encontramos despejando z en la superficie de $\mathbb{R}^5$

$$\mathcal{S}_2 = \{Z = Y^3,\ Q = 3Y^2,\ F = 0\},$$

en cualquier abierto en el que x, y sean coordenadas. Ahora bien, en $\mathcal{S}_2$ tenemos que

$$Z = Y^3 \quad \Leftrightarrow \quad z = \Big[\frac{u_2}{u_1}\Big]^{\frac{3}{2}} = \Big[\frac{zy^2 - 2x}{z}\Big]^{\frac{3}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad z^5 = (zy^2 - 2x)^3,$$

y p y q son función de x, y, z, por tanto la solución es cualquier función cuya gráfica está en la superficie de $\mathbb{R}^3$

$$z^5 = (zy^2 - 2x)^3. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.6.6.- Encontrar la solución, que en $x = 0$ pasa por $z = y^2$, de la ecuación: $z + z_x^2 = y$.

Solución. $F(x, y, z, p, q) = z + p^2 - y$ entonces el campo del sistema característico es

$$2p\frac{\partial}{\partial x} + 2p^2\frac{\partial}{\partial z} - p\frac{\partial}{\partial p} + (1 - q)\frac{\partial}{\partial q},$$

y tiene por integrales primeras las funciones

$$u_1 = y\ , \quad u_2 = \frac{x}{2} + p\ , \quad u_3 = \frac{q - 1}{p}.$$

y las integrales primeras que coinciden con y, z, p y q en $x = 0$ y $F = 0$ son

$$\bar{y} = u_1\ , \quad \bar{z} = u_1 - u_2^2\ , \quad \bar{p} = u_2\ , \quad \bar{q} = 1 + u_2u_3.$$

Ahora la solución[19] la encontramos despejando z en la superficie de $\mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2 &= \{\bar{z} = \bar{y}^2,\ \bar{q} = 2\bar{y},\ F = 0\}\\ &= \{u_1 - u_2^2 = u_1^2,\ 1 + u_2u_3 = 2u_1,\ z = y - p^2\},\end{aligned}$$

en cualquier abierto en el que x, y sean coordenadas. Ahora bien, en la primera ecuación

$$y - \Big(\frac{x}{2} + p\Big)^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{y - y^2} - \frac{x}{2}$$

y por la tercera ecuación

$$z = y - \Big(\sqrt{y - y^2} - \frac{x}{2}\Big)^2 = y^2 - \frac{x^2}{4} + x\sqrt{y - y^2}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.6.7.- Encontrar con el método de Lagrange–Charpit una integral completa de la EDP

$$x[z_x^2 + z_y^2] - zz_x = 0.$$

Solución. Tenemos que $F = x(p^2 + q^2) - zp$. Consideremos el campo correspondiente —en $\{F = 0\}$—

$$D = (2xp - z)\frac{\partial}{\partial x} + 2xq\frac{\partial}{\partial y} + zp\frac{\partial}{\partial z} - q^2\frac{\partial}{\partial p} + qp\frac{\partial}{\partial q},$$

[19] Observemos que este método no nos permite encontrar una integral completa de la ecuación, pues la proyección a $\mathbb{R}^3$ de $\{\bar{z} = a, \bar{y} = b, F = 0\}$ cae en $y = b$ y no podemos despejar z como función de x, y, sin embargo sí se proyecta la solución $\{\bar{z} = a, \bar{q} = 0, F = 0\}$ y da $z = a + x\sqrt{y - a} - x^2/4$.

el cual tiene la 1–forma incidente $pdp + qdq$ y por tanto $d(p^2 + q^2)$, es decir que $f_2 = p^2 + q^2$ es una integral primera de D. Ahora restringimos ω a la subvariedad

$$\{F = 0, f_2 = a^2\},$$

y el método nos asegura que ω es proporcional a una exacta. Como en ella se tiene

$$p = \frac{xa^2}{z}\ , \quad q = \frac{a\sqrt{z^2 - x^2a^2}}{z} = ag,$$

tendremos que

$$\omega = dz - pdx - qdy = dz - \frac{xa^2}{z}dx - agdy,$$

es proporcional a

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 - x^2a^2}}dz - \frac{a^2x}{\sqrt{z^2 - x^2a^2}}dx - ady = d[\sqrt{z^2 - x^2a^2} - ay].$$

Por tanto para cada $b \in \mathbb{R}$

$$a^2x^2 + (ay + b)^2 - z^2 = 0,$$

es solución de nuestra ecuación. ∎

Ejercicio 7.6.8.- Encontrar con el método de Lagrange–Charpit una integral completa de la EDP: $xz_x^2 + yz_y^2 = z$.

Solución. En este caso tenemos

$$F(x, y, z, p, q) = xp^2 + yq^2 - z,$$

a la que le corresponde el campo

$$D = 2xp\frac{\partial}{\partial x} + 2yq\frac{\partial}{\partial y} + 2(p^2x + q^2y)\frac{\partial}{\partial z} + (p - p^2)\frac{\partial}{\partial p} + (q - q^2)\frac{\partial}{\partial q}.$$

Ahora $2xdp + (p-1)dx$ es incidente con D, y multiplicando por $p-1$ también lo es $d[(p-1)^2x]$, por tanto una integral primera de D es

$$f_2 = (1 - p)^2x,$$

y en $\{F = 0, f_2 = a\}$ tendremos que

$$p = 1 - \sqrt{\frac{a}{x}}, \qquad q = \sqrt{\frac{z - (\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}{y}},$$

y por tanto

$$\omega = dz - pdx - qdy = dz - [1 - \sqrt{\frac{a}{x}}]dx - \sqrt{\frac{z - (\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}{y}}dy,$$

es proporcional a

$$\frac{1}{\sqrt{z - (\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}}dz - \frac{1 - \sqrt{\frac{a}{x}}}{\sqrt{z - (\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}}dx - \frac{1}{\sqrt{y}}dy =$$
$$= 2d[\sqrt{z - (\sqrt{x} - \sqrt{a})^2} - \sqrt{y}],$$

por tanto para cada $a, b \in \mathbb{R}$ tenemos la solución

$$\sqrt{z-(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2} = \sqrt{y}+b \quad \Rightarrow \quad z = x - 2\sqrt{ax} + y + 2b\sqrt{y} + a + b^2. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.6.9.- Encontrar con el método de Lagrange–Charpit una integral completa de la EDP

$$z = xz_x + yz_y + z_x z_y.$$

Ind. En el ejercicio (7.6.3) hemos encontrado las integrales primeras del campo característico

$$p, \quad q, \quad \frac{x+q}{y+p}.$$

Ahora para la primera tendremos que en $\{F = 0, p = a\}$,

$$dz - pdx - qdy = dz - adx - \frac{z-xa}{y+a}dy,$$

que es proporcional a la $d\frac{z-xa}{y+a}$, y tenemos la integral completa

$$z = xa + yb + ab.$$

La segunda integral primera nos da algo similar y para la tercera tendremos que en $\{F = 0, \frac{x+q}{y+p} = a\}$

$$dz - pdx - qdy = dz - \left(a\sqrt{\frac{z+xy}{a}} - y\right)dx - \left(\sqrt{\frac{z+xy}{a}} - x\right)dy,$$

que es proporcional a

$$d(\sqrt{z+xy} - \frac{\sqrt{a}x}{2} - \frac{y}{2\sqrt{a}}),$$

por tanto la integral completa es

$$\sqrt{z+xy} - \frac{\sqrt{a}x}{2} - \frac{y}{2\sqrt{a}} = b. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.6.10.- La normal en un punto de una superficie del espacio interseca a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en un par de puntos cuyo punto medio está en $z = 0$. (a) Demostrar que la superficie satisface la EDP

$$z(z_x^2 + z_y^2) + xz_x + yz_y = 0.$$

(b) Encontrar una integral completa de esta EDP.

Demostración. (a) La normal $n = (z_x, z_y, -1)$ en cada punto $p = (x, y, z(x, y))$ de nuestra superficie define la recta $p + \lambda n$ que se corta con la esfera S en dos puntos $p + \lambda_1 n$, $p + \lambda_2 n$, con las λ_i raíces de la ecuación

$$(x + \lambda z_x)^2 + (y + \lambda z_y)^2 + (z - \lambda)^2 = 1,$$

y cuyo punto medio $p + [(\lambda_1 + \lambda_2)/2]n$ tiene nula la tercera componente, es decir $z = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, por tanto de la ecuación sólo nos interesa el valor de $(\lambda_1 + \lambda_2)/2$, que es

$$\frac{-xz_x - yz_y + z}{z_x^2 + z_y^2 + 1}.$$

(b) El campo característico en $\mathcal{F}$ es

$$D=(x+2pz)\partial_x+(y+2qz)\partial_y+z(p^2+q^2)\partial_z-p(1+p^2+q^2)\partial_p-q(1+p^2+q^2)\partial_q,$$

que tiene una integral primera $u=p/q$ y por Lagrange–Charpit en $\{F=0, p/q=a\}$,

$$\begin{aligned} &p=aq\\ &q=-\frac{y+xa}{z(a^2+1)} \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \omega=dz+\frac{ay+xa^2}{z(a^2+1)}dx+\frac{y+xa}{z(a^2+1)}dy,$$

que es proporcional a la diferencial de la función

$$(a^2+1)z^2+2axy+a^2x^2+y^2=(a^2+1)z^2+(ax+y)^2,$$

y la solución es $(a^2+1)z^2+(ax+y)^2=b$, que representan cilindros de base circular, con eje en el plano $z=0$ pasando por el origen y ecuación $z=0$, $ax+y=0$, pues en la recta $ax+y=c$, con c constante, z es constante, además esa recta dista del origen $d=|c|/\sqrt{a^2+1}$ y d^2+z^2 es constante. ∎

Ejercicio 7.6.11.- La recta normal a una superficie en cada uno de sus puntos corta a los planos coordenados $x=0$, $y=0$ y $z=0$, respectivamente en A, B y C. Demostrar que si B es el punto medio de A y C entonces la superficie es solución de la EDP

$$z=\frac{x}{z_x}-\frac{2y}{z_y}.$$

Encontrar una integral completa.

Demostración. La recta es

$$(x,y,z)+\lambda(z_x,z_y,-1)=(x+\lambda z_x, y+\lambda z_y, z-\lambda),$$

y los tres puntos se obtienen respectivamente para $x+\lambda_1 z_x=0$, $y+\lambda_2 z_y=0$ y $\lambda_3=z$ es decir

$$\begin{aligned} A&=(0,y+\lambda_1 z_y, z-\lambda_1)=(0, y-\frac{xz_y}{z_x}, z+\frac{x}{z_x}),\\ B&=(x+\lambda_2 z_x, 0, z-\lambda_2)=(x-\frac{yz_x}{z_y}, 0, z+\frac{y}{z_y}),\\ C&=(x+\lambda_3 z_x, y+\lambda_3 z_y, 0)=(x+zz_x, y+zz_y, 0), \end{aligned}$$

y si $(A+C)/2=B$, tendremos

$$y-\frac{xz_y}{2z_x}+\frac{zz_y}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad z=\frac{x}{z_x}-\frac{2y}{z_y}.$$

El campo característico de $F=z-x/p+2y/q$ (en $F=0$) es

$$D=\frac{x}{p^2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{2y}{q^2}\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1-p^2}{p}\frac{\partial}{\partial p}-\frac{2+q^2}{q}\frac{\partial}{\partial q},$$

el cual tiene la uno–forma incidente

$$\frac{dz}{z}+\frac{pdp}{p^2-1}=d\left(\log z+\frac{1}{2}\log(p^2-1)\right),$$

y D tiene integral primera $u=z^2(p^2-1)$. Ahora en $F=0$ y $u=a$,

$$p=\frac{\sqrt{z^2+a}}{z}, \quad q=\frac{2y\sqrt{z^2+a}}{z(x-\sqrt{z^2+a})}$$

por tanto $dz - pdx - qdy$ es proporcional a

$$\frac{2z(\sqrt{z^2+a}-x)}{\sqrt{z^2+a}}dz + 2(x-\sqrt{z^2+a})dx + 4ydy = \\ = d(z^2+x^2+2y^2-2x\sqrt{z^2+a}),$$

por tanto $z^2+x^2+2y^2-2x\sqrt{z^2+a} = b$ es una integral completa. ∎

Ejercicio 7.7.1.- Demostrar que cada plano de una familia uniparamétrica de planos del espacio es tangente a su envolvente.

Demostración. Consideremos una familia uniparamétrica de planos

$$xa(t) + yb(t) + zc(t) = d(t),$$

cuya envolvente, formada por las rectas (una para cada valor de t)

$$xa(t) + yb(t) + zc(t) = d(t),$$
$$xa'(t) + yb'(t) + zc'(t) = d'(t),$$

sea una superficie, entonces el plano tangente en cualquier punto de la recta está dado por la primera ecuación. Consideremos pues un punto de la recta anterior (para un t fijo) —observemos que esta recta está en la superficie y por tanto es tangente a ella y está en el primer plano—, basta encontrar otra recta de este plano, pasando por nuestro punto, tangente a la superficie. Para ello consideremos un plano $xA + yB + zC = D$ que contenga al punto, de modo que sean independientes los vectores

$$(a(t), b(t), c(t)), \quad (a'(t), b'(t), c'(t)), \quad (A, B, C)$$

y por tanto para el que localmente tiene solución única el sistema

$$xa(t) + yb(t) + zc(t) = d(t)$$
$$xa'(t) + yb'(t) + zc'(t) = d'(t)$$
$$xA + yB + zC = D$$

que nos define una curva $(x(t), y(t), z(t))$ de la superficie, cuyo vector tangente satisface

$$x'a(t) + y'b(t) + z'c(t) = 0,$$

y por tanto está en el plano $xa(t) + yb(t) + zc(t) = d(t)$, que es lo que queríamos. ∎

Ejercicio 7.7.2.- Hallar la envolvente de la familia de esferas de radio 1, con centro en los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ (figura (7.9)).

Solución. La envolvente se obtiene eliminando λ en las ecuaciones

$$(x - 2\cos\lambda)^2 + (y - 2\operatorname{sen}\lambda)^2 + z^2 = 1, \quad (x - 2\cos\lambda)\operatorname{sen}\lambda - (y - 2\operatorname{sen}\lambda)\cos\lambda = 0,$$

y de la segunda tenemos $x\operatorname{sen}\lambda = y\cos\lambda$, por tanto

$$\operatorname{sen}\lambda = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

y la envolvente es el toro de ecuación

$$x^2(1-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}})^2 + y^2(1-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}})^2 + z^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 + z^2 = 1. \quad ∎$$

Ejercicio 7.7.3.- Hallar la envolvente de la familia de los segmentos de longitud 1, en el primer cuadrante, con extremos en los ejes coordenados.

Solución. Los segmentos considerados corresponden a las rectas $y = \lambda x + b(\lambda)$, con $\lambda < 0$ y b tal que el segmento —que tiene extremos $(0, b)$ y $(-b/\lambda, 0)$—, tenga longitud 1, por tanto con

$$b^2 + \frac{b^2}{\lambda^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \quad \Rightarrow \quad b' = -\frac{1}{(1+\lambda^2)^{3/2}}.$$

Ahora la envolvente se obtiene eliminando λ en las ecuaciones

$$y = \lambda x + b, \qquad 0 = x + b' \quad \Rightarrow$$

$$y^2 = \lambda^2 x^2 + 2x\lambda b + b^2 = \frac{\lambda^6}{(1+\lambda^2)^3}, \qquad x^2 = b'^2 = \frac{1}{(1+\lambda^2)^3}, \quad \Rightarrow$$

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

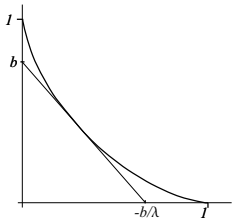


Figura 7.31. Envolvente de los segmentos.

Ejercicio 7.7.4.- Encontrar con el método de la envolvente la solución de la ecuación

$$z_x^2 + z_y^2 = 1,$$

que pasa por la curva $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$.

Solución. En este caso $F = p^2 + q^2 - 1$, por lo que el campo característico es

$$D = 2p\frac{\partial}{\partial x} + 2q\frac{\partial}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial z},$$

y tiene integrales primeras

$$u_1 = p, \quad u_2 = q, \quad u_3 = py - qx, \quad u_4 = zp - x,$$

para cada una de ellas —o sus combinaciones— podemos encontrar una integral completa utilizando el método de Lagrange Charpit, por ejemplo si consideramos la primera, tendremos que en

$$p^2 + q^2 = 1, \quad p = a,$$

nuestra 1–forma $dz - pdx - qdy$ es proporcional a la diferencial de

$$z - ax - \sqrt{1-a^2}y,$$

por lo tanto $g = z - ax - \sqrt{1-a^2}y + b$ es una integral completa y considerando la parametrización de nuestra curva

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t, \quad z(t) = 0,$$

la restricción a ella de g

$$f(t) = -a\cos t - \sqrt{1-a^2}\,\mathrm{sen}\, t + b,$$

planteamos las ecuaciones que nos darán a y b en función de t

$$\left.\begin{array}{r} f(t)=0 \\ f'(t)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a\cos t + \sqrt{1-a^2}\,\mathrm{sen}\, t = b \\ a\,\mathrm{sen}\, t - \sqrt{1-a^2}\cos t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = b\cos t \\ b^2 = 1 \end{array}$$

y de las dos soluciones de este último sistema sólo lo es del primero el correspondiente a $b=1$ y $a=\cos t$, en cuyo caso tenemos la familia de planos solución $h^t=0$, para

$$h = z - x\cos t - y\,\mathrm{sen}\, t + 1,$$

de la cual obtenemos la envolvente eliminando t entre las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} h=0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} z+1 = x\cos t + y\,\mathrm{sen}\, t \\ 0 = -x\,\mathrm{sen}\, t + y\cos t \end{array}\right\} \Rightarrow (z+1)^2 = x^2+y^2. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.7.5.- Encontrar con el método de la envolvente las soluciones de la ecuación

$$x[z_x^2 + z_y^2] - zz_x = 0,$$

que pasan respectivamente por las curvas

$$(1)\ \begin{cases} x=0 \\ z^2 = 4y, \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x^2 = y = z^2 \\ x>0, \quad z>0, \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} x = z^2, \\ y = 0. \end{cases}$$

Solución. (1) En el ejercicio (7.6.7) hemos visto que para cada $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2x^2 + (ay+b)^2 - z^2 = 0, \tag{7.29}$$

es solución de nuestra ecuación. Ahora nuestra curva podemos parametrizarla de la forma

$$x = 0, \quad y = t^2, \quad z = 2t,$$

y para cada t queremos encontrar a y b de tal forma que la superficie (7.29) contenga al punto $(0, t^2, 2t)$ de la curva y su plano tangente contenga a la recta tangente a la curva en ese punto, es decir para

$$f(t) = a^2 0 + (at^2+b)^2 - (2t)^2,$$

planteamos las ecuaciones

$$f(t) = 0, \quad f'(t) = 0.$$

Ahora bien $f = f_1 f_2$, para $f_1 = at^2 + b - 2t$ y $f_2 = at^2 + b + 2t$ y por tanto planteamos las ecuaciones

$$[f_1(t) = 0, \quad f_1'(t) = 0] \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = 0, \quad f'(t) = 0,$$

es decir

$$(at^2+b) - 2t = 0, \qquad 2at - 2 = 0,$$

en definitiva tendremos que

$$a = \frac{1}{t}\,, \quad b = t,$$

y tenemos una familia uniparamétrica de superficies solución

$$\frac{x^2}{t^2} + \Big(\frac{y}{t} + t\Big)^2 - z^2 = 0,$$

o equivalentemente

$$h(x, y, z; t) = x^2 + (y + t^2)^2 - t^2 z^2 = 0,$$

de la cual debemos obtener ahora la envolvente que es

$$\left.\begin{array}{r} h = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - z^4 + 4yz^2 = 0. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.7.6.- Encontrar con este método la solución de $z_x z_y = 1$, que pasa por la curva $z = 0$, $xy = 1$.

Solución. En este caso $F = pq - 1$, por lo que el campo característico tiene a p como integral primera, por tanto tenemos que en $pq = 1$, $p = a$, nuestra 1–forma $dz - pdx - qdy$ es proporcional a la diferencial de

$$z - ax - \frac{y}{a},$$

por lo tanto $z = ax + (y/a) + b$ es una integral completa y dada la parametrización de nuestra curva

$$x(t) = t, \quad y(t) = 1/t, \quad z(t) = 0,$$

consideramos $f(t) = at + (1/at) + b$ y planteamos las ecuaciones $f = 0$ y $f' = 0$, es decir $0 = at + (1/at) + b$ y $0 = a - 1/at^2$, que nos darán a y b en función de t. Consideremos de las dos soluciones $a = 1/t$ y $b = -2$ y la familia de planos solución $z = x/t + ty - 2$, de la cual obtenemos la envolvente eliminando t entre las ecuaciones

$$tz = x + t^2 y - 2t, \qquad z = 2ty - 2,$$

que despejando en la segunda $t = (z + 2)/2y$ y por la primera la envolvente es

$$z = \frac{2xy}{z + 2} + \frac{z + 2}{2} - 2 \quad \Leftrightarrow \quad (z + 2)^2 = 4xy. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.9.1.- Resolver la ecuación $xz_x^2 + yz_y^2 = z$, utilizando el método de Jacobi, reduciéndola antes a las de ese tipo.

Solución. Definimos la función $F(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3) = x_1 z_1^2 + x_2 z_2^2 - x_3 z_3^2$ a la que le corresponde el campo hamiltoniano

$$D_F = 2x_1 z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2 z_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_3 z_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3^2 \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Consideremos una integral primera de D_F, $v_2 = x_1 z_1^2$ y consideremos su campo hamiltoniano

$$D_2 = 2z_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1},$$

y ahora debemos considerar una integral primera común a D_F y D_2. Sea $v_3 = x_2 z_2^2$.

La integral completa es

$$\mathcal{S} = \{F = 0, v_2 = a, v_3 = b\}.$$

En $\mathcal{S}$ se tiene que

$$z_1 = \sqrt{\frac{a}{x_1}}, \quad z_2 = \sqrt{\frac{b}{x_2}}, \quad z_3 = \sqrt{\frac{a+b}{x_3}},$$

por tanto (x_1, x_2, x_3) son coordenadas y en $\mathcal{S}$

$$\begin{aligned}\lambda &= z_1 dx_1 + z_2 dx_2 + z_3 dx_3 \\ &= \sqrt{\frac{a}{x_1}} dx_1 + \sqrt{\frac{b}{x_2}} dx_2 + \sqrt{\frac{a+b}{x_3}} dx_3 \\ &= d[2\sqrt{ax_1} + 2\sqrt{bx_2} + 2\sqrt{(a+b)x_3}],\end{aligned}$$

y la solución por tanto es

$$2\sqrt{ax_1} + 2\sqrt{bx_2} + 2\sqrt{(a+b)x_3} = c. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.9.2.- Aplicar el método de Jacobi a una EDP del tipo $F(u_x, u_y, u_z) = 0$ y encontrar una integral completa de $u_x + u_y + u_z = u_x u_y u_z$.

Solución. El campo Hamiltoniano es $\sum F_{z_i} \partial x_i$, consideremos su integral primera z_1, su campo Hamiltoniano $F_{z_1} \partial x_1$ y la integral primera común a ambos campos z_2. Ahora en la subvariedad de ecuaciones

$$z_1 = a, \quad z_2 = b, \quad F(z_1, z_2, z_3) = 0,$$

λ es exacta. Despejemos en la subvariedad $z_3 = \varphi(a, b)$ —de modo que $F(a, b, \varphi(a, b)) = 0$—, entonces tendremos que en la subvariedad

$$\lambda = z_1 dx_1 + z_2 dx_2 + z_3 dx_3 = d(ax_1 + bx_2 + \varphi(a, b)x_3),$$

y $u = ax_1 + bx_2 + \varphi(a, b)x_3 + c$ es una integral completa.

Ahora para $F = z_1 + z_2 + z_3 - z_1 z_2 z_3$, tendremos que $\varphi(a, b) = (a + b)/(ab - 1)$ y la integral completa es

$$u = ax_1 + bx_2 + \frac{a+b}{ab-1} x_3 + c. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.9.3.- Aplicar el método de Jacobi a una EDP del tipo $F(x, u_x, u_z) = G(y, u_y, u_z)$ y encontrar una integral completa de

$$2x^2 y u_x^2 u_z = x^2 u_y + 2y u_x^2.$$

Solución. El campo Hamiltoniano es

$$F_{z_1} \partial x - G_{z_2} \partial y + (F_{z_3} - G_{z_3}) \partial z - F_x \partial z_1 + G_y \partial z_2,$$

que tiene integral primera z_3. Su campo Hamiltoniano es ∂z y F es una integral primera común a ambos campos. Ahora despejamos las z_i en la subvariedad de ecuaciones

$$F(x, z_1, z_3) = G(y, z_2, z_3), \quad z_3 = a, \quad F = b,$$

es decir de $F(x, z_1, a) = b$ despejamos $z_1 = \varphi_1(x, a, b)$ y de $G(y, z_2, a) = b$ despejamos $z_2 = \varphi_2(y, a, b)$. Ahora en la subvariedad tenemos que

$$\lambda = z_1 dx + z_2 dy + z_3 dz = \varphi_1(x, a, b) dx + \varphi_2(y, a, b) dy + a dz,$$

es exacta.

En el caso particular que nos dan

$$F(x,z_1,z_3)=2z_1^2z_3-2\frac{z_1^2}{x^2},\quad G(y,z_2,z_3)=\frac{z_2}{y}$$

por tanto $z_3=a$, $z_2=by$ y $2z_1^2a-2z_1^2/x^2=b$, por tanto $z_1=\sqrt{\frac{b}{2}}\frac{x}{\sqrt{ax^2-1}}$ y se tiene

$$\lambda=\sqrt{\frac{b}{2}}\frac{x}{\sqrt{ax^2-1}}dx+bydy+adz=d(\frac{\sqrt{b}}{a\sqrt{2}}\sqrt{ax^2-1}+\frac{b}{2}y^2+az),$$

por tanto la integral completa es

$$\frac{\sqrt{b}}{a\sqrt{2}}\sqrt{ax^2-1}+\frac{b}{2}y^2+az+c.\quad\blacksquare$$

Ejercicio 7.9.4.- Aplicar el método de Jacobi a una EDP de Clairaut

$$xu_x+yu_y+zu_z=G(u_x,u_y,u_z),$$

y encontrar una integral completa de

$$(u_x+u_y+u_z)(xu_x+yu_y+zu_z)=1.$$

Indicación. El campo Hamiltoniano es

$$(x-G_{z_1})\partial x+(y-G_{z_2})\partial y+(z-G_{z_3})\partial z-z_1\partial z_1-z_2\partial z_2-z_3\partial z_3,$$

que tiene integral primera z_1/z_3 que como depende sólo de las z_i su campo Hamiltoniano tiene integrales primeras a las z_i, por tanto z_2/z_3 es integral primera suya y del primer campo. Ahora despejamos las z_i en la subvariedad

$$z_1/z_3=a,\quad z_2/z_3=b,\quad xz_1+yz_2+zz_3=G(z_1,z_2,z_3),$$

es decir en $z_1=az_3$, $z_2=bz_3$ y $z_3(ax+by+z)=G(az_3,bz_3,z_3)$ y en ella λ es exacta.

En el caso particular dado, $G(z_1,z_2,z_3)=1/(z_1+z_2+z_3)$, por tanto

$$z_3=\frac{1}{\sqrt{(ax+by+z)(a+b+1)}},$$
$$z_2=\frac{b}{\sqrt{(ax+by+z)(a+b+1)}},$$
$$z_1=\frac{a}{\sqrt{(ax+by+z)(a+b+1)}},$$

y tenemos la integral completa

$$\frac{2\sqrt{ax+by+z}}{\sqrt{a+b+1}}+c.\quad\blacksquare$$

Ejercicio 7.9.5.- Resolver la ecuación diferencial definida por el campo

$$2x_1z_1\frac{\partial}{\partial x_1}+2x_2z_2\frac{\partial}{\partial x_2}-2x_3z_3\frac{\partial}{\partial x_3}-z_1^2\frac{\partial}{\partial z_1}-z_2^2\frac{\partial}{\partial z_2}+z_3^2\frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Indicación. Siguiendo el ejercicio (7.9.1), encontramos que para

$$\phi(x_1,x_2,x_3;v_1,v_2,v_3)=2\sqrt{x_1v_2}+2\sqrt{x_2v_3}+2\sqrt{(v_2+v_3-v_1)x_3},$$

$\lambda=\phi_{x_1}dx_1+\phi_{x_2}dx_2+\phi_{x_3}dx_3$ por tanto tenemos cinco integrales primeras del campo que son

$$\begin{aligned} v_1 &= F=x_1z_1^2+x_2z_2^2-x_3z_3^2, \quad v_2=x_1z_1^2, \quad v_3=x_2z_2^2,\\ \frac{\partial\phi}{\partial v_2} &= \sqrt{\frac{x_1}{v_2}}+\sqrt{\frac{x_3}{v_2+v_3-v_1}}=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_3},\\ \frac{\partial\phi}{\partial v_3} &= \sqrt{\frac{x_2}{v_3}}+\sqrt{\frac{x_3}{v_2+v_3-v_1}}=\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3} \end{aligned}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.9.7.- Encontrar mediante el método de Hamilton–Jacobi las geodésicas de la métrica de curvatura constante negativa $K=-1$ en el disco unidad

$$\frac{(1-x^2-y^2)(dx\otimes dx+dy\otimes dy)+(xdx+ydy)\otimes(xdx+ydy)}{(1-x^2-y^2)^2}$$

Indicación. En el ejercicio (3.11), de la pág.201, vimos que en coordenadas polares la métrica es

$$\frac{(1-\rho^2)(d\rho\otimes d\rho+\rho^2d\theta\otimes d\theta)+(\rho d\rho)\otimes(\rho d\rho)}{(1-\rho^2)^2}=\frac{d\rho\otimes d\rho+(1-\rho^2)\rho^2d\theta\otimes d\theta}{(1-\rho^2)^2},$$

por lo tanto

$$E=\frac{1}{(1-\rho^2)^2}, \quad F=0, \quad G=\frac{\rho^2}{1-\rho^2},$$

y como $EG-F^2=\rho^2/(1-\rho^2)^3$, la ecuación de Hamilton–Jacobi es

$$\frac{\rho^2\phi_\rho^2}{1-\rho^2}+\frac{\phi_\theta^2}{(1-\rho^2)^2}=\frac{2a\rho^2}{(1-\rho^2)^3} \quad \Leftrightarrow \quad \phi_\rho^2+\frac{\phi_\theta^2}{\rho^2(1-\rho^2)}=\frac{2a}{(1-\rho^2)^2}$$

la cual tiene una integral completa en variables separadas

$$\phi=b\theta+\int\sqrt{\frac{2a}{(1-\rho^2)^2}-\frac{b^2}{\rho^2(1-\rho^2)}}\,d\rho$$

y haciendo $\phi_b=cte$, tendremos

$$\begin{aligned} \theta &= \int\frac{b\,d\rho}{\rho^2(1-\rho^2)\sqrt{\frac{2a}{(1-\rho^2)^2}-\frac{b^2}{\rho^2(1-\rho^2)}}}=\int\frac{d\rho}{\rho\sqrt{(cte)\rho^2-(1-\rho^2)}}\\ &= \int\frac{d\rho}{\rho\sqrt{k\rho^2-1}}=\arctan\frac{1}{\sqrt{k\rho^2-1}}+\alpha, \end{aligned}$$

y las soluciones son las rectas, pues si hacemos un giro α

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{1}{\tan\theta}=\sqrt{k\rho^2-1} \quad \Rightarrow \quad k\rho^2\operatorname{sen}^2\theta=1 \quad \Rightarrow \quad y=cte. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.9.8.- Encontrar mediante el método de Hamilton–Jacobi las geodésicas de la métrica de curvatura constante positiva $K = 1$ en el plano

$$\frac{(1+x^2+y^2)(dx \oplus dx + dy \oplus dy) - (xdx+ydy) \oplus (xdx+ydy)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Indicación. Siguiendo el ejercicio anterior (7.9.7), tenemos que la métrica es

$$\frac{(1+\rho^2)(d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\theta \otimes d\theta) - \rho^2 d\rho \otimes d\rho}{(1+\rho^2)^2} = \frac{d\rho \otimes d\rho + (1+\rho^2)\rho^2 d\theta \otimes d\theta}{(1+\rho^2)^2},$$

por lo tanto

$$E = \frac{1}{(1+\rho^2)^2}, \quad F = 0, \quad G = \frac{\rho^2}{1+\rho^2},$$

y como $EG - F^2 = \rho^2/(1+\rho^2)^3$, la ecuación de Hamilton–Jacobi es

$$\phi_\rho^2 + \frac{\phi_\theta^2}{\rho^2(1+\rho^2)} = \frac{2a}{(1+\rho^2)^2}$$

la cual tiene una integral completa en variables separadas

$$\phi = b\theta + \int \sqrt{\frac{2a}{(1+\rho^2)^2} - \frac{b^2}{\rho^2(1+\rho^2)}}\, d\rho$$

y haciendo $\phi_b = cte$, tendremos la misma ecuación que en el ejercicio anterior

$$\theta = \int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{k\rho^2-1}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{k\rho^2-1}} + \alpha,$$

y las soluciones son también las rectas. ∎

Ejercicio 7.10.1.- Demostrar que si una lagrangiana en el plano no depende de x, $\mathcal{L}(x,y,y') = \mathcal{L}(y,y')$, la solución de la ecuación de Euler-Lagrange satisface

$$\mathcal{L} - y'\mathcal{L}_{y'} = \text{cte}.$$

Indicación. La solución de la Ecuación de Euler–Lagrange satisface

$$\mathcal{L}_y = \frac{d}{dx}\mathcal{L}_{y'},$$

por tanto

$$\frac{d}{dx}(\mathcal{L} - y'\mathcal{L}_{y'}) = \mathcal{L}_y y' + \mathcal{L}_{y'}y'' - y''\mathcal{L}_{y'} - y'\frac{d}{dx}\mathcal{L}_{y'} = 0. \quad ∎$$

Ejercicio 7.10.2.- Para cada $p = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{x = 0, y = 0\}$, consideremos el plano Δ_p que contiene a los puntos $p = (x,y,z)$ y $(0,0,z)$ y la pendiente de su normal es la distancia de p al eje z. Demostrar que

(a) La distribución es totalmente integrable.

(b) Cada función en el plano cuya gráfica sea solución es una función armónica.

(c) Dicha gráfica es una superficie mínima.

Indicación. El sistema de Pfaff está generado por $\omega = -ydx + xdy + (x^2 + y^2)dz$, pues el vector normal $N = (a, b, c)$ es ortogonal a $(x, y, 0)$ y tiene pendiente $c/\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{x^2+y^2}$. Se demuestra que $d\omega \wedge \omega = 0$ y la solución z satisface

$$z_x = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad z_y = \frac{-x}{x^2+y^2},$$

se comprueba que es solución de la Ecuación de LaPlace $z_{xx} + z_{yy} = 0$ y de la Ecuación de las superficies mínimas

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right) = 0. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.10.3.- (a) Demostrar que si una curva plana, cerrada ó no, gira alrededor de un eje del plano que no la corta, el área de la superficie que genera es igual a la longitud de la curva multiplicada por la distancia que recorre el centro de masa de la curva. En el caso de que la curva sea de la forma $y = y(z)$ en $[z_1, z_2]$, es

$$2\pi \int_{z_1}^{z_2} y\sqrt{1+y'^2}dz.$$

(b) Entre todas las curvas del plano yz, que unen dos puntos (a_1, b_1) y (a_2, b_2), encontrar la que genera una superficie de revolución en torno al eje z de mínima área.

(c) ¿Es una superficie mínima?

Indicación. Si la curva es $\sigma(t) = (y(t), z(t))$, para $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, la superficie es la imagen de

$$F\colon [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad F(t,\theta) = (y(t)\cos\theta, y(t)\,\mathrm{sen}\,\theta, z(t)),$$

para la que si llamamos A a la matriz Jacobiana de F, $\sqrt{|A^tA|} = y\sqrt{\dot{y}^2+\dot{z}^2} = y\dot{s}(t)$, siendo

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{y}^2+\dot{z}^2}dt,$$

el parámetro longitud de arco de la curva, por tanto el área es (ver apuntes de Teoría de la medida)

$$\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sqrt{|A^tA|}\,dm = \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} y(t)\dot{s}(t)\,dtd\theta = 2\pi\int_0^L y(s)ds.$$

siendo $L = s(1)$ la longitud de la curva y el resultado se sigue pues las coordenadas del centro de gravedad de la curva en el plano yz, son

$$\left(\frac{\int_0^L y(s)\,ds}{L}, \frac{\int_0^L z(s)\,ds}{L}\right),$$

y la abscisa es la distancia al eje z.

Otra forma de verlo menos general es si la curva es de la forma $z = z(y)$, en cuyo caso la superficie es la gráfica de la función, para $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$$f\colon \{x_1 \le \rho \le x_2\} \subset \mathbb{R}^2 \to f(x,y) = z(\rho),$$

para la que $1 + f_x^2 + f_y^2 = 1 + z'(\rho)^2$, por lo que tendremos que el área de la superficie es

$$\int_{\{a_1\le\rho\le a_2\}} \sqrt{1+z'(\rho)^2}\,dxdy = \int_{a_1}^{a_2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+z'(\rho)^2}\,\rho\,d\rho d\theta = 2\pi\int_{a_1}^{a_2} x\sqrt{1+z'(x)^2}dx.$$

Hágalo el lector para el caso en que la curva es de la forma $x = x(z)$.

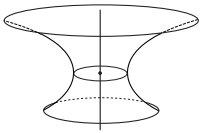


Figura 7.32. Catenoide

(b) Por el apartado (a) en el caso general consideramos la lagrangiana

$$\mathcal{L}(t,y,z,\dot y,\dot z) = y\sqrt{\dot y^2+\dot z^2},$$

para la cual las ecuaciones de Euler–Lagrange son

$$\left.\begin{array}{ll}\mathcal{L}_z = 0 & \mathcal{L}_{\dot z} = \dfrac{y\dot z}{\sqrt{\dot y^2+\dot z^2}}\\ \mathcal{L}_y = \sqrt{\dot y^2+\dot z^2} & \mathcal{L}_{\dot y} = \dfrac{y\dot y}{\sqrt{\dot y^2+\dot z^2}},\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 0 = \dfrac{d}{dt}\dfrac{y\dot z}{\sqrt{\dot y^2+\dot z^2}},\\ \sqrt{\dot y^2+\dot z^2} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{y\dot y}{\sqrt{\dot y^2+\dot z^2}},\end{array} \Rightarrow$$

$$\frac{y\dot z}{\sqrt{\dot y^2+\dot z^2}} = c(\text{cte})$$

y para $c = 0$ se tiene $z(t)$ constante, que es la solución si $b_1 = b_2$, en cuyo caso la superficie es un disco agujereado. Si por el contrario $b_1 \ne b_2$ la solución corresponde a $c \ne 0$ y por tanto $\dot z \ne 0$, por lo que la curva es de la forma $y = y(z)$ y para $dy/dz = y'(z) = \dot y/\dot z$, tenemos que la ecuación es

$$y = c\sqrt{1+y'^2} \quad\Leftrightarrow\quad y' = \sqrt{\frac{y^2}{c^2}-1}$$

y teniendo en cuenta las propiedades del coseno hiperbólico (ver la definición en la pág.56, donde además resolvimos esencialmente la misma ecuación diferencial (1.13) que es la de la catenaria)

$$\cosh' = \operatorname{senh},\quad \operatorname{senh}' = \cosh,\quad \cosh^2 - \operatorname{senh}^2 = 1,\quad \cosh' = \sqrt{\cosh^2 x - 1},$$

y considerando el cambio de variable $\cosh u = y/c$, tendremos que

$$u' = \frac{1}{c} \quad\Rightarrow\quad u = \frac{z}{c} - d \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{c} = \cosh\frac{z}{c} - d, \tag{7.30}$$

y la solución es una catenaria (girada, pues y es función de z) (ver el ejercicio (1.9.5), pág.54) y la superficie de revolución es una *catenoide* (ver fig.7.32).

Observemos que por dos puntos pasan infinitas catenarias (depende de la longitud de *la cadena* que dejemos colgar) y no todas son solución de este problema, sólo las de la forma que hemos obtenido. La constante c hace una homotecia y la d sube o baja la superficie. Con la elección adecuada de ambas se consigue la que pasa por los puntos dados. Sin embargo no siempre tiene solución, para ver esto consideremos que el primer punto es $(a_1, b_1) = (1, 0)$.

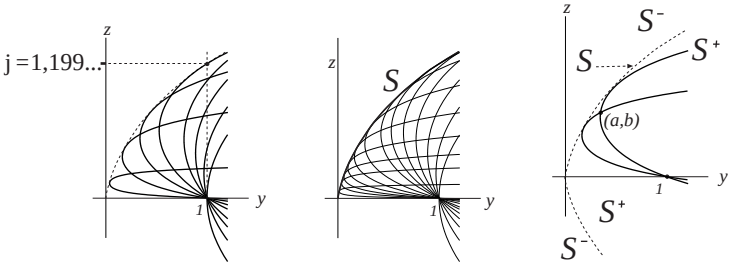


Figura 7.33. Catenarias que pasan por $(1, 0)$

La familia de catenarias que lo contienen es (Fig.7.33, donde el eje y es horizontal y el z vertical)

$$yr = \cosh(zr - d), \quad \text{para} \quad r = \cosh -d = \cosh d,$$

es decir

$$y \cosh d = \cosh(z \cosh d - d), \tag{7.31}$$

y como el coseno hiperbólico es una función convexa, pues $\cosh'' = \cosh > 0$, cada una corta a la recta $y = 1$ en dos puntos una con $z = 0$ y otro con $z = z_1$ tal que

$$\cosh d = \cosh(z_1 \cosh d - d) \quad \Rightarrow \quad d = z_1 \cosh d - d \quad \Rightarrow \quad z_1 = \frac{2d}{\cosh d},$$

y esta función de d toma un valor extremo en

$$0 = z_1' = \frac{2\cosh d - 2d \operatorname{senh} d}{\cosh^2 d} \quad \Rightarrow \quad d \tanh d = 1,$$

la cual tiene sólo dos soluciones que llamamos $\pm d_1$ y

$$-\varphi = -\frac{2d_1}{\cosh d_1} \le z_1 \le \frac{2d_1}{\cosh d_1} = \varphi \sim 1,19968,$$

(ver fig.7.33–Izqda.) de donde se sigue que no hay solución si tomamos el segundo punto (a, b), con $0 < a \le 1$ y $|b| \ge \varphi$, pues en tal caso la solución cortaría a $y = 1$ en un punto z_1, con $|z_1| > \varphi$.

De hecho lo que ocurre (no lo demostramos) es que la envolvente S de todas las soluciones (7.31), que pasan por $(1, 0)$ (ver fig.7.33–centro) separa en dos regiones S^+ y S^- el semiplano $y > 0$ y se verifica que:

Si el segundo punto está en S^- no hay solución.

Si está en S hay curva solución pero no es la de mínima área que pase por él, pues lo sería la solución degenerada del par de discos horizontales de centro el eje z, a alturas 0 y b, que es la superficie de revolución que corresponde a la curva

formada por los tres segmentos: $(a,b) - -(0,b)$, $(0,b) - -(0,0)$ y $(0,0) - -(1,0)$.

Figura 7.34. La catenoide de la derecha es la de mínima area

Y si está en S^+ hay dos soluciones que pasan por él (ver fig.7.33–drcha.), pero sólo una es la de mínima área, la que dista más del eje z (la de la derecha en la fig.7.34)

(c) Por último se demuestra que, para $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ y

$$\frac{\rho}{c} = \cosh\frac{z-d}{c},$$

z satisface la ecuación de las superficies mínimas (7.10.2, pág.512), pues derivando respecto de x e y, llamando $r = (z-d)/c$ y teniendo en cuenta que

$$\rho_x = x/\rho, \qquad \rho_y = y/\rho,$$

tendremos que

$$\frac{x}{\rho} = z_x \operatorname{senh} r, \quad \frac{y}{\rho} = z_y \operatorname{senh} r \quad \Rightarrow \quad 1 = (z_x^2 + z_y^2)\operatorname{senh}^2 r \quad \Rightarrow$$

$$z_x^2 + z_y^2 = \frac{c^2}{\rho^2 - c^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-c^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} = \frac{cx}{\rho^2}, \quad \frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} = \frac{cy}{\rho^2} \quad \Rightarrow$$

$$\partial_x\left(\frac{x}{\rho^2}\right) + \partial_y\left(\frac{y}{\rho^2}\right) = \frac{\rho^2-2x^2}{\rho^4} + \frac{\rho^2-2y^2}{\rho^4} = 0. \quad \blacksquare$$

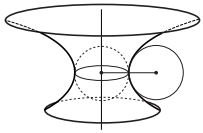


Figura 7.35. La catenoide tiene curvatura media nula en todo punto

Por último en el ejercicio (8.9), se demuestra que f es solución de la EDP de las superficies mínimas si y sólo si la superficie $z = f(x,y)$ tiene curvatura media nula en todo punto, es decir que en todo punto las curvaturas principales son iguales y opuestas, lo cual geométricamente significa que el meridiano y el paralelo por un punto P del paralelo de puntos mas cercanos al eje, tienen círculos osculadores de igual radio, ver la fig.7.35, estas son las únicas catenarias válidas en nuestro problema.

Ejercicio 7.10.4.- Demostrar que si $v(x,y)$ es la velocidad de una partícula en un punto del plano (x,y), el tiempo que la partícula tarda en ir de un punto (x_0,y_0) del plano a otro (x_1,y_1) a través de una curva $y=y(x)$ es

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{v(x,y(x))}dx.$$

Indicación. Parametricemos la curva por el tiempo $\sigma(t)=(x(t),y(t))$ tal que $\sigma(t_0)=(x_0,y_0)$ y $\sigma(t_1)=(x_1,y_1)$ y denotemos $y'=dy/dx$ y $\dot{y}=dy/dt$, por tanto como

$$v(x(t),y(t))=\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}=\dot{x}(t)\sqrt{1+y'(x(t))},$$

y poniendo t en función de x tendremos que $t(x_0)=t_0$ y $t(x_1)=t_1$, por tanto

$$t_1-t_0=\int_{x_0}^{x_1}\frac{dt}{dx}dx=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{dx/dt}dx=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{v(x,y(x))}dx. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.10.5.- Consideremos en el semiplano $y\geq 0$, el problema variacional de la curva de mínimo tiempo cuando la velocidad en cada punto $v(x,y)=y$.

Indicación. Por el ejercicio (7.10.4), el tiempo que la partícula tarda en ir de un punto (x_0,y_0) del plano a otro (x_1,y_1) a través de una curva $y=y(x)$ es

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{y}dx,$$

que corresponde a la Lagrangiana que no depende de x

$$\mathcal{L}(x,y,y')=\frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{y},$$

y cuya curva extremal es solución de la Ecuación de Euler–Lagrange y por el ejercicio (7.10.1), es solución para una constante c y $a=1/c^2$, de

$$\frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{y}-y'\frac{y'}{y\sqrt{1+y'(x)^2}}=c \quad \Rightarrow \quad 1=cy\sqrt{1+y'(x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1=c^2y^2(1+y'^2) \quad \Rightarrow \quad y'=\sqrt{\frac{1}{c^2y^2}-1}$$

$$\Rightarrow \quad dx-\frac{y}{\sqrt{a-y^2}}dy=0 \quad \Rightarrow \quad x+\sqrt{a-y^2}=b \quad \Rightarrow \quad y^2+(x-b)^2=a.$$

que son circunferencias centradas en el eje x. $\blacksquare$

Ejercicio 7.10.6.- Demostrar que la velocidad de un abalorio que cae sin rozamiento por un alambre de un plano x,y perpendicular a la superficie de la tierra, es en cada punto (x,y), $v(x,y)=\sqrt{2g(y_0-y)}$ (para y_0 la altura a la que lo soltamos con velocidad nula, que podemos suponer como $y_0=0$).

Indicación. Sea γ la trayectoria, parametrizada por el tiempo, del abalorio sobre el alambre; las fuerzas que actúan sobre él son la de la gravedad $F=(0,-mg)$ y la que lo mantiene en la curva (una fuerza N que es normal a la curva), por lo tanto

$$F+N=m\gamma'',$$

y la componente tangencial de F coincide con la componente tangencial de $m\gamma''$, es decir

$$-mgy' = F\cdot\gamma' = m\gamma''\cdot\gamma' = m(x'x''+y'y'') = m(\frac{x'^2+y'^2}{2})',$$

y de esto se sigue que $(x'^2+y'^2)/2 = -gy+a$, para una constante[20] a, la cual es nula si la soltamos con velocidad nula desde $y=0$. Por lo tanto el módulo de la velocidad, es (observemos que $y<0$)

$$v[\sigma(t)] = |\sigma'(t)| = \sqrt{-2gy}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.10.7.- Demostrar que la evolvente de la catenaria es la tractriz.

Indicación. La catenaria tiene ecuación

$$z(x) = \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2},$$

por lo tanto como $z' = \operatorname{senh}$ y $\cosh^2 - \operatorname{senh}^2 = 1$, tendremos que la longitud del arco de catenaria entre 0 y $x=t$ es

$$\int_0^t \sqrt{1+z'(x)^2}\,dx = \int_0^t \cosh x\,dx = \operatorname{senh} t = z'(t).$$

y el punto de la evolvente $(x(t),y(t))$, correspondiente al desarrollo tangencial de la catenaria desde $(0,z(0))$ hasta $(t,z(t))$, satisface

$$\sqrt{(z(t)-y(t))^2+(t-x(t))^2} = \int_0^t \sqrt{1+z'(x)^2}\,dx = \operatorname{senh} t = z'(t) = \frac{z(t)-y(t)}{t-x(t)},$$

de donde (por ser $z=\cosh$)

$$x(t) = t - \frac{\operatorname{senh} t}{\cosh t}, \qquad y(t) = \frac{1}{\cosh t},$$

que son las ecuaciones paramétricas de la catenaria, pues en cada punto el segmento tangente de longitud 1 tiene su extremo en el eje x, ya que

$$x' = \frac{\operatorname{senh}^2}{\cosh^2}, \qquad y' = -\frac{\operatorname{senh}}{\cosh^2}, \qquad \sqrt{x'^2+y'^2} = \frac{\operatorname{senh}}{\cosh},$$

y por lo tanto

$$(x,y) + \frac{(x',y')}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

tiene la segunda componente nula, pues

$$y + \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{1}{\cosh t} - \frac{\operatorname{senh}}{\cosh^2}\frac{\cosh}{\operatorname{senh}} = 0. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 7.10.8.- Demostrar que si una masa se mueve sobre una superficie en ausencia de fuerzas, las geodésicas minimizan la acción.

Solución. En este caso $0 = F = -\operatorname{grad} V$, por tanto V es una constante que podemos tomar como $V=0$ y la lagrangiana $\mathcal{L} = T-V = T$, es la energía cinética. Por

[20] Que es la energía total, pues $\frac{x'^2+y'^2}{2}$ es la energía cinética y $-gy$ es la potencial.

tanto, según hemos visto, las curvas buscadas son las geodésicas sobre la superficie. ∎

Ejercicio 7.13.1.- Demostrar que si $\overline{D}$ es la subida canónica de un campo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ al fibrado tangente, entonces:

(i) $\pi \circ Y_t = X_t \circ \pi$, lo cual equivale a que $\pi_* \overline{D} = D$.

(ii) $[H, \overline{D}] = 0$, para H el campo de las homotecias.

Ind.- (ii) El grupo uniparamétrico de H es $\tau_t(D_x) = \mathrm{e}^t D_x$, por tanto

$$Y_t[\tau_s(D_x)] = X_{t*}[\mathrm{e}^s D_x] = \mathrm{e}^s X_{t*}(D_x) = \tau_s[Y_t(D_x)]. \quad \blacksquare$$

7.18. Bibliografía y comentarios

Los libros consultados para la elaboración de este tema han sido los siguientes.

Abraham, R., Mardsen, J.E. and Ratiu, T.: "*Manifolds, Tensor Analysis, and applications*" Ed. Springer–Verlag, 1988.

Arnold, V.I.: "*Mecánica clásica, métodos matemáticos*". Ed. Paraninfo, 1983.

Courant,R. and Hilbert, D.: "*Methods of Mathematical Phisics. Vol. I y II, Partial Differential Equations*". J.Wiley, 1962.

Dubrovin, B.A., Fomenko,A.T. and Novikov, S.P.: "*Modern geometry–Methods and applications*". Part.I Springer–Verlag, 1984.

Garabedian, P.R.: "*Partial Differential Equations*". Chelsea, 1986.

Godbillon, C.: "*Geometrie differentielle et mecanique analytique*". Hermann, Paris, 1969.

Morris, M. and Brown,O.E. : "*Ecuaciones diferenciales*". Ed. Aguilar, 1972.

Muñoz Diaz, J.: "*Ecuaciones diferenciales (I)*". Ed. Univ. Salamanca, 1982.

Simmons, F.: "*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*". Ed. McGraw–Hill, 1977.

Sneddon, I.: "*Elements of partial differential equations*". McGraw–Hill, 1981.

Spivak, M.: "*A comprehensive Introduction to Differential Geometry*". 5 Vol. Publish or Perish, 1975.

Weinstock, Robert: "*Calculus of Variations*". Dover, 1974.

Zachmanoglou, E.C. and Thoe, Dale W.: "*Introduction to Partial Differential Equations with Applications*". Dover, 1986.

Zarantonello, E.H.: "*Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*". Notas de Curso, IMAF, Córdoba (Argentina), 1984.

Hasta la época del italo–francés Joseph Louis Lagrange, las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden se habían estudiado muy poco, debido a la gran importancia, desde un punto de vista físico, que habían tenido las de segundo orden. En tres artículos que publicó en los años *1772*, *1774* y *1779*, aportó los conceptos fundamentales de la teoría, desde un punto de vista analítico, en el caso bidimensional: la ecuación diferencial del campo característico, la integral completa, la integral general obtenida por el método de la envolvente, el método de Lagrange–Charpit (que este último había desarrollado independientemente en un trabajo no publicado de *1784*), etc. Algunas dificultades con las que se encontraron en la generalización al caso n–dimensional fueron resueltas por A.L. Cauchy en *1819*.

El punto de vista geométrico lo inició en *1770* el francés Gaspar Monge, que en *1784* asoció a cada EDP de primer orden un *cono* en cada punto del espacio, siendo las soluciones superficies tangentes a estos conos. Introdujo la noción de *curva característica* , señalando en un artículo de *1802*, que cada superficie solución de una EDP, era un lugar geométrico de curvas características, y que por cada punto de dicha superficie pasaba una única curva característica. En cuanto a la unicidad de solución, observó la importancia de que la curva por la que se quisiera hacer pasar una superficie solución no fuera característica, dando ejemplos de infinitas soluciones en caso contrario.

En cuanto al campo característico, se debe, como decíamos al final del tema anterior, al matemático alemán Johann Friedrich Pfaff (*1765–1825*), quién propuso el primer método general de integración de una ecuación en derivadas parciales de primer orden (ver el **T.9**, pág.350 de la *Enciclopaedia Britannica*). En su trabajo sobre formas de Pfaff, que publicó en la Academia de Berlín en 1815, Pfaff asocia a una ecuación en derivadas parciales de primer orden la ecuación diferencial que define el campo característico, la cual es fundamental para la resolución de estas ecuaciones en derivadas parciales, sin embargo y aunque Gauss escribió una reseña muy positiva del trabajo poco después de su publicación, su importancia no fue reconocida hasta 1827 cuando Jacobi publicó un trabajo sobre el método de Pfaff.

En *1621*, el holandés Willebrord Snell (cuyo año de nacimiento es dudoso: para algunos es *1580*, para otros *1590* y para otros *1591*), descubrió la *Ley de la refracción de la luz* —que lleva su nombre—, sobre la constancia de la relación entre los senos de los ángulos que un rayo de luz forma al pasar de un medio a otro, respecto de la perpendicular a la superficie que limita ambos medios (ver Simmons, pág. 43). Esta Ley, descubierta de forma experimental, y que tuvo un papel básico en el desarrollo de la *Teoría de la luz*, es consecuencia del *Principio de mínimo tiempo de Fermat*, que Pierre de Fermat descubrió en *1657* y que establece que:

"*La luz viaja de un punto a otro siguiendo el camino que requiere mínimo tiempo*".

Este fue el primer *Principio mínimo* que aparece en Física y dice más que la *Ley de Snell*, pues implica que ese valor constante es la proporción de velocidades de la luz en ambos medios.

En *1744* Pierre de Maupertuis, enunció el *Principio de la mínima acción*, en el que expresaba que:

"*...la naturaleza siempre produce sus efectos por los medios mas simples...*".

y afirmaba que esta simplicidad era la causa por la que la Naturaleza daba a una cierta cantidad, que el llamó *acción*, un valor mínimo. Sin embargo aunque dio distintos ejemplos en los que así era, (ver la pág. 20 del libro)

YOURGRAU, W. AND MANDELSTAM, S.: "*Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*". W.B. Saunders Co., 1968.

su definición de acción era oscura y era más una intuición que una noción precisa. No obstante este principio tuvo una gran trascendencia desde entonces.

En el mismo año *1744*, el suizo LEONHARD EULER, es el primero en publicar el *principio de la mínima acción* en la forma de un teorema. Su proposición aseguraba que cuando una partícula viaja en un plano, de un punto fijo a otro, describe un camino para el que la $\int vds$ es mínima, donde v es la velocidad de la partícula y s la longitud de arco. Y su demostración se basaba en el *cálculo de variaciones* cuya fórmula básica expone en el mismo trabajo (ver YOURGRAU, pág. 24). No obstante sus argumentos geométrico–analíticos fueron reemplazados y mejorados por LAGRANGE mediante argumentos de naturaleza puramente analítica, dando un procedimiento general, sistemático y uniforme, que servía para una gran variedad de problemas y que esencialmente es el que nosotros hemos estudiado en este tema. En *1755* LAGRANGE le escribió una carta a EULER, exponiéndole su *método de variaciones* como él lo llamó, y que EULER renombró, en un artículo del año siguiente, *cálculo de variaciones*. Remitimos al lector interesado a la p.759 del libro

KLINE, MORRIS: "*El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días*", Tomo II. Alianza Univ., 1972.

El primero en dar una versión del *Principio de mínima acción de Hamilton* fue LAGRANGE, pero suponía que la energía total era "la misma constante" en las trayectorias posibles. El enunciado general, sin esta limitación la demostró el irlandés WILLIAM ROWAN HAMILTON, a la edad de 30 años, extendiendo a la mecánica algo que había demostrado 3 años antes: que todos los problemas de óptica se podían resolver por un método muy simple que incluía el *principio de mínimo tiempo de Fermat*, como caso particular. De este modo la óptica y la mecánica se manifestaron como simples aspectos del cálculo de variaciones.

En un trabajo de *1808* publicado en *Mem. de L'institut de France*, LAGRANGE introduce el ahora llamado *corchete de Lagrange* de dos

funciones u, v como

$$\{u, v\} = \sum \frac{\partial z_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial z_i}{\partial v},$$

lo cual no es otra cosa que $\Lambda(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v})$, lo cual no tiene sentido a menos que demos un sistema de coordenadas de la que formen parte nuestras dos funciones y en ese caso el corchete depende de todo el sistema y no sólo de u, v. Al año siguiente, *1809* Siméon–Denis Poisson publica en el *Journal de L'Ecole polytech. VIII (Cahier 15)* un artículo en el que introduce el *corchete de Poisson* de dos funciones u, v como

$$(u, v) = \sum \frac{\partial u}{\partial z_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial z_i},$$

que no es otra cosa que $\Lambda(D_u, D_v)$ y por tanto sólo depende de las dos funciones y es intrínseco.

Fin del Tema 7

Tema 8

EDP de orden superior. Clasificación

8.1. Definición clásica

Desde un punto de vista clásico, llamamos *ecuación en derivadas parciales (EDP)* de orden k en el plano, a una "expresión del tipo"

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \ldots, z_{\underbrace{x\ldots x}_{k}}, z_{\underbrace{x\ldots x}_{k-1}y}, \ldots, z_{\underbrace{y\ldots y}_{k}}) = 0.$$

Una expresión similar para las coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ en lugar de x, y, define una EDP de orden k en $\mathbb{R}^n$.

En particular si consideramos las coordenadas

$$(x, y, z, p, q, r, s, t),$$

en $\mathbb{R}^8$, una EDP de segundo orden en el plano es una expresión del tipo

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) = 0,$$

donde F en una función diferenciable en un abierto de $\mathbb{R}^8$, para la que supondremos que alguna de las tres derivadas parciales

$$F_r, \quad F_s, \quad F_t,$$

es no nula (para que F defina una EDP de segundo orden).

Una solución de esta EDP es cualquier función f en el plano tal que la superficie de $\mathbb{R}^8$ definida por las seis ecuaciones

$$\begin{aligned} &z = f(x,y), \quad p = f_x(x,y), \quad q = f_y(x,y) \\ &r = f_{xx}(x,y), \quad s = f_{xy}(x,y), \quad t = f_{yy}(x,y), \end{aligned}$$

esté en $\{F = 0\}$.

Es fácil demostrar que cualquier superficie de $\{F = 0\}$, en la que se anulen las 1–formas de $\mathbb{R}^8$

$$\begin{aligned} \omega &= dz - pdx - qdy, \\ \omega_1 &= dp - rdx - sdy, \\ \omega_2 &= dq - sdx - tdy, \end{aligned}$$

y tenga coordenadas (x, y), define una función f —por restricción de z a esa superficie—, $z = f(x, y)$, que es solución de la EDP. Esto nos induce a considerar, como hicimos en el tema anterior, el sistema de Pfaff en $\mathbb{R}^8$, generado por las cuatro 1–formas

$$\mathcal{P} =< dF, \omega, \omega_1, \omega_2 >,$$

para el que, como veremos a continuación, a lo sumo existen superficies tangentes.

Teorema 8.1 *Toda subvariedad solución del sistema de Pfaff anterior a lo sumo es bidimensional.*

Demostración. Sea $T_p(\mathcal{S})$ el espacio tangente de una tal subvariedad en un punto p cualquiera y veamos qué dimensión tiene. En primer lugar $T_p(\mathcal{S})$ es incidente con dF, ω, ω_1 y ω_2 y es totalmente isótropo para las 2–formas

$$\begin{aligned} d\omega &= dx \wedge dp + dy \wedge dq = dx \wedge \omega_1 + dy \wedge \omega_2, \\ d\omega_1 &= dx \wedge dr + dy \wedge ds, \\ d\omega_2 &= dx \wedge ds + dy \wedge dt, \end{aligned}$$

de las cuales la primera no nos da ninguna información, pues $T_p(\mathcal{S})$ es incidente con las dos ω_i. Consideremos ahora un subespacio $\mathcal{E}$, que contenga a $T_p(\mathcal{S})$, totalmente isótropo para $d\omega_1$ y $d\omega_2$ y de dimensión máxima. Entonces su dimensión es ≤ 6, pues la máxima dimensión de un subespacio totalmente isótropo de una cualquiera de las $d\omega_i$ es 6, ya que tienen un radical de dimensión 4 que está generado por

$$\operatorname{rad} d\omega_1 =< \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial t} >, \qquad \operatorname{rad} d\omega_2 =< \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial r} >,$$

y bastaría cortar $\mathcal{E}$ con el hiperplano de un vector de fuera del subespacio con lo que encontraríamos que el radical es de dimensión mayor que 4. Por lo tanto hay dos posibilidades:

1.- Si $\dim \mathcal{E} = 6$, como $\mathcal{E}$ es totalmente isótropo para $d\omega_1$, tiene que contener a su radical, pues en caso contrario podríamos ampliar $\mathcal{E}$, con algún elemento del radical que no contenga, a un espacio de dimensión > 6 totalmente isótropo de $d\omega_1$, lo cual es absurdo. Del mismo modo debe contener al radical de $d\omega_2$, por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r} \in \mathcal{E},$$

y si $D \in \mathcal{E}$ es otro vector independiente de los anteriores, (que podemos elegir sin componentes en z, p, q, t y r), tendremos que

$$0 = d\omega_1(D, \frac{\partial}{\partial r}) = Dx,$$
$$0 = d\omega_2(D, \frac{\partial}{\partial t}) = Dy,$$

por tanto D es proporcional a ∂_s y tendremos que

$$< \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial s} >= \mathcal{E},$$

ahora bien si $D \in T_p(\mathcal{S})$, $\omega D = \omega_1 D = \omega_2 D = 0$, por tanto D no tiene componente en la z ni en la p ni en la q y en definitiva

$$T_p(\mathcal{S}) \subset< \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial s} >,$$

pero no puede coincidir con este espacio pues debe ser incidente con dF y esos tres vectores no pueden a la vez ser incidentes con dF, pues al menos una de las tres funciones F_r, F_s ó F_t debe ser no nula.

2.- Si $\dim \mathcal{E} \leq 5$, como en cualquier caso $\partial_z, \partial_p, \partial_q \in \mathcal{E}$, pues $\mathcal{E}$ es maximal, la parte de este espacio incidente con ω no puede coincidir con $\mathcal{E}$, pues no contiene la ∂_z, por tanto a lo sumo es de dimensión 4, por lo que lo llamamos $\mathcal{E}_4$ y satisface $\partial_z, \partial_p \in \mathcal{E}_4$, que a su vez la parte de $\mathcal{E}_4$ incidente con ω_1 no contiene la ∂_p, por tanto a lo sumo es de dimensión 3 y contiene a la ∂_q y a su vez la parte de este espacio incidente con ω_2, no contiene a ese vector, por lo que a lo sumo es bidimensional. ∎

Para resolver este sistema de Pfaff lo primero que hay que hacer es buscar algún campo tangente de su sistema característico, con intención de proyectar el sistema de Pfaff. Sin embargo *no existe ningún campo en el característico*, pues de existir alguno D, debe verificar las condiciones

$$\begin{gathered} DF = \omega D = \omega_1 D = \omega_2 D = 0, \\ D^L\omega, D^L\omega_1, D^L\omega_2 \in \mathcal{P}, \end{gathered}$$

y si suponemos que $F_r \neq 0$ y que

$$D^L\omega_2 = f_1 dF + f_2\omega + f_3\omega_1 + f_4\omega_2,$$

tendremos que al ser $i_D\omega_2 = 0$

$$\begin{aligned} D^L\omega_2 &= i_D d\omega_2 + d i_D\omega_2 = i_D d\omega_2 \\ &= i_D\left(dx \wedge ds + dy \wedge dt\right) \\ &= (Dx)ds - (Ds)dx + (Dy)dt - (Dt)dy, \end{aligned}$$

lo cual implica que son nulas las componentes de dz, dp, dq y dr, es decir

$$0 = f_1 F_z + f_2 = f_1 F_p + f_3 = f_1 F_q + f_4 = f_1 F_r,$$

y por tanto $f_1 = 0$, lo cual a su vez implica que $f_2 = f_3 = f_4 = 0$ y esto que la 1–forma $D^L\omega_2 = 0$, por lo tanto

$$Dx = Ds = Dy = Dt = 0,$$

lo cual a su vez implica que

$$\begin{aligned} Dz &= pDx + qDy = 0, \\ Dp &= rDx + sDy = 0, \\ Dq &= sDx + tDy = 0, \end{aligned}$$

ya que $\omega D = \omega_1 D = \omega_2 D = 0$. Por último que la componente $Dr = 0$ se sigue de $DF = 0$. Un análisis similar se hace en los otros dos casos en

que F_s ó F_t son no nulas, observando que o bien $F_t \neq 0$ ó $F_r = F_t = 0$ y $F_s \neq 0$.

Esta es la razón por la que una EDP de primer orden se reduce esencialmente al estudio de una ecuación diferencial (el campo del característico), mientras que las EDP de orden superior forman una teoría aparte de las ecuaciones diferenciales.

8.2. Operadores diferenciales lineales

Consideremos una EDP en el plano, de segundo orden y lineal en z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy} y z_{yy}, es decir del tipo

$$az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + dz_x + ez_y + fz = 0,$$

donde a, b, c, d, e, f son funciones de x, y. Esta ecuación define un (ODL), *operador diferencial lineal* en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$a\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + 2b\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} + d\frac{\partial}{\partial x} + e\frac{\partial}{\partial y} + f.$$

En esta lección daremos la definición intrínseca de los operadores de este tipo.

8.2.1. Corchete de Lie de operadores lineales.

Definición. Sea $\mathcal{V}$ una variedad diferenciable. Llamaremos *operador lineal* en un abierto $V \subset \mathcal{V}$ a toda aplicación $\mathbb{R}$–lineal

$$P\colon \mathcal{C}^\infty(V) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(V)$$

Cada función $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ define un operador lineal, que denotaremos igual

$$f : \mathcal{C}^\infty(V) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(V), \quad f(g) = f \cdot g.$$

Llamaremos *corchete de Lie de dos operadores* P_1, P_2, al operador

$$[P_1, P_2] = P_1 \circ P_2 - P_2 \circ P_1.$$

Proposición 8.2 *Sean P, P_1, P_2, P_3 operadores lineales y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(V)$, entonces:*

i) $[P_1, P_2] = -[P_2, P_1]$.
ii) $[P_1, P_2 + P_3] = [P_1, P_2] + [P_1, P_3]$.
iii) $[P_1, P_2 \circ P_3] = [P_1, P_2] \circ P_3 + P_2 \circ [P_1, P_3]$.
iv) $[P_1, [P_2, P_3]] = [[P_1, P_2], P_3] + [P_2, [P_1, P_3]]$.
v) $[[P, f], g] = [[P, g], f]$.

Demostración. Hágase como ejercicio. ∎

Definición. Llamaremos *operador diferencial lineal (ODL) de orden* 0 en el abierto $V \subset \mathcal{V}$ a todo operador lineal

$$P : \mathcal{C}^\infty(V) \to \mathcal{C}^\infty(V),$$

tal que $[P, f] = 0$ para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$. Los denotaremos $\mathcal{O}_0(V)$.

Proposición 8.3 *$\mathcal{O}_0(V) = \mathcal{C}^\infty(V)$, es decir los ODL de orden 0 son los operadores que definen las funciones.*

Demostración.

$$P(f) = (P \circ f)(1) = [P, f](1) + (f \circ P)(1) = f \cdot P(1). \quad ∎$$

Nota 8.4 Debemos observar que un operador P de orden 0 *no es una función*, la función realmente es $P(1)$, aunque en general no distinguiremos entre la función y el ODL que define.

Definición. Diremos que un operador lineal P en V es un *operador diferencial lineal* (ODL) *de orden n*, si para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, $[P, f]$ es un ODL de orden $n - 1$. Denotaremos con $\mathcal{O}_n(V)$ los ODL de orden n en el abierto V, por tanto tendremos que

$$\mathcal{O}_0(V) = \mathcal{C}^\infty(V) \subset \mathcal{O}_1(V) \subset \ldots \subset \mathcal{O}_n(V) \subset \ldots$$

Proposición 8.5 *Dado un operador lineal P en V, es un ODL de orden n si y sólo si*

$$f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(V) \quad \Rightarrow \quad [\ldots[[P, f_0], f_1], \ldots, f_n] = 0.$$

Proposición 8.6 i) *Si $P_1, P_2 \in \mathcal{O}_n(V)$, entonces $P_1 + P_2 \in \mathcal{O}_n(V)$.*
ii) *Si $P_n \in \mathcal{O}_n(V)$ y $P_m \in \mathcal{O}_m(V)$, entonces $P_n \circ P_m \in \mathcal{O}_{n+m}(V)$.*
iii) *Para cada n, $\mathcal{O}_n(V)$ es un módulo sobre el anillo $\mathcal{C}^\infty(V)$.*

Demostración. i) Que es estable por sumas se hace por inducción teniendo en cuenta que si P_1 y P_2 son ODL de orden n

$$[P_1 + P_2, f] = [P_1, f] + [P_2, f],$$

que es de orden $n-1$.

ii) Lo haremos por inducción en $n+m$. Si $n+m=0$, entonces ambos operadores son funciones y su composición es el producto, por tanto el resultado se sigue. Sean ahora P_n de orden n y P_m de orden m, entonces tenemos que probar que $[P_n \circ P_m, f]$ es un operador de orden $n+m-1$, pero esto se sigue de (8.2), pues

$$[P_n \circ P_m, f] = [P_n, f] \circ P_m + P_n \circ [P_m, f],$$

y el resultado se sigue por inducción.

iii) Que el producto de una función por un ODL es un ODL se sigue de (ii) para $n=0$. ∎

8.2.2. Restricción de un ODL.

Veamos que los ODL se restringen, es decir que si $U \subset V$ son abiertos de $\mathcal{V}$ y $P \in \mathcal{O}_n(V)$, $P_{|U} \in \mathcal{O}_n(U)$.

Proposición 8.7 *Sea $P \in \mathcal{O}_n(V)$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty$. Si $f = g$ en un abierto $U \subset V$, entonces $P(f) = P(g)$ en U.*

Demostración. Lo haremos por inducción en n, el orden de P. Para $n=0$ es trivial. Supongamos que es cierto para los operadores de $\mathcal{O}_{n-1}(V)$ y veamos que es cierto para los de orden n.

Por la linealidad de P, basta demostrar que si $h=0$ en U, entonces $P(h)=0$ en U. Sea $x \in U$ y consideremos una función "badén" en x —ver (1.8), pág.7—, es decir una función φ no negativa, que valga 1 en un entorno de x y 0 fuera de un cerrado de U. Entonces $h\varphi = 0$ en V, por lo que

$$0 = P(\varphi h) = (P \circ \varphi)(h) = [P, \varphi](h) + \varphi \cdot P(h),$$

y como $[P, \varphi]$ es de orden $n-1$ el resultado se concluye. ∎

Definición. Definimos la *restricción* de un ODL P a un abierto $U \subset V$, como el operador

$$P_{|U} : \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U), \qquad P_{|U}(f)(x) = P(\overline{f})(x),$$

para cada $x \in U$ y $\overline{f} \in \mathcal{C}^\infty(V)$ que coincida con f en un entorno de x.

El resultado anterior prueba que $P_{|U}(f)(x) = P(\overline{f})(x)$, no depende de la función $\overline{f}$ elegida.

Lema 8.8 *Para cualquier aplicación $P\colon \mathcal{C}^\infty(V) \to \mathcal{C}^\infty(V)$ y cualesquiera $f_i, g \in \mathcal{C}^\infty(V)$*

$$\begin{aligned}[\dots[[P, f_0], f_1], \dots, f_n](g) = \\ = P(\prod f_i g) - \sum f_i P(\prod_{j\neq i} f_j g) + \\ + \sum_{i<k} f_i f_k P(\prod_{j\neq i,k} f_j g) + \cdots + (-1)^{n+1} f_0 \cdots f_n P(g).\end{aligned}$$

Demostración. Se hace por inducción en n. ∎

Proposición 8.9 *Sea $P \in \mathcal{O}_n(V)$ y $U \subset V$ un abierto, entonces $P_{|U} \in \mathcal{O}_n(U)$.*

Demostración. Utilizando el desarrollo del Lema anterior, tenemos que para cualesquiera funciones f_i y g en U, $x \in U$ y $\overline{f}_i$, $\overline{g}$, funciones en V que coincidan con f_i y g en un entorno de x,

$$[\dots[[P_{|U}, f_0], f_1], \dots, f_n](g)(x) = [\dots[[P, \overline{f}_0], \overline{f}_1], \dots, \overline{f}_n](\overline{g})(x) = 0,$$

y el resultado se sigue pues

$$[\dots[[P_{|U}, f_0], f_1], \dots, f_n] = 0. \quad ∎$$

8.2.3. Expresión en coordenadas de un ODL.

Todo campo tangente es un ODL de orden 1, es decir $\mathcal{D}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{O}_1(\mathcal{V})$, pues si D es un campo, para cualesquiera funciones f, g se tiene

$$[D, f](g) = D(fg) - fDg = (Df)g \qquad \Rightarrow \qquad [D, f] = Df,$$

por tanto en un abierto coordenado V, con coordenadas x_i, las

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{O}_1(V),$$

por tanto las composiciones de $k \leq n$ de estos ODL de orden 1 son ODL de orden n y por tanto el módulo generado por todos ellos y la función 1. A continuación veremos el recíproco de esto.

Expresión en coordenadas de un ODL de primer orden.

Proposición 8.10 *Sea $P \in \mathcal{O}_1(\mathcal{V})$, entonces $Df = [P, f](1)$ es una derivación.*

Demostración. Para cualesquiera funciones f, g, $[P, f](g) = g \cdot [P, f](1)$, pues $[P, f] \in \mathcal{O}_0$, por tanto

$$\begin{aligned} D(gh) &= [P, gh](1) = ([P, g] \circ h + g \circ [P, h])(1) = \\ &= h \cdot Dg + g \cdot Dh, \\ D(a) &= [P, a](1) = 0, \\ D(af_1 + bf_2) &= [P, af_1 + bf_2](1) = a[P, f_1](1) + b[P, f_2](1) \\ &= aDf_1 + bDf_2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 8.11 *Si $P \in \mathcal{O}_1(\mathcal{V})$, entonces existe una única función f y una única derivación D tales que $P = f + D$.*

Demostración. Si existen f y D son únicos, pues $P(1) = f$ y $D = P - P(1)$. Basta demostrar que $D = P - P(1)$ es una derivación. Veamos en primer lugar quien es $D(g)$ para cada función g,

$$D(g) = P(g) - P(1)g = (P \circ g)(1) - (g \circ P)(1) = [P, g](1),$$

y concluimos por el resultado anterior (8.10). $\blacksquare$

Se sigue por tanto que en un abierto coordenado V, un ODL de orden 1, $P \in \mathcal{O}_1$ se escribe de la forma

$$P = f + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

para $f = P(1)$ y $f_i = Dx_i = [P, x_i](1) = P(x_i) - x_i f$.

Expresión en coordenadas de un ODL de segundo orden.

Veamos en primer lugar un par de consecuencias triviales de la fórmula (8.8), pág.616.

$$\begin{aligned} &[\dots[[P, f_0], f_1], \dots, f_n](g) = \\ &\quad = P(\prod f_i g) - \sum f_i P(\prod_{j \neq i} f_j g) + \\ &\qquad + \sum_{i<k} f_i f_k P(\prod_{j \neq i,k} f_j g) + \cdots + (-1)^{n+1} f_0 \cdots f_n P(g). \end{aligned}$$

Proposición 8.12 *(i) Para cualquier aplicación* $P\colon \mathcal{C}^\infty(V) \to \mathcal{C}^\infty(V)$, *cualesquiera* $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(V)$ *y* $x \in V$ *tales que* $f_i(x) = 0$

$$P(\prod_{i=0}^{n} f_i)(x) = [\dots[[P, f_0], f_1], \dots, f_n](1)(x).$$

(ii) Si $P \in \mathcal{O}_n(V)$ *y* $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(V)$ *se anulan en* $x \in V$, *entonces* $P(f_0 \cdots f_n)(x) = 0$.

Veamos ahora la expresión de un operador de orden 2, $P \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$, en el abierto coordenado V.

Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f &= P(1), \\ f_i &= [P, x_i](1) = P(x_i) - x_i f, \\ f_{ij} &= \frac{1}{2}[[P, x_i], x_j](1) = \frac{1}{2}[[P, x_j], x_i], \qquad (= f_{ji} \text{ por } 8.2) \\ &= \frac{1}{2}(P(x_i x_j) - x_i P(x_j) - x_j P(x_i) + x_i x_j f) \quad (\text{por } (8.8)). \end{aligned}$$

Sea $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$ y $a \in V$, entonces por la *Fórmula de Taylor*

$$g = g(a) + \sum_{i=1}^{n} g_i(a)(x_i - a_i) + \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j),$$

$$g_i(a) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(a), \qquad g_{ij}(a) + g_{ji}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i x_j}(a),$$

y aplicando P a ambos lados, llamando $y_i = x_i - a_i$, tendremos

$$P(g) = g(a)P(1) + \sum_{i=1}^{n} g_i(a)P(x_i - a_i) + \sum_{i,j=1}^{n} P(g_{ij} y_i y_j),$$

ahora bien, por la proposición anterior (8.12)

$$P\left((g_{ij} - g_{ij}(a))y_i y_j\right)(a) = 0,$$
$$P(y_i y_j)(a) = [[P, y_i], y_j](a) = [[P, x_i], x_j](a) = 2f_{ij}(a),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
P(g)(a) &= g(a)f(a) + \sum_{i=1}^{n} f_i(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) + \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(a)P(y_iy_j)(a)\\
&= g(a)f(a) + \sum_{i=1}^{n} f_i(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) + 2\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(a)g_{ij}(a)\\
&= g(a)f(a) + \sum_{i=1}^{n} f_i(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) + \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(a)[g_{ij}(a) + g_{ji}(a)]\\
&= g(a)f(a) + \sum_{i=1}^{n} f_i(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) + \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(a)\frac{\partial^2 g}{\partial x_i x_j}(a),
\end{aligned}$$

y eliminando en ambos lados la a y la g tenemos la expresión de P

$$P = f + \sum_{i=1}^{n} f_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}.$$

Ejercicio 8.2.1 Expresa en las coordenadas $u = x + y$, $v = x - y$, los ODL de orden 2 del plano

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + xy.$$

Expresión en coordenadas de un ODL de orden m.

Para un ODL P de orden m se obtiene una expresión similar. Para verlo introducimos la siguiente notación.

Denotaremos los multi–índices con letras griegas $\alpha, \beta, \ldots$ y para cada multi–índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ definimos[1]

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$$
$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

asimismo escribiremos $\alpha \leq \beta$ para denotar las desigualdades componente a componente. Consideremos un sistema de coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_n)$ en un entorno de un punto de $\mathcal{V}$, y denotemos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}, \quad x^1 = x_1\cdots x_n.$$

[1] Aquí entendemos por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Ejercicio 8.2.2 Demostrar que

$$D^\beta x^\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta}, & \text{si } \beta \le \alpha \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

y para todo $a \in \mathcal{V}$

$$D^\beta (x-a)^\alpha(a) = \begin{cases} \alpha!, & \text{si } \beta = \alpha \\ 0, & \text{si } \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

En tales términos se tiene el resultado siguiente.

Teorema 8.13 *Todo operador diferencial lineal $P \in \mathcal{O}_m(\mathcal{V})$ se expresa en un entorno coordenado $(V; x_i)$ de forma única como*

$$P = \sum_{|\beta| \le m} f_\beta D^\beta,$$

con las funciones

$$f_\beta = \frac{1}{\beta!}[\ldots[P, x_1], \overset{\beta_1}{\ldots}], x_1], \ldots,]x_n], \overset{\beta_n}{\ldots}], x_n](1).$$

Por tanto $\mathcal{O}_m(V)$ es un módulo libre con base $\{D^\beta : \beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \le m\}$.

Demostración. Sea $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$ y $a \in V$, entonces por la *fórmula de Taylor* (1.14), pág.13, se tiene como fácilmente puede probar el lector,

$$g = \sum_{|\beta|<m} c_\beta (x-a)^\beta + \sum_{|\alpha|=m} h_\alpha (x-a)^\alpha,$$

donde, como consecuencia del ejercicio anterior y (8.12), para $y_i = x_i - a_i$

$$c_\beta = \frac{1}{\beta!} D^\beta g(a), \quad h_\alpha(a) = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha g(a),$$

$$\begin{aligned} P[(x-a)^\beta](a) &= P(y_1^{\beta_1} \cdots y_n^{\beta_n})(a) \\ &= [\ldots[P, y_1], \overset{\beta_1}{\ldots}, y_1], \ldots], y_n], \overset{\beta_n}{\ldots}], y_n](1)(a) \\ &= [\ldots[P, x_1], \overset{\beta_1}{\ldots}, x_1], \ldots], x_n], \overset{\beta_n}{\ldots}], x_n](1)(a) = \beta! f_\beta(a), \end{aligned}$$

y por otra parte, por (8.12), $P[(h_\alpha - h_\alpha(a))(x-a)^\alpha](a) = 0$, para $|\alpha| = m$, tendremos que

$$\begin{aligned} P(g)(a) &= \sum_{|\beta|<m} c_\beta P[(x-a)^\beta](a) + \sum_{|\alpha|=m} h_\alpha(a) P[(x-a)^\alpha](a) \\ &= \sum_{|\beta| \le m} f_\beta(a) D^\beta g(a) \quad \Rightarrow \quad P = \sum_{|\beta| \le m} f_\beta D^\beta. \end{aligned}$$

Por último la expresión es única, pues si hubiese dos tendríamos que su diferencia $\sum_{|\beta|\leq m} g_\beta D^\beta = 0$ y se sigue del ejercicio que para todo a y todo α, con $|\alpha| \leq m$

$$0 = \sum_{|\beta|\leq m} g_\beta D^\beta((x-a)^\alpha)(a) = \alpha! g_\alpha(a) \quad \Rightarrow \quad g_\alpha(a) = 0. \quad \blacksquare$$

Nota 8.14 Observemos que la definición de las f´s en este caso no es la misma que en el caso anterior aunque aparentemente la expresión del operador sea la misma. La diferencia estriba en que en el caso anterior hemos distinguido entre

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_j x_i},$$

mientras que en el caso general no, ambas son D^β, para $\beta_i = \beta_j = 1$ y $\beta_k = 0$, con $k \neq i, j$.

8.2.4. Caracterización del Operador de LaPlace

Los resultados de este epígrafe nos los contó Juan Sancho de Salas. En él se caracteriza el operador de LaPlace de $\mathbb{R}^n$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

como el único, salvo adición y multiplicación por escalares, invariante por traslaciones y giros. Esto explica que en Física aparezca en las ecuaciones fundamentales de Laplace, de ondas ó del calor, donde las cuestiones que se estudian son invariantes por traslaciones y giros, es decir el espacio es homogéneo, isótropo, igual en todas las direcciones.

Definición. Dado un difeomorfismo $\phi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, definimos las aplicaciones inversas

$$\begin{aligned} \phi^* P = \phi^* \circ P \circ \phi_* \in \mathcal{O}_n(\mathcal{U}), \qquad & \phi^* P(f) = P(f \circ \phi^{-1}) \circ \phi, \\ \phi_* Q = \phi_* \circ Q \circ \phi^* \in \mathcal{O}_n(\mathcal{V}), \qquad & \phi_* Q(f) = Q(f \circ \phi) \circ \phi^{-1}, \end{aligned}$$

para $P \in \mathcal{O}_n(\mathcal{V})$, $Q \in \mathcal{O}_n(\mathcal{U})$, $\phi^*\colon \mathcal{C}^\infty(V) \to \mathcal{C}^\infty(U)$, $\phi^* f = f \circ \phi$ y $\phi_*\colon \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(V)$, $\phi_* g = g \circ \phi^{-1}$.

Se demuestra por inducción que $\phi_* P$ y $\phi^* P$ son ODL, pues por ejemplo para $n = 0$, si $P(f) = gf$, entonces $\phi^* P(h) = (g \circ \phi)h$, por lo que coincide con nuestra definición previa de $\phi^* g$ y se tiene que $\phi^* P(\phi^* f) = \phi^*(Pf)$. Además si es cierto para los de orden $n-1$, también para los de orden n, pues $[P, g]$ es de orden $n - 1$ y

$$[\phi^* P, \phi^* g] = \phi^*[P, g],$$

ya que para toda función $\phi^* h$,

$$\begin{aligned}[\phi^* P, \phi^* g](\phi^* h) &= \phi^* P(\phi^* g \cdot \phi^* h) - \phi^* g \cdot \phi^* P(\phi^* h) \\ &= \phi^* P(\phi^*(g \cdot h)) - \phi^* g \cdot \phi^*(P(h)) \\ &= \phi^*[P(g \cdot h) - g \cdot P(h)] = \phi^*[P, g](\phi^* h).\end{aligned}$$

Además ϕ_* y ϕ^* conmutan con sumas y composiciones.

Definición. Diremos que un ODL P es invariante por un difeomorfismo ϕ si $\phi_* P = P$ (equivalentemente $\phi^* P = P$).

Proposición 8.15 *Un ODL $P = \sum f_\alpha D^\alpha \in \mathcal{O}_k(\mathbb{R}^n)$ es invariante por todas las traslaciones sii las f_α son constantes.*

Demostración. Sea $\phi(x) = x + b$, entonces $\phi_* \partial_{x_i} = \partial_{x_i}$, pues

$$\phi_* \partial_{x_i} x_j = \phi_*(\delta_{ij}) = \delta_{ij} = \partial_{x_i} x_j,$$

por tanto como $\phi_* P = \sum \phi_* f_\alpha D^\alpha = \sum f_\alpha D^\alpha$, tendremos que $\phi_* f_\alpha = f_\alpha$, es decir $f_\alpha(x) = f_\alpha(x + b)$ para todo x y b y f_α es constante. ∎

Proposición 8.16 *Un polinomio $p(x_1, \ldots, x_n)$, en $n \geq 2$ variables, es invariante por giros de centro el origen sii es un polinomio en $r^2 = \sum x_i^2$, $q(r^2) = \sum a_i r^{2i}$.*

Demostración. El polinomio en una variable $t(x) = p(x, 0, \ldots, 0) = \sum b_i x^i$, satisface $t(x) = t(-x)$, pues existe un giro que lleva $(x, 0, \ldots, 0)$ en $(-x, 0, \ldots, 0)$, por tanto $t(x)$ no tiene coeficientes impares y es de la forma $t(x) = q(x^2)$ ahora bien $p(x_1, \ldots, x_n)$ y $q(r^2)$ son polinomios en n variables que coinciden en los puntos de la forma $(x, 0, \ldots, 0)$ y ambos son invariantes por giros, pero $p(x_1, \ldots, x_n) = p(r, 0, \ldots, 0) = q(r^2)$, pues con un giro pasamos de $x = (x_i)$ a $(r, 0, \ldots, 0)$. ∎

Lema 8.17 *Sea $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isomorfismo lineal con matriz A, entonces*

$$\phi^* x_i = \sum a_{ij} x_j, \qquad \phi_* \partial_{x_i} = \sum a_{ji} \partial_{x_j},$$

y si además ϕ es un giro ($A^t A = I$), entonces $A^t = A^{-1}$ y se tiene

$$\phi^* x_i = \sum a_{ij} x_j, \qquad \phi_*^{-1} \partial_{x_i} = \sum a_{ij} \partial_{x_j}.$$

Teorema 8.18 *Todo ODL en $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, que sea invariante por giros (centrados en el origen) y traslaciones es un polinomio $P(\Delta)$ en el operador de Laplace $\Delta = \sum \partial_{x_i x_i}$.*

Demostración. Por (8.15), pág.622, sabemos que los coeficientes f_α, son constantes. Consideremos ahora el isomorfismo de álgebras φ entre los polinomios $p = \sum \lambda_\alpha x^\alpha$ y los ODL de coeficientes constantes $P = \sum \lambda_\alpha D^\alpha$, el cual por el lema anterior cumple para cada giro ϕ

$$\varphi[\phi^* x_i] = \phi_*^{-1}[\varphi(x_i)],$$

pues ambas expresiones valen $\sum a_{ij} \partial_{x_j}$. Por tanto para todo polinomio p

$$\varphi[\phi^* p] = \phi_*^{-1}[\varphi(p)],$$

y p es un polinomio invariante por giros (centrados en el origen) sii $P = \varphi(p)$ es invariante por giros, pero los polinomios invariantes por giros son por (8.16) de la forma $q(r^2) = \sum a_i r^{2i}$ y como $\varphi(r^2) = \Delta$, tendremos que $P = \sum a_i \Delta^i$. ∎

Corolario 8.19 *El operador de Laplace es el único, salvo adición y multiplicación por escalares, ODL de orden 2 en $\mathbb{R}^n$ invariante por giros y traslaciones.*

8.2.5. Derivada de Lie de un ODL

Definición. Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, con grupo uniparamétrico τ_t, llamamos derivada de Lie de un ODL P con D al ODL

$$D^L P = \lim_{t \to 0} \frac{\tau_t^* P - P}{t}.$$

Teorema 8.20 *La derivada de Lie de un ODL P es un ODL y*

$$D^L P = [D, P].$$

Demostración. Para $n = 0$, $D^L f = Df = [D, f]$. Para E un campo tangente $D^L(E) = [D, E]$. Si para dos ODL P, Q es cierto también lo es para $P \circ Q$, pues la derivada conserva la suma y para la composición

$$\begin{aligned} D^L(P \circ Q)f &= \lim_{t\to 0} \frac{\tau_t^*(P \circ Q)f - (P \circ Q)f}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\tau_t^* P(\tau_t^* Qf) - P(Q(f))}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \left(\tau_t^* P\left(\frac{\tau_t^* Q(f) - Q(f)}{t}\right) + \left(\frac{\tau_t^* P - P}{t}\right)(Qf)\right) \\ &= (P \circ D^L Q + D^L P \circ Q)(f), \end{aligned}$$

y como todo ODL localmente es $P = \sum f_\alpha D^\alpha$, el resultado se sigue por las propiedades del corchete de Lie. ∎

8.3. El símbolo de un ODL

Consideremos un ODL $P \in \mathcal{O}_2(U)$ en un sistema de coordenadas (x, y) del abierto U del plano

$$P = a\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + 2b\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} + d\frac{\partial}{\partial x} + e\frac{\partial}{\partial y} + f.$$

Si ahora consideramos un nuevo sistema de coordenadas (u, v) y expresamos P en él

$$P = A\frac{\partial^2}{\partial u \partial u} + 2B\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + C\frac{\partial^2}{\partial v \partial v} + D\frac{\partial}{\partial u} + E\frac{\partial}{\partial v} + F,$$

es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} A &= \frac{[[P,u],u]}{2} = \frac{P(u^2)}{2} - uP(u) + \frac{u^2 f}{2} \\ &= au_x^2 + 2bu_x u_y + cu_y^2, \\ B &= \frac{[[P,u],v]}{2} = \frac{P(uv) - uP(v) - vP(u) + uvf}{2} \\ &= au_x v_x + bu_x v_y + bu_y v_x + cu_y v_y, \\ C &= \frac{[[P,v],v]}{2} = \frac{P(v^2)}{2} - vP(v) + \frac{v^2 f}{2} \\ &= av_x^2 + 2bv_x v_y + cv_y^2, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}$$

y esto a su vez que

$$AC - B^2 = (ac - b^2)(u_x v_y - u_y v_x)^2,$$

y por tanto el signo de $ac - b^2$ coincide con el de $AC - B^2$. Esto nos dice que "*el signo del determinante de la parte cuadrática*" es intrínseco (invariante por difeomorfismos).

A continuación damos un paso en la explicación del por qué de ese "signo canónico".

Proposición 8.21 *Dado $P \in \mathcal{O}_n(\mathcal{V})$ existe un único tensor simétrico $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_0^n(\mathcal{V})$ tal que para cualesquiera $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$*

$$\mathbf{T}(df_1, \ldots, df_n) = \frac{1}{n!}[\ldots[[P, f_1], f_2], \ldots, f_n],$$

Además la aplicación que define $P \in \mathcal{O}_n(\mathcal{V}) \to \mathbf{T} \in \mathcal{T}_0^n(\mathcal{V})$ es un morfismo de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$–módulos.

Demostración. Dado $x \in \mathcal{V}$ y $\omega_{1x}, \ldots, \omega_{nx} \in T_x^*(\mathcal{V})$, definimos

$$\mathbf{T}_x(\omega_{1x}, \ldots, \omega_{nx}) = \frac{1}{n!}[\ldots[[P, f_1], f_2], \ldots, f_n](x),$$

para $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, tales que $d_x f_i = \omega_{ix}$. Que el lado derecho de la igualdad no depende de los representantes elegidos es consecuencia

de (8.10) y de (8.2). Que $\mathbf{T}_x$ es lineal en cada componente se sigue de (8.10) y de (8.2). Que es simétrico se sigue de (8.2) y por último la diferenciabilidad se sigue de que en un abierto coordenado V

$$\mathbf{T}_x(d_x x_{i_1}, \dots, d_x x_{i_n}) = \frac{1}{n!}[\dots[[P, x_{i_1}], x_{i_2}], \dots, x_{i_n}](x),$$

es una función diferenciable de V. ∎

Definición. Llamaremos el *símbolo* de un operador diferencial lineal P, al tensor simétrico $\mathbf{T}$ del resultado anterior.

Veremos que, en el caso de que $\dim \mathcal{V} = n = 2$, el signo $(> 0, = 0, < 0)$ al que hacíamos referencia en el párrafo anterior está relacionado, con el número 0, 1, ó 2, de 1-formas independientes *isótropas* respecto del tensor, es decir que satisfacen $\mathbf{T}(\omega, \omega) = 0$.

Consideremos la EDP en un abierto U de $\mathbb{R}^2$, de segundo orden y lineal en z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy} y z_{yy},

$$az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + dz_x + ez_y + fz = 0, \tag{8.1}$$

donde a, b, c, d, e, f son funciones de U. Esta ecuación define el ODL de orden 2, $P \in \mathcal{O}_2(U)$

$$P = a\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + 2b\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} + d\frac{\partial}{\partial x} + e\frac{\partial}{\partial y} + f,$$

cuyo símbolo es el tensor simétrico $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_0^2(U)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \mathbf{T}(dx, dx)\frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{T}(dx, dy)\frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} + \\
&\quad + \mathbf{T}(dy, dx)\frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{T}(dy, dy)\frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y} = \\
&= \frac{[[P, x], x]}{2}\frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + \frac{[[P, x], y]}{2}\frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} + \\
&\quad + \frac{[[P, y], x]}{2}\frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + \frac{[[P, y], y]}{2}\frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y} = \\
&= a\frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} + b\frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + c\frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y},
\end{aligned}$$

es decir que los coeficientes del símbolo de un ODL de orden 2, en un sistema de coordenadas, son los coeficientes de la "*parte cuadrática del*

ODL" en ese sistema de coordenadas,

$$a\frac{\partial^2}{\partial x\partial x}+b\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+b\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}+c\frac{\partial^2}{\partial y\partial y},$$

y esto aunque la "parte cuadrática" del ODL no es intrínseca, depende de las coordenadas, es decir que lo que es "parte cuadrática" del ODL en un sistema de coordenadas, se convierte en la "parte cuadrática" y en "términos lineales" en unas nuevas coordenadas.

Esto nos permite dar un primer paso en el problema de la clasificación local de los ODL, clasificando su símbolo, que sí es intrínseco.

8.4. ODL de orden 2 en $\mathbb{R}^2$. Clasificación

Definición. Sea $T\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathbb{R}$ un tensor simétrico en un espacio vectorial real.

Recordemos que $e\in\mathcal{E}$ es *isótropo* si $T(e,e)=0$ y que $e\in\mathcal{E}$ está en el *radical* de T si $T(e,v)=0$, para todo $v\in\mathcal{E}$.

Si $\mathcal{E}$ es bidimensional decimos que T es *elíptico* si no tiene vectores isótropos, *parabólico* si tiene sólo un vector isótropo (y sus proporcionales) y por tanto T tiene radical, e *hiperbólico* si tiene dos vectores isótropos independientes.

Ejercicio 8.4.1 Sea $T\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathbb{R}$ un tensor simétrico en un espacio vectorial real bidimensional. Demostrar que si $e_1,e_2\in\mathcal{E}$ es una base y

$$T(e_1,e_1)=a,\qquad T(e_1,e_2)=b,\qquad T(e_2,e_2)=c,$$

entonces T es elíptico, parabólico ó hiperbólico si y sólo si respectivamente

$$ac-b^2>0,\qquad ac-b^2=0,\qquad ac-b^2<0.$$

Definición. Diremos que un ODL $P\in\mathcal{O}_2(\mathcal{V})$, con símbolo $\mathbf{T}$, en una variedad bidimensional $\mathcal{V}$, es de *tipo elíptico, hiperbólico ó parabólico* en un punto $x\in\mathcal{V}$, si lo es $\mathbf{T}_x$. Diremos que lo es en una región si lo es en cada punto de la región.

8.4.1. Operadores diferenciales lineales hiperbólicos.

Sea $P \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$ un ODL hiperbólico en una variedad diferenciable bidimensional $\mathcal{V}$. Se sigue que en cualquier sistema de coordenadas P se expresa localmente de la forma

$$P = a\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + 2b\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} + d\frac{\partial}{\partial x} + e\frac{\partial}{\partial y} + f,$$

donde

$$ac - b^2 < 0.$$

Proposición 8.22 *Dado un ODL hiperbólico $P \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$ en una variedad diferenciable bidimensional $\mathcal{V}$, localmente existe un sistema de coordenadas (u, v) en el que*

$$P = 2B\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + P_1, \qquad \textit{(para } P_1 \in \mathcal{O}_1\textit{)}.$$

Demostración. Basta demostrar que su símbolo se expresa de la forma

$$\mathbf{T} = B\left(\frac{\partial}{\partial u} \otimes \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \otimes \frac{\partial}{\partial u}\right).$$

Como $\mathbf{T}$ es hiperbólico podemos encontrar $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(U)$ independientes e isótropas

$$\mathbf{T}(\omega_1, \omega_1) = \mathbf{T}(\omega_2, \omega_2) = 0,$$

ahora bien si D_i es incidente con ω_i y no singular, aplicando el teorema del flujo podemos encontrar coordenadas (u_i, v_i) en las que $D_i = \partial u_i$ y por tanto ω_i es proporcional a dv_i, por lo que dv_1, dv_2 son independientes y (v_1, v_2) forman un sistema de coordenadas en el que

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(dv_1, dv_2)\left(\frac{\partial}{\partial v_1} \otimes \frac{\partial}{\partial v_2} + \frac{\partial}{\partial v_2} \otimes \frac{\partial}{\partial v_1}\right). \quad \blacksquare$$

Definición. A los campos D_1 y D_2 del resultado anterior se les llama *campos característicos* y a sus curvas integrales $v_1 = cte$, $v_2 = cte$, *curvas características*. Son las curvas integrales de los sistemas de Pfaff canónicos $< \omega_1 >$ y $< \omega_2 >$ ó de sus distribuciones asociadas $< D_1 >$ y $< D_2 >$.

Ejercicio 8.4.2 Consideremos la EDP de ondas

$$k^2 z_{xx} - z_{tt} = 0,$$

definir el ODL asociado, su símbolo, decir de que tipo es, reducirla a forma canónica y resolverla. (a) Encontrar la solución que satisface las condiciones, para $x \in \mathbb{R}$

$$z(x,0) = h(x), \quad z_t(x,0) = g(x),$$

y demostrar que es única.

(b) Demostrar que si z es solución y se anula en el infinito de x, uniformemente en t (i.e. $\forall \epsilon > 0$, $\exists M > 0$: si $|x| \geq M$, $|z(x,t)| \leq \epsilon$), entonces $z = 0$.

Ejercicio 8.4.3 Consideremos la EDP

$$y z_{xx} - x z_{yy} - \frac{y}{2x} z_x + \frac{x}{2y} z_y = 0,$$

definir el ODL asociado, su símbolo, decir en que región es de tipo hiperbólico y resolverla, si es posible, reduciéndola antes a forma canónica. Decir cuales son sus curvas características.

Ejercicio 8.4.4 Consideremos las EDP

$$\begin{aligned} y^2 z_{xx} - z_{yy} &= 0, \\ y^2 z_{xx} + 2 z_{xy} + z_{yy} - z_x &= 0, \\ x z_{xx} + 2 z_{xy} - x z_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

decir en qué región son hiperbólicas, resolverlas si es posible, reduciéndolas antes a forma canónica y decir cuales son sus curvas características.

8.4.2. Operadores diferenciales lineales parabólicos.

Consideremos ahora el caso en que P es parabólico. Se sigue que en cualquier sistema de coordenadas se expresa de la forma

$$P = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f,$$

donde

$$ac - b^2 = 0,$$

en cuyo caso la 1–forma isótropa única es proporcional a $dy + \lambda dx$, tal que

$$0 = T(dy + \lambda dx, dy + \lambda dx) = a\lambda^2 + 2b\lambda + c,$$

cuyas solución es $\lambda = -b/c$ y la 1–forma isótropa es

$$\omega = bdx - cdy,$$

la cual tiene como campo incidente

$$b\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{proporcional a} \quad c\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y},$$

pues $ac - b^2 = 0$.

Proposición 8.23 *Dado un ODL parabólico $P \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$ en una variedad diferenciable bidimensional $\mathcal{V}$, localmente existe un sistema de coordenadas (u, v) en el que*

$$P = A\frac{\partial^2}{\partial u^2} + P_1, \qquad (\textit{para } P_1 \in \mathcal{O}_1).$$

Demostración. Basta demostrar que su símbolo se expresa de la forma

$$\mathbf{T} = A\frac{\partial}{\partial u} \otimes \frac{\partial}{\partial u}.$$

Como $\mathbf{T}$ es parabólico tiene una única 1–forma isótropa $\omega \in \Omega(U)$, que además está en el radical, es decir que para toda $\theta \in \Omega$

$$\mathbf{T}(\omega, \theta) = 0,$$

pues en caso contrario tendríamos dos soluciones isótropas

$$0 = T(\omega + \lambda\theta, \omega + \lambda\theta) = 2\lambda\mathbf{T}(\omega, \theta) + \lambda^2\mathbf{T}(\theta, \theta).$$

Ahora si D es un campo incidente con ω y no singular, tendremos que existe un sistema de coordenadas (u, v) en el que $D = \partial u$ y

$$\omega = \omega(D)du + \omega(\frac{\partial}{\partial v})dv = \omega(\frac{\partial}{\partial v})dv \quad \Rightarrow \quad \omega(\frac{\partial}{\partial v}) \neq 0,$$

por tanto dv está en el radical y du no es isótropo y se sigue que

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(du, du)\frac{\partial}{\partial u} \otimes \frac{\partial}{\partial u}. \quad \blacksquare$$

Definición. Al campo D se le llama *característico* y a sus curvas integrales $v = cte$, *curvas características*. Como antes son las curvas integrales del sistema de Pfaff canónico $< \omega >$ ó de su distribución asociada $< D >$.

Ejercicio 8.4.5 Consideremos la EDP

$$x^2 z_{xx} - 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} + 2xz_x = 0,$$

decir en qué región es parabólica, resolverla, si es posible, reduciéndola antes a forma canónica y decir cuales son sus curvas características.

Ejercicio 8.4.6 Consideremos las EDP

$$\begin{aligned} z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} &= 0, \\ x^2 z_{xx} - 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} &= 0, \\ x^2 z_{xx} + 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

decir en qué región son parabólicas, resolverlas si es posible, reduciéndolas antes a forma canónica y decir cuales son sus curvas características.

8.4.3. Campos y 1–formas complejas.

Hemos dejado la clasificación de los operadores diferenciales lineales elípticos para el final pues son los más difíciles y necesitamos dar algunas definiciones previas.

Definición. Dada una variedad diferenciable $\mathcal{V}$ denotaremos con $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$ el álgebra de las funciones complejas

$$f = f_1 + if_2 : \mathcal{V} \to \mathbb{C},$$

con $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$.

Para cada $x \in \mathcal{V}$ definimos la *complejización* del espacio tangente a $\mathcal{V}$ en x como el $\mathbb{C}$–espacio vectorial de las derivaciones $\mathbb{C}$–lineales en x

$$D_x : \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}) \to \mathbb{C},$$

y lo denotaremos con $T^{\mathbb{C}}_x(\mathcal{V})$.

Para cada $x \in \mathcal{V}$ definimos la *complejización* del espacio cotangente a $\mathcal{V}$ en x como el $\mathbb{C}$–espacio vectorial $T^{\mathbb{C}}_x(\mathcal{V})^*$, dual de $T^{\mathbb{C}}_x(\mathcal{V})$.

Definimos la *complejización* de los campos tangentes de $\mathcal{V}$ como el $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$–módulo $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$, de las derivaciones $\mathbb{C}$–lineales

$$D : \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}) \to \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}).$$

Definimos la *complejización* de las 1–formas como el $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$–módulo $\Omega_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$, dual de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$, es decir de las

$$\omega : \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}) \to \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}),$$

$\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$–lineales. Definimos la *diferencial* de $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$, como la 1–forma $df \in \Omega_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$

$$df : \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}) \to \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}), \qquad df(D) = Df.$$

Ejercicio 8.4.7 i) Demostrar que toda derivación real $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ define una compleja

$$D : \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}) \to \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}), \qquad D(f_1 + if_2) = Df_1 + iDf_2.$$

ii) Que si $D \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$, existen únicos $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, tales que $D = D_1 + iD_2$.

iii) Que si $D_1, \ldots, D_k \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ son independientes, siguen siéndolo en $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$ como derivaciones complejas y si k es par también lo son $E_1 = D_1 + iD_2$, $E_2 = D_1 - iD_2$, $E_3 = D_3 + iD_4$, $E_4 = D_3 - iD_4$,...

iv) Que si $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, es un sistema de coordenadas,

$$\frac{\partial}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$$

es base.

Ejercicio 8.4.8 i) Demostrar que toda 1–forma real $\omega \in \Omega(\mathcal{V})$ define una compleja

$$\omega : \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}) \to \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}), \qquad \omega(D_1 + iD_2) = \omega(D_1) + i\omega(D_2).$$

ii) Que si $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$, existen únicas $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(\mathcal{V})$, tales que $\omega = \omega_1 + i\omega_2$.

iii) Que si $f = f_1 + if_2$, con $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, entonces $df = df_1 + idf_2$.

iv) Que si $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega(\mathcal{V})$, son independientes, también lo son en $\Omega_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$, y si k es par también lo son $\theta_1 = \omega_1 + i\omega_2$, $\theta_2 = \omega_1 - i\omega_2$, $\theta_3 = \omega_3 + i\omega_4$, $\theta_4 = \omega_3 - i\omega_4$,...

v) Que si $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, es un sistema de coordenadas,

$$du_1, \ldots, du_n \in \Omega_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$$

es base.

Dejamos al lector las definiciones de complejización de campos tensoriales, sus productos tensoriales, etc. En particular tenemos que dada una p–forma compleja $\omega \in \Lambda^p_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$, existen únicas $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^p(\mathcal{V})$, tales que $\omega = \omega_1 + i\omega_2$.

Definición. Definimos la *diferencial* de la p–forma compleja $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ como

$$d\omega = d\omega_1 + id\omega_2.$$

El producto exterior de p–formas se define como en el caso real y se tiene

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta &= (\omega_1 + i\omega_2) \wedge (\eta_1 + i\eta_2)\\ &= \omega_1 \wedge \eta_1 - \omega_2 \wedge \eta_2 + i(\omega_1 \wedge \eta_2 + \omega_2 \wedge \eta_1).\end{aligned}$$

Dada una subvariedad orientada p–dimensional $C \subset U$, definimos la *integral* de una p–forma compleja $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ a lo largo de C como

$$\int_C \omega = \int_C \omega_1 + i \int_C \omega_2.$$

Se sigue fácilmente que para las formas complejas también es válido el **Teorema de Stokes**, (14.12), pág.988.

Caso bidimensional. Consideremos ahora el caso particular en que $\mathcal{V} = U$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$, y $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^\infty(U)$, entonces

$$u = u_1 + iu_2, \qquad \overline{u} = u_1 - iu_2,$$

son funciones de $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U)$. Además tenemos que

$$u_1 = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\overline{u}, \qquad u_2 = \frac{-i}{2}u + \frac{i}{2}\overline{u}.$$

Ahora (u_1, u_2) son coordenadas en U si y sólo si du_1, du_2 son base de $\Omega(U)$, y por tanto de $\Omega_{\mathbb{C}}(U)$, lo cual equivale a que también lo son

$$du = du_1 + idu_2, \qquad d\overline{u} = du_1 - idu_2,$$

en cuyo caso podemos definir los campos complejos

$$\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial \overline{u}} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U),$$

como la base dual de $du, d\overline{u}$, para la que se tiene

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial u_1}{\partial u} = \dfrac{1}{2}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial u} = \dfrac{-i}{2} & \Rightarrow & \dfrac{\partial}{\partial u} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial u_1} - \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial \overline{u}} = \dfrac{1}{2}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial \overline{u}} = \dfrac{i}{2}, & & \dfrac{\partial}{\partial \overline{u}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial u_1} + \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial}{\partial u_2}. \end{array}$$

Ejercicio 8.4.9 Demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial u} \otimes \frac{\partial}{\partial \overline{u}} + \frac{\partial}{\partial \overline{u}} \otimes \frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u_1} \otimes \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2} \otimes \frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Ejercicio 8.4.10 Consideremos las coordenadas (x, y) en el abierto U de $\mathbb{R}^2$ y sean $z = x + iy$ y $\overline{z} = x - iy$. Demostrar que para cada $f = u + iv \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U)$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{array}$$

A las ecuaciones de la derecha del ejercicio anterior se las conoce como **Ecuaciones de Cauchy–Riemann** y caracterizan a las funciones *holomorfas ó analíticas de variable compleja*, entendiendo la identificación natural entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$, $(x, y) \to z = x + iy$. (Ver la lección (9.4), pág.698).

Como consecuencia del Teorema de Stokes y lo anterior se tiene el siguiente resultado fundamental en Teoría de variable compleja.

Teorema de Cauchy 8.24 *Dada una función holomorfa $f = u + iv$ y una curva S, borde de una variedad con borde $C \subset \mathbb{R}^2$, se verifica*

$$\int_S f(z)dz = 0.$$

Demostración. $\omega = f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = udx - vdy + i(vdx + udy)$ es una 1–forma compleja cerrada, pues

$$d\omega = (-u_y - v_x + i(u_x - v_y)dx \wedge dy = 0,$$

por tanto se sigue del Teorema de Stokes (14.12), pág.988, que

$$\int_S f(z)dz = \int_S \omega = \int_C d\omega = 0. \quad \blacksquare$$

8.4.4. Operadores diferenciales lineales elípticos.

Consideremos ahora el caso en que P es elíptico. Se sigue que en cualquier sistema de coordenadas se expresa de la forma

$$P = a\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + 2b\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} + d\frac{\partial}{\partial x} + e\frac{\partial}{\partial y} + f,$$

donde

$$ac - b^2 > 0,$$

y nos planteamos si habrá algún sistema de coordenadas (u_1, u_2) en el que

$$P = A\left(\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial u_2}\right) + P_1, \qquad (\text{para } P_1 \in \mathcal{O}_1)$$

ó equivalentemente su símbolo se exprese de la forma

$$\mathbf{T} = A\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\otimes\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{\partial}{\partial u_2}\otimes\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Analizaremos esta cuestión desde tres puntos de vista:

Punto de vista de puro cálculo. Buscamos un sistema de coordenadas (u_1, u_2) en el que

$$\begin{aligned} T(du_1, du_1) &= au_{1x}^2 + 2bu_{1x}u_{1y} + cu_{1y}^2 \\ &= T(du_2, du_2) = au_{2x}^2 + 2bu_{2x}u_{2y} + cu_{2y}^2, \\ T(du_1, du_2) &= au_{1x}u_{2x} + bu_{1x}u_{2y} + bu_{1y}u_{2x} + cu_{1y}u_{2y} = 0, \end{aligned}$$

lo cual equivale a que

$$a(u_{1x}+iu_{2x})^2 + 2b(u_{1x}+iu_{2x})(u_{1y}+iu_{2y}) + c(u_{1y}+iu_{2y})^2 = 0,$$

que a su vez se satisface si

$$\frac{u_{1y}+iu_{2y}}{u_{1x}+iu_{2x}} = -\frac{b-i\sqrt{ac-b^2}}{c},$$

la cual multiplicada por $u_{1x}+iu_{2x}$ y separando la parte real de la imaginaria equivale al sistema lineal de EDP

$$\begin{aligned} u_{1y} &= -\frac{b}{c}u_{1x} - \frac{\sqrt{ac-b^2}}{c}u_{2x}, \\ u_{2y} &= -\frac{b}{c}u_{2x} + \frac{\sqrt{ac-b^2}}{c}u_{1x}, \end{aligned}$$

el cual si tiene solución u_1, u_2 con u_{1x} ó u_{2x} no nulas en un punto, entonces son sistema de coordenadas en un entorno de ese punto, pues

$$u_{1x}u_{2y} - u_{2x}u_{1y} = \frac{\sqrt{ac-b^2}}{c}(u_{1x}^2 + u_{2x}^2)$$

y la existencia de solución, para el caso particular en que las funciones a, b, c sean funciones analíticas reales, es una consecuencia del **Teorema de Cauchy–Kowalevski** que demostraremos en el siguiente tema.

El mismo sistema, multiplicando primero la primera ecuación por $\sqrt{ac-b^2}$ y la segunda por b y después la primera por $-b$ y la segunda

por $\sqrt{ac-b^2}$, se puede expresar en la siguiente forma conocida como *ecuaciones de Beltrami*

$$u_{1x} = \frac{cu_{2y} + bu_{2x}}{\sqrt{ac-b^2}}, \qquad u_{1y} = -\frac{au_{2x} + bu_{2y}}{\sqrt{ac-b^2}},$$

y a su vez derivando la primera respecto de y y la segunda de x se transforma en la EDP de segundo orden en u_2

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{au_{2x} + bu_{2y}}{\sqrt{ac-b^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{cu_{2y} + bu_{2x}}{\sqrt{ac-b^2}} = 0,$$

la cual aunque no es más fácil de resolver que la inicial se puede demostrar (ver Garabedian, pág. 67), que en condiciones bastante generales para $a, b, c \in \mathcal{C}^\infty$, tiene solución global que permite resolver las *ecuaciones de Beltrami*. No obstante se pueden encontrar soluciones locales por el método de las aproximaciones sucesivas (ver Courant,R. and Hilbert, D., pág. 350 y Garabedian, pp. 168–172).

Punto de vista Geométrico. Como $\mathbf{T}$ es elíptico, o bien $\mathbf{T}(\omega,\omega) > 0$, para toda ω no nula, o bien $\mathbf{T}(\omega,\omega) < 0$, pues si existen ω, η no nulas tales que $\mathbf{T}(\omega,\omega) > 0$ y $\mathbf{T}(\eta,\eta) < 0$, basta considerar para cada x la función continua en $t \in [0,1]$,

$$f(t) = \mathbf{T}_x(t\omega_x + (1-t)\eta_x, t\omega_x + (1-t)\eta_x),$$

que verifica $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$, por tanto que se anula en un punto t intermedio, por lo que $t\omega_x + (1-t)\eta_x = 0$, pues T_x no tiene vectores isótropos, por tanto ω y η son proporcionales, $\omega = g\eta$, y $\mathbf{T}(\omega,\omega) = g^2\mathbf{T}(\eta,\eta)$, lo cual es absurdo.

Tenemos entonces un isomorfismo entre los campos y las 1–formas definido por

$$\begin{aligned}
&\gamma\colon \Omega \to \mathcal{T}_0^1 \simeq \mathcal{D},\\
&\quad \omega \to \gamma(\omega) = \mathbf{T}(\omega,\cdot),\\
&\quad dx \to \mathbf{T}(dx,dx)\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{T}(dx,dy)\frac{\partial}{\partial y} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y},\\
&\quad dy \to \mathbf{T}(dy,dx)\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{T}(dy,dy)\frac{\partial}{\partial y} = b\frac{\partial}{\partial x} + c\frac{\partial}{\partial y},
\end{aligned}$$

y a través de este isomorfismo, $\mathbf{T}$ define una métrica Riemanniana g en U,

$$g(D_1, D_2) = \mathbf{T}(\gamma^{-1}D_1, \gamma^{-1}D_2) = \gamma^{-1}D_2(D_1),$$

cuya matriz asociada es la inversa de la de $\mathbf{T}$.

Ahora bien es conocido en geometría diferencial, que toda métrica Riemanniana en un abierto del plano puede multiplicarse por una función f de tal manera que fg sea euclídea, es decir que existe un sistema de coordenadas (u, v) en el que

$$fg = du \otimes du + dv \otimes dv,$$

por tanto en ese mismo sistema de coordenadas $\mathbf{T}/f$ tiene la forma deseada, (remitimos al lector al libro de Spivak, Vol.IV, p.460 y Vol.V, p.77).

Punto de vista de complejización del símbolo. En el caso elíptico nuestro símbolo $\mathbf{T}$ también tiene dos 1–formas isótropas independientes, que son complejas y podemos calcular

$$\mathbf{T}(dx + \lambda dy, dx + \lambda dy) = a + 2b\lambda + c\lambda^2 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$\lambda = \frac{-b + i\sqrt{ac - b^2}}{c}, \quad \overline{\lambda} = \frac{-b - i\sqrt{ac - b^2}}{c},$$

por tanto nuestras 1–formas isótropas son

$$\omega = dx + \lambda dy, \qquad \overline{\omega} = dx + \overline{\lambda} dy.$$

Ahora bien nos interesa saber si existen funciones complejas $h, u \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U)$, tales que

$$\omega = h du, \tag{8.2}$$

pues en tal caso $\overline{\omega} = \overline{h} d\overline{u}$, siendo $du, d\overline{u}$ independientes y para $u = u_1 + iu_2$ tendríamos que (u_1, u_2) es un sistema de coordenadas en el que

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}(du, d\overline{u}) \left[\frac{\partial}{\partial u} \otimes \frac{\partial}{\partial \overline{u}} + \frac{\partial}{\partial \overline{u}} \otimes \frac{\partial}{\partial u} \right] \\ &= \frac{\mathbf{T}(du_1, du_1) + \mathbf{T}(du_2, du_2)}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \otimes \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2} \otimes \frac{\partial}{\partial u_2} \right), \end{aligned}$$

y el resultado estaría demostrado.

Ahora bien (8.2) equivale a que las 1–formas $dx + \lambda dy$ y $du = u_x dx + u_y dy$, sean proporcionales, es decir que

$$\frac{u_{1y} + iu_{2y}}{u_{1x} + iu_{2x}} = \frac{u_y}{u_x} = -\frac{b - i\sqrt{ac - b^2}}{c},$$

que es a lo que llegamos en el primer punto de vista.

El operador de Laplace–Beltrami

Por último veremos en (14.8.2), pág.1004, que toda variedad Riemanniana $(\mathcal{V}, g)$, n–dimensional y orientada tiene un ODL de segundo orden intrínseco, llamado el Operador de Laplace–Beltrami definido de la siguiente manera.

Definición. Para cada $k = 0, \dots, n$, llamamos *operador * de Hodge* al morfismo

$$*\colon \Lambda_k(\mathcal{V}) \to \Lambda_{n-k}(\mathcal{V}),$$

tal que para cada $\alpha \in \Lambda_k$ y $D_{k+1}, \dots, D_n \in \mathcal{D}$,

$$*\alpha(D_{k+1}, \dots, D_n)\Omega = \alpha \wedge i_{D_{k+1}} g \wedge \cdots \wedge i_{D_n} g,$$

donde Ω es la n–forma de volumen.

Se demuestra que $*$ es un isomorfismo y su inversa es $(-1)^{k(n-k)}*$, es decir que $*^{-1} = *$ cuando n es impar ó n y k son pares y $*^{-1} = -*$ sólo si n es par y k impar.

Definición. Para cada $k = 0, \dots, n$, llamamos *codiferencial exterior* al morfismo

$$\delta\colon \Lambda_k(\mathcal{V}) \to \Lambda_{k-1}(\mathcal{V}),$$
$$\delta = (-1)^{n+k+1} *^{-1} \circ d \circ * = (-1)^{k(n-k)+n+k+1} * \circ d \circ *,$$

y *operador de Laplace–Beltrami* a

$$\Delta = -(\delta \circ d + d \circ \delta)\colon \Lambda_k(\mathcal{V}) \to \Lambda_k(\mathcal{V}).$$

Para $k = 0$ tenemos que

$$\Delta = -\delta \circ d = * \circ d \circ * \circ d\colon \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}),$$

es un ODL de orden 2, $\Delta \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$, definido, en términos de unas coordenadas x_i, por[2]

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right),$$

donde g_{ij} son los coeficientes de la métrica g en esas coordenadas, g^{ij} son los términos de su matriz inversa y $g = \det(g_{ij})$.

En estos términos se tiene el siguiente resultado.

[2]Remitimos al lector interesado al Godbillon, p.229, Gockeler and Schucker, p. 35, y Egorov–Shubin, p.15).

Teorema 8.25 *Todo ODL elíptico $P \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$, en una variedad diferenciable, bidimensional y orientada descompone de forma canónica como una suma*

$$P = \Delta + D + f,$$

donde $\Delta \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$, $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, además para cada $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ no nula, la descomposición de hP es

$$hP = h\Delta + hD + hf.$$

Demostración. Todo ODL elíptico define un tensor, su símbolo, el cual define una métrica, que a su vez define un operador de Laplace–Beltrami,

$$P \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V}) \quad \to \quad \mathbf{T} \in \mathcal{T}_0^2(\mathcal{V}) \quad \to \quad g \in \mathcal{T}_2^0(\mathcal{V}) \quad \to \quad \Delta \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V}),$$

cuyo símbolo también es $\mathbf{T}$, por lo tanto $P - \Delta$ es un ODL de orden 1 y por lo tanto tenemos la descomposición canónica

$$P = \Delta + D + f,$$

donde $f = P(1)$ y $D = P - \Delta - f$ es un campo tangente.

Además si multiplicamos nuestro ODL por una función $h \neq 0$, $\overline{P} = hP$, su símbolo quedará multiplicado por ella, $\overline{\mathbf{T}} = h\mathbf{T}$, en cuyo caso la métrica queda dividida por h, $\overline{g} = g/h$, y el operador de Laplace–Beltrami correspondiente a esta nueva métrica es

$$\overline{\Delta} = h\Delta,$$

por lo que la descomposición canónica de hP es

$$hP = h\Delta + hD + hf. \quad \blacksquare$$

8.5. ODL de orden 2 en $\mathbb{R}^n$. Clasificación

En el caso n–dimensional no es posible encontrar un sistema de coordenadas en el que un ODL de segundo orden se exprese de forma simple

en un entorno de un punto, sin embargo sí se puede hacer que en un punto determinado sea simple, en particular en toda la variedad si los coeficientes son constantes en algun sistema de coordenadas (aunque esto no sea intrínseco).

Observemos que si nuestro operador P, define un símbolo que en un sistema de coordenadas se expresa de la forma

$$\mathbf{T} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j},$$

en otro sistema de coordenadas (u_i) se expresará

$$\mathbf{T} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial}{\partial u_i} \otimes \frac{\partial}{\partial u_j},$$

$$A_{kl} = \mathbf{T}(du_k, du_l) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j},$$

y con nuestras n funciones u_i, mas la posibilidad de multiplicar el operador por una función, no podemos esperar imponer mas que $n+1$ condiciones sobre los $n(n+1)/2$ coeficientes A_{ij}, con $i \geq j$. Observemos que sólo para $n = 2$ ambos números coinciden, por tanto para $n \geq 3$ ya no tenemos suficientes grados de libertad para obtener unas funciones A_{ij} simples. Sin embargo, como decíamos al principio, podemos conseguir que en un punto determinado $p \in \mathcal{V}$ las $A_{ij}(p)$ sean sencillas, pues sabemos por un resultado de álgebra lineal que para todo tensor simétrico, como nuestro $\mathbf{T}_p$, existe una base $\omega_{ip} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} d_p x_j$, cuya matriz asociada tiene términos

$$A_{ii}(p) = 1, \quad = -1 \quad \text{ó} \quad = 0 \quad \text{y para } i \neq j \quad A_{ij}(p) = 0,$$

siendo intrínseco[3] el número m de $A_{ii}(p) = 1$, k de $A_{ii}(p) = -1$ y $r = n - m - k$ de $A_{ii}(p) = 0$. Además es fácil conocer estos números

[3] Si $T\colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ es un tensor simétrico en un espacio vectorial real de dimensión n la base elegida corresponde a una ruptura de $\mathcal{E} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ en suma directa ortogonal de $\mathcal{R}$, el radical de T, de dimensión r y que corresponde a los términos nulos de la diagonal y de otra parte $\mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ en la que T no tiene radical, la cual a su vez rompe en $\mathcal{H}$ que es suma ortogonal de planos hiperbólicos (corresponde a las parejas de 1's y -1's), la cual contiene un subespacio totalmente isótropo de dimensión mín$\{m, k\}$, y de un espacio $\mathcal{V}$ en el que T es definido positivo ó negativo y corresponde al resto de 1's ó -1's.

pues cuando A_{ij} es diagonal, los valores A_{ii} difieren de los autovalores de (a_{ij}) sólo en factores positivos.

Definición. Diremos que un ODL $P \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$, en una variedad n–dimensional, es *elíptico* en un punto $p \in \mathcal{V}$ si para $\mathbf{T}_p$ se tiene que $m = n$ ó $k = n$, *parabólico* si $m + k < n$ e *hiperbólico* si $m = n - 1$ y $k = 1$ ó $m = 1$ y $k = n - 1$.

Como consecuencia del resultado citado se tiene el siguiente.

Teorema 8.26 *Si en un sistema de coordenadas x_i las funciones a_{ij} de nuestro ODL P son constantes, existe un sistema de coordenadas lineales en las x_i*

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j,$$

en el que nuestro ODL se expresa de la forma

$$P = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial u_i} + f,$$

donde los $\epsilon_i = 1, -1$ ó $= 0$. Si el resto de los coeficientes de nuestro ODL también son constantes en el primer sistema, también lo serán en el nuevo.

Demostración. Hágase como ejercicio. ∎

Consideremos que nuestro ODL en un sistema de coordenadas x_i tiene todos los coeficientes constantes, en tal caso en el sistema u_i del teorema

$$P = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial u_i} + c,$$

con los $b_i, c \in \mathbb{R}$ y la EDP $Pu = 0$ la podemos simplificar, en el caso $m + k = n$, es decir que todos los $\epsilon_i = \pm 1$, definiendo la función

$$u = v \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i b_i u_i \right\},$$

para la que

$$P(u) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i b_i u_i \right\} \left[\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \frac{\partial^2 v}{\partial u_i^2} + \left(c - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i b_i^2 \right) v \right],$$

y por lo tanto se tiene el siguiente resultado.

Teorema 8.27 *Toda ecuación $P(u) = f$ definida por un ODL P, no–parabólico, con coeficientes constantes en algún sistema de coordenadas, puede reducirse a una ecuación del tipo*

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \frac{\partial^2 v}{\partial u_i^2} + \lambda v = fg,$$

donde g es una función conocida, $\epsilon_i = \pm 1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 8.5.1 Reducir una EDP de tipo hiperbólico

$$az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + dz_x + ez_y + f = 0,$$

con coeficientes constantes, a la forma canónica

$$z_{xy} + \lambda z = 0,$$

y caracterizar el caso en que $\lambda = 0$.

8.6. EDP de orden 2 en $\mathbb{R}^2$. Clasificación

8.6.1. ODL asociado a una solución de una EDP.

Consideremos ahora el caso de una EDP *cuasi–lineal*, es decir definida por una función lineal en las derivadas segundas y por tanto de la forma

$$az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + g = 0,$$

donde a, b, c, g, son funciones de (x, y, z, z_x, z_y). En este caso el *tipo* de esta ecuación (*elíptico, parabólico* ó *hiperbólico*), definido por el signo de $ac - b^2$, depende de la solución que consideremos. Por ejemplo $ac - b^2 = z$ en la EDP

$$z_{xx} + zz_{yy} = 0,$$

cuya solución $z = 1$ es elíptica, la $z = 0$ es parabólica y la $z = -1$ es hiperbólica. En la EDP

$$(1 - z_x^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 - z_y^2)z_{yy} = 0,$$

una solución z es elíptica si y sólo si $z_x^2 + z_y^2 < 1$, parabólica si y sólo si $z_x^2 + z_y^2 = 1$, e hiperbólica si y sólo si $z_x^2 + z_y^2 > 1$, etc.

Mas generalmente consideremos una EDP

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) = 0, \tag{8.3}$$

definida por una función F en las coordenadas (x, y, z, p, q, r, s, t).

Definición. Diremos que el tipo de una solución $z = f(x, y)$ de esta EDP es *elíptico, parabólico* ó *hiperbólico*, si el signo de

$$4F_rF_t - F_s^2,$$

es respectivamente > 0, $= 0$ ó < 0.

Obviamente la importancia de este concepto radica, como en el caso lineal, en que es un concepto intrínseco de la solución, es decir que no depende de las coordenadas (x, y) consideradas. Para verlo consideremos antes cómo cambia una EDP de coordenadas.

Lema 8.28 *Dada una EDP de segundo orden (8.3) en las coordenadas (x, y) de un abierto U del plano, consideremos (u, v) otro sistema de coordenadas en U y la función*

$$\begin{aligned} G(u, v, z, p, q, r, s, t) = F(x, y, z, pu_x + qv_x, pu_y + qv_y,\\ ru_x^2 + 2su_xv_x + tv_x^2 + pu_{xx} + qv_{xx},\\ ru_xu_y + s(u_xv_y + u_yv_x) + tv_xv_y + pu_{xy} + qv_{xy},\\ ru_y^2 + 2su_yv_y + tv_y^2 + pu_{yy} + qv_{yy}), \end{aligned}$$

entonces para toda función z en U se tiene que en U

$$G(u, v, z, z_u, z_v, z_{uu}, z_{uv}, z_{vv}) = F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}).$$

Demostración. Es consecuencia de que para toda función z en U se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} z_x &= z_uu_x + z_vv_x\\ z_y &= z_uu_y + z_vv_y\\ z_{xx} &= (z_{uu}u_x + z_{uv}v_x)u_x + (z_{vu}u_x + z_{vv}v_x)v_x + z_uu_{xx} + z_vv_{xx}\\ z_{yx} &= (z_{uu}u_y + z_{uv}v_y)u_x + (z_{vu}u_y + z_{vv}v_y)v_x + z_uu_{xy} + z_vv_{xy}\\ z_{yy} &= (z_{uu}u_y + z_{uv}v_y)u_y + (z_{vu}u_y + z_{vv}v_y)v_y + z_uu_{yy} + z_vv_{yy} \end{aligned}$$

∎

Corolario 8.29 *Dada una solución z de la EDP de segundo orden (8.3), el signo de $4F_rF_t - F_s^2$ es invariante por difeomorfismos.*

Demostración. Sea (u, v) otro sistema de coordenadas y G la función del lema anterior que define la EDP en este sistema. Se sigue que

$$\begin{aligned} G_r &= F_r u_x^2 + F_s u_x u_y + F_t u_y^2, \\ G_t &= F_r v_x^2 + F_s v_x v_y + F_t v_y^2, \\ G_s &= 2F_r u_x v_x + F_s(u_x v_y + u_y v_x) + 2F_t u_y v_y, \end{aligned} \tag{8.4}$$

lo cual implica que

$$4G_rG_t - G_s^2 = (4F_rF_t - F_s^2)(u_xv_y - u_yv_x)^2. \quad \blacksquare$$

Esto nos hace pensar que detrás de esto hay un tensor como en el caso lineal y así es, pero no sólo eso, lo que realmente existe es un *operador diferencial lineal* asociado canónicamente a la solución z considerada.

Teorema 8.30 *Toda solución z, en un abierto U del plano, de una EDP de segundo orden (8.3), define canónicamente un ODL $P \in \mathcal{O}_2(U)$, que en coordenadas se expresa de la forma*

$$P = F_r\frac{\partial^2}{\partial x^2} + F_s\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + F_t\frac{\partial^2}{\partial y^2} + F_p\frac{\partial}{\partial x} + F_q\frac{\partial}{\partial y} + F_z.$$

Demostración. Si consideramos otro sistema de coordenadas (u, v) en U y la función G del lema anterior que define la EDP en este sistema, tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[[P,u],u](1) &= \frac{1}{2}P(u^2) - uP(u) - \frac{u^2}{2}P(1) \\ &= F_r u_x^2 + F_s u_x u_y + F_t u_y^2 = G_r \\ [[P,u],v](1) &= P(uv) - uP(v) - vP(u) + uvP(1) \\ &= 2F_r u_x v_x + F_s(u_x v_y + u_y v_x) + 2F_t u_y v_y = G_s \\ \frac{1}{2}[[P,v],v](1) &= \frac{1}{2}P(v^2) - vP(v) - \frac{v^2}{2}P(1) \\ &= F_r v_x^2 + F_s v_x v_y + F_t v_y^2 = G_t \\ [P,u](1) &= P(u) - uP(1) \\ &= F_r u_{xx} + F_s u_{xy} + F_t u_{yy} + F_p u_x + F_q u_y = G_p \\ [P,v](1) &= P(v) - vP(1) \\ &= F_r v_{xx} + F_s v_{xy} + F_t v_{yy} + F_p v_x + F_q v_y = G_q. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Definición. Dada una solución z de una EDP (8.3), llamaremos su *símbolo* al símbolo del ODL P que define, por tanto al tensor

$$\mathbf{T} = F_r \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + \frac{F_s}{2} \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} + \frac{F_s}{2} \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + F_t \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y},$$

donde las tres derivadas parciales de F están evaluadas en los puntos de la forma

$$(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y), z_{xx}(x, y), z_{xy}(x, y), z_{yy}(x, y)),$$

y por tanto son funciones del plano.

Nota 8.31 Observemos que el que una solución z sea elíptica, parabólica ó hiperbólica, equivale como en el caso lineal a que su símbolo no tenga 1–formas isótropas, tenga una única ó tenga dos respectivamente.

Ejemplo 8.6.1 Por ejemplo toda solución z de la ecuación de las superficies mínimas (ver el ejemplo (7.10.2), pág.512),

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0.$$

es elíptica (ver el ejercicio (8.6.2)), pág.658) y define la métrica

$$g = \frac{(1 + z_x^2)dx \otimes dx + z_x z_y (dx \otimes dy + dy \otimes dx) + (1 + z_y^2)dy \otimes dy}{1 + z_x^2 + z_y^2},$$

que es proporcional a la que la superficie $z = z(x, y)$ hereda de la estándar en $\mathbb{R}^3$, que es

$$(1 + z_x^2)dx \otimes dx + z_x z_y (dx \otimes dy + dy \otimes dx) + (1 + z_y^2)dy \otimes dy,$$

donde la función que aparece $1 + z_x^2 + z_y^2$ es el cuadrado del módulo del gradiente de la función que hemos elegido para definir la superficie $(z - z(x, y) = 0)$.

8.6.2. Reducción a forma canónica. Caso hiperbólico de una EDP cuasi–lineal.

Empecemos con el caso particular de una EDP de tipo *cuasi–lineal*, es decir lineal en las derivadas segundas y por tanto de la forma

$$a z_{xx} + 2b z_{xy} + c z_{yy} + g = 0, \tag{8.5}$$

donde a, b, c y g, son funciones de (x, y, z, z_x, z_y). Veremos que si z es una solución de tipo hiperbólico ó elíptico, podemos encontrar una tal reducción.

Observemos que el símbolo asociado a una solución z de (8.5), tiene como coeficientes (en el sistema de coordenadas (x, y))

$$F_r = a, \quad \frac{F_s}{2} = b, \quad F_t = c,$$

que debemos entender como funciones del plano, pues la solución z está fija. Y que la solución es hiperbólica si $ac - b^2 < 0$ y elíptica si $ac - b^2 > 0$.

Haciendo un giro si es necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $ac \neq 0$.

Siguiendo los pasos del caso lineal consideramos las 1–formas isótropas del símbolo asociado a nuestra solución z

$$\omega_1 = dx - \lambda_1 dy = dx - \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{c} dy,$$
$$\omega_2 = dx - \lambda_2 dy = dx - \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{c} dy,$$

y que son proporcionales a dos 1–formas exactas, du y dv respectivamente. En tal caso (u, v) forman un sistema de coordenadas que, como en el caso lineal, también llamamos *características* aunque dependen de la solución z fijada. Consideremos también los *campos característicos*, es decir los incidentes respectivamente con ω_1 y ω_2

$$D_1 = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \qquad D_2 = \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

y ahora apliquemos nuestras 1–formas, respectivamente a ∂v y ∂u, con lo que se obtiene

$$x_v - \lambda_1 y_v = 0, \qquad x_u - \lambda_2 y_u = 0. \tag{8.6}$$

Ahora para $p = z_x$ y $q = z_y$, tendremos que $p_y = q_x$ y

$$D_i p = \lambda_i p_x + p_y, \quad D_i q = \lambda_i q_x + q_y = \lambda_i p_y + q_y, \qquad (\text{para } i = 1, 2)$$

de donde se sigue, por ser z solución de nuestra ecuación, que

$$\begin{aligned}\lambda_i(ap_x + 2bp_y + cq_y + g) = 0 \quad &\Rightarrow\\ a(D_ip - p_y) + 2b\lambda_i p_y + c\lambda_i(D_iq - \lambda_i p_y) + g\lambda_i = 0 \quad &\Rightarrow\\ aD_ip + c\lambda_i D_iq + g\lambda_i = (a - 2b\lambda_i + c\lambda_i^2)p_y = 0 \quad &\Rightarrow\\ [adp + c\lambda_i dq + g\lambda_i dy]D_i = 0,\end{aligned}$$

y como $a/c = \lambda_1\lambda_2$, tendremos que

$$\left[\lambda_2 dp + dq + \frac{g}{c}dy\right] D_1 = 0,$$
$$\left[\lambda_1 dp + dq + \frac{g}{c}dy\right] D_2 = 0,$$

lo cual implica, al ser D_1 proporcional a ∂v y D_2 a ∂u, que

$$\lambda_2 p_v + q_v + \frac{g}{c}y_v = 0, \quad \lambda_1 p_u + q_u + \frac{g}{c}y_u = 0. \tag{8.7}$$

Hemos demostrado por tanto, que para cada solución z de nuestra EDP original, las funciones $x, y, z, p = z_x, q = z_y$ satisfacen el sistema de las cuatro EDP (8.6) y (8.7), junto con las dos ecuaciones

$$z_u - px_u - qy_u = 0, \qquad z_v - px_v - qy_v = 0,$$

que son las componentes de la 1–forma nula

$$dz - pdx - qdy = 0,$$

en la base du, dv.

Definición. Llamaremos *sistema característico* asociado a la EDP cuasi–lineal (8.5) al formado por las cinco ecuaciones

$$\begin{aligned} x_u - \lambda_2 y_u = 0, \qquad & x_v - \lambda_1 y_v = 0,\\ \lambda_1 p_u + q_u + \frac{g}{c}y_u = 0, \qquad & \lambda_2 p_v + q_v + \frac{g}{c}y_v = 0,\\ z_u - px_u - qy_u = 0, \qquad \text{ó} \qquad & z_v - px_v - qy_v = 0.\end{aligned} \tag{8.8}$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{c}, \quad \lambda_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{c},$$

siendo a, b, c, g funciones de x, y, z, p, q, que a su vez son funciones del plano (u, v), y para las que $ac - b^2 < 0$.

Nota 8.32 La razón de considerar sólo una de las dos últimas ecuaciones es que no son independientes, como se demuestra en el siguiente resultado, en el que vemos que el recíproco también es válido.

Proposición 8.33 *Si x, y, z, p, q es una solución del sistema característico (8.6.2), que sobre una curva del tipo $f(u) + h(v) = cte$, con $f' \neq 0$ y $h' \neq 0$, satisface $y_u y_v \neq 0$ y $dz = pdx + qdy$, entonces (x, y) es un sistema de coordenadas locales en cada punto de la curva y en el entorno correspondiente la función z es solución de (8.5).*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la curva es $u + v = 0$, pues cualesquiera funciones $f(u)$ y $h(v)$ de las coordenadas características, en las condiciones del enunciado, vuelven a ser características, y las ecuaciones del sistema no cambian.

Las dos primeras ecuaciones del sistema nos dicen que $\omega_1 = dx - \lambda_1 dy$ es proporcional a du y $\omega_2 = dx - \lambda_2 dy$ a dv, por lo que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (aunque esto también lo sabemos por su definición) y por lo tanto (x, y) es un sistema de coordenadas locales en cada punto de la curva, pues

$$x_u y_v - x_v y_u = (\lambda_2 - \lambda_1) y_u y_v \neq 0,$$

y se tiene que

$$\left.\begin{aligned} du\left(\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0 \\ dv\left(\lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 u_x + u_y = 0. \\ \lambda_2 v_x + v_y = 0. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Por otra parte si una de las dos últimas ecuaciones del sistema es válida también lo es la otra, puesto que sobre la curva se verifica

$$(z_u - p x_u - q y_u) du + (z_v - p x_v - q y_v) dv = dz - p dx - q dy = 0,$$

y como una de las ecuaciones es válida las dos lo son sobre la curva. Como por otra parte de las ecuaciones del sistema se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(z_v - p x_v - q y_v)}{\partial u} - \frac{\partial(z_u - p x_u - q y_u)}{\partial v} = \\ = p_v x_u - p_u x_v + q_v y_u - q_u y_v \\ = p_v \lambda_2 y_u - p_u \lambda_1 y_v + q_v y_u - q_u y_v \\ = (p_v \lambda_2 + q_v) y_u - (p_u \lambda_1 + q_u) y_v = 0, \end{aligned}$$

basta integrar para obtener la otra ecuación. Se sigue además que $dz - pdx - qdy = 0$ y por tanto que $p = z_x$ y $q = z_y$, y de (8.9) se concluye que

$$\begin{aligned} z_{yy} &= q_y = q_u u_y + q_v v_y \\ &= -\left(\lambda_1 p_u + \frac{g}{c} y_u\right) u_y - \left(\lambda_2 p_v + \frac{g}{c} y_v\right) v_y \\ &= -(\lambda_1 + \lambda_2)(p_u u_y + p_v v_y) + \lambda_1 p_v v_y + \lambda_2 p_u u_y - \frac{g}{c} \\ &= -(\lambda_1 + \lambda_2) p_y + \lambda_1 p_v(-\lambda_2 v_x) + \lambda_2 p_u(-\lambda_1 u_x) - \frac{g}{c} \\ &= -\frac{2b}{c} z_{xy} - \frac{a}{c} z_{xx} - \frac{g}{c}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observemos que el sistema característico tiene la peculiaridad de que en cada ecuación sólo interviene la derivada parcial respecto de una de las dos coordenadas características. Si derivamos cada una de ellas respecto de la otra obtenemos las cinco ecuaciones, en las que los puntos suspensivos son funciones de (x, y, z, p, q) y sus derivadas de primer orden

$$\begin{aligned} x_{uv} - \lambda_2 y_{uv} + \cdots &= 0, \\ x_{vu} - \lambda_1 y_{vu} + \cdots &= 0, \\ \lambda_1 p_{uv} + q_{uv} + \frac{g}{c} y_{uv} + \cdots &= 0, \\ \lambda_2 p_{vu} + q_{vu} + \frac{g}{c} y_{vu} + \cdots &= 0, \\ z_{uv} - p x_{uv} - q y_{uv} + \cdots &= 0, \end{aligned}$$

las cuales son ecuaciones lineales en las derivadas segundas x_{uv}, y_{uv}, z_{uv}, p_{uv} y q_{uv}, cuyo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g/c & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & g/c & 0 & \lambda_2 & 1 \\ -p & -q & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\frac{ac - b^2}{c^2},$$

es no nulo, por lo que podemos calcular la matriz inversa y obtener un sistema canónico de cinco ecuaciones de segundo orden del tipo

$$\begin{gathered} x_{uv} + \cdots = 0, \quad y_{uv} + \cdots = 0, \quad z_{uv} + \cdots = 0, \\ p_{uv} + \cdots = 0, \quad q_{uv} + \cdots = 0, \end{gathered}$$

que es una generalización del que obtuvimos en el caso lineal.

8.6.3. Reducción a forma canónica. Caso hiperbólico de una EDP de tipo general.

Veamos ahora la reducción a forma canónica de una EDP del tipo general (8.3), para una solución z de tipo hiperbólico.

Haciendo un giro si es necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $F_r F_t \neq 0$.

Consideremos como en el caso anterior las 1–formas isótropas del símbolo asociado a nuestra solución z

$$\omega_1 = dx - \lambda_1 dy = dx - \frac{F_s + \sqrt{F_s^2 - 4F_r F_t}}{2F_t} dy,$$
$$\omega_2 = dx - \lambda_2 dy = dx - \frac{F_s - \sqrt{F_s^2 - 4F_r F_t}}{2F_t} dy,$$

proporcionales a dos 1–formas exactas, du y dv, que definen un sistema de coordenadas *características*. Consideremos también los *campos característicos*, es decir los incidentes respectivamente con ω_1 y ω_2

$$D_1 = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \qquad D_2 = \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

y ahora apliquemos nuestras 1–formas, respectivamente a ∂v y ∂u, con lo que se obtiene

$$x_v - \lambda_1 y_v = 0, \qquad x_u - \lambda_2 y_u = 0. \tag{8.10}$$

Ahora para $p = z_x$, $q = z_y$, $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$, tendremos que $p_y = q_x$, $r_y = s_x$ y $s_y = t_x$, por tanto para $i = 1, 2$

$$D_i r = \lambda_i r_x + r_y,$$
$$D_i s = \lambda_i s_x + s_y = \lambda_i r_y + s_y,$$
$$D_i t = \lambda_i t_x + t_y = \lambda_i s_y + t_y,$$

por otra parte derivando respecto de x y respecto de y la ecuación (en la que hemos fijado nuestra solución z),

$$F(x, y, z(x, y), z_x(x, y), x_y(x, y), \ldots) = 0,$$

se sigue que

$$\begin{aligned} [F^x] + F_r r_x + F_s s_x + F_t t_x = 0, \\ [F^y] + F_r r_y + F_s s_y + F_t t_y = 0, \end{aligned} \tag{8.11}$$

donde por comodidad hemos llamado

$$[F^x] = F_x + F_z z_x + F_p p_x + F_q q_x = F_x + F_z p + F_p r + F_q s,$$
$$[F^y] = F_y + F_z z_y + F_p p_y + F_q q_y = F_y + F_z q + F_p s + F_q t,$$

y multiplicando la primera ecuación de (8.11) por λ_i y recordando que

$$F_r - F_s\lambda_i + \lambda_i^2 F_t = 0,$$

tendremos que

$$\begin{aligned}
\lambda_i([F^x] + F_r r_x + F_s s_x + F_t t_x) = 0 \quad &\Rightarrow \\
\lambda_i[F^x] + F_r(D_i r - r_y) + F_s\lambda_i r_y + F_t\lambda_i(D_i s - \lambda_i r_y) = 0 \quad &\Rightarrow \\
F_r D_i r + \lambda_i F_t D_i s + \lambda_i[F^x] = r_y(F_r - F_s\lambda_i + \lambda_i^2 F_t) = 0 \quad &\Rightarrow \\
[F_r dr + \lambda_i F_t ds + \lambda_i[F^x]dy]D_i = 0,&
\end{aligned}$$

de donde, al ser D_1 proporcional a ∂v y D_2 a ∂u, se siguen las dos ecuaciones

$$\begin{aligned}
F_r r_v + \lambda_1 F_t s_v + \lambda_1[F^x]y_v = 0,\\
F_r r_u + \lambda_2 F_t s_u + \lambda_2[F^x]y_u = 0.
\end{aligned} \tag{8.12}$$

De modo semejante, multiplicando por λ_i la segunda ecuación de (8.11) (y recordando que $s_x = r_y$ y $t_x = s_y = D_i s - \lambda_i r_y$), tendremos que

$$[F_r ds + \lambda_i F_t dt + \lambda_i[F^x]dy]D_i = 0,$$

de donde se siguen las dos ecuaciones

$$\begin{aligned}
F_r s_v + \lambda_1 F_t t_v + \lambda_1[F^y]y_v = 0,\\
F_r s_u + \lambda_2 F_t t_u + \lambda_2[F^y]y_u = 0.
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Hemos demostrado por tanto, que para cada solución z de nuestra EDP original, las funciones $x, y, z, p = z_x, q = z_y, r = z_{xx}, s = z_{xy}, t = z_{yy}$ satisfacen el sistema de EDP (8.10), (8.12) y (8.13), junto con las parejas de ecuaciones

$$\begin{aligned}
z_u - px_u - qy_u = 0, \qquad & z_v - px_v - qy_v = 0,\\
p_u - rx_u - sy_u = 0, \qquad & p_v - rx_v - sy_v = 0,\\
q_u - sx_u - ty_u = 0, \qquad & q_v - sx_v - ty_v = 0,
\end{aligned}$$

que son las componentes de las 1–forma nulas

$$dz - pdx - qdy = 0, \quad dp - rdx - sdy, \quad dq - sdx - tdy,$$

en la base du, dv.

Definición. Llamaremos *sistema característico* asociado a la EDP (8.3) al formado por las ocho ecuaciones

$$\begin{aligned} x_u - \lambda_2 y_u &= 0, \\ x_v - \lambda_1 y_v &= 0, \\ F_r r_v + \lambda_1 F_t s_v + \lambda_1 [F^x] y_v &= 0, \\ F_r r_u + \lambda_2 F_t s_u + \lambda_2 [F^x] y_u &= 0, \\ F_r s_v + \lambda_1 F_t t_v + \lambda_1 [F^y] y_v &= 0, \\ z_v - p x_v - q y_v &= 0, \\ p_v - r x_v - s y_v &= 0, \\ q_v - s x_v - t y_v &= 0. \end{aligned} \tag{8.14}$$

donde

$$\begin{aligned} [F^x] &= F_x + F_z p + F_p r + F_q s, \\ [F^y] &= F_y + F_z q + F_p s + F_q t, \\ \lambda_1 &= \frac{F_s + \sqrt{F_s^2 - 4F_r F_t}}{2F_t}, \\ \lambda_2 &= \frac{F_s - \sqrt{F_s^2 - 4F_r F_t}}{2F_t}. \end{aligned}$$

Nota 8.34 La razón de no considerar todas las ecuaciones encontradas es que no son independientes, como se demuestra en el siguiente resultado, en el que vemos que el recíproco también es válido.

Proposición 8.35 *Si x, y, z, p, q, r, s, t es una solución del sistema característico (8.14), que sobre una curva del tipo $f(u) + h(v) = cte$, con $f' \neq 0$ y $h' \neq 0$, satisface $y_u y_v \neq 0$, y las condiciones de compatibilidad*

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy,$$
$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

entonces (x, y) es un sistema de coordenadas locales en cada punto de la curva y en el entorno correspondiente la función z es solución de (8.3).

Demostración. Como en el caso anterior podemos suponer que la curva es $u + v = 0$.

Las ecuaciones $(1, 2)$ del sistema nos dicen que $\omega_1 = dx - \lambda_1 dy$ es proporcional a du y $\omega_2 = dx - \lambda_2 dy$ a dv, por lo que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (aunque esto también lo sabemos por su definición) y por lo tanto (x, y) es un sistema de coordenadas locales en cada punto de la curva, pues

$$x_u y_v - x_v y_u = (\lambda_2 - \lambda_1) y_u y_v \neq 0.$$

Veamos ahora que

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

en todos los puntos (u, v). Para ello derivemos la función respecto de v y multipliquemos por λ_1. Se sigue de las ecuaciones $(1, 3, 5)$ del sistema y de que $F_r - F_s\lambda_1 + \lambda_1^2 F_t = 0$, que

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \frac{dF(\cdots)}{dv} &= \lambda_1(F_x x_v + F_y y_v + F_z z_v + F_p p_v + \\
&\quad + F_q q_v + F_r r_v + F_s s_v + F_t t_v) \\
&= \lambda_1[F_x x_v + F_y y_v + F_r r_v + F_s s_v + F_t t_v \\
&\quad + F_z(p x_v + q y_v) + F_p(r x_v + s y_v) + F_q(s x_v + t y_v)] \\
&= \lambda_1(x_v[F^x] + y_v[F^y] + F_r r_v + F_s s_v + F_t t_v) \\
&= \lambda_1(-\lambda_1 F_t s_v + y_v[F^y] + F_s s_v + F_t t_v) \\
&= F_r s_v + \lambda_1 y_v[F^y] + \lambda_1 F_t t_v \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto integrando a lo largo de las rectas $u = \text{cte}$ y considerando que $F = 0$ sobre $u + v = 0$, tendremos que $F = 0$ en todas partes.

Demostrar que

$$r = p_x, \quad s = p_y,$$

equivale a demostrar que la 1–forma $dp - r dx - s dy$ es nula, lo cual equivale a demostrar que sus componentes en el sistema de coordenadas (u, v) son nulas, pero su componente en v lo es por la ecuación (7), y por anularse la 1–forma sobre $u + v = 0$ también se anula su componente u

$$p_u - r x_u - s y_u$$

sobre $u + v = 0$. Por lo tanto basta demostrar que esta función es constante en cada recta $u = \text{cte}$, es decir que $(p_u - r x_u - s y_u)_v = 0$. Para

demostrarlo consideremos las ecuaciones $(3,4)$ del sistema simplificadas con las dos primeras y recordemos que $\lambda_1\lambda_2 = F_r/F_t$

$$\left.\begin{aligned} F_r r_v + \lambda_1 F_t s_v + [F^x] x_v = 0 \\ F_r r_u + \lambda_2 F_t s_u + [F^x] x_u = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} F_r r_v x_u + \lambda_1 F_t s_v x_u + [F^x] x_v x_u = 0 \\ F_r r_u x_v + \lambda_2 F_t s_u x_v + [F^x] x_u x_v = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$F_r r_v x_u + \lambda_1 F_t s_v x_u = F_r r_u x_v + \lambda_2 F_t s_u x_v \quad \Rightarrow$$

$$F_r r_v x_u + \lambda_1\lambda_2 F_t s_v y_u = F_r r_u x_v + \lambda_2\lambda_1 F_t s_u y_v \quad \Rightarrow$$

$$F_r r_v x_u + F_r s_v y_u = F_r r_u x_v + F_r s_u y_v \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (r_x x_v + r_y y_v) x_u + (s_x x_v + s_y y_v) y_u = \\ = (r_x x_u + r_y y_u) x_v + (s_x x_u + s_y y_u) y_v \quad \Rightarrow \\ (r_y - s_x)(x_u y_v - x_v y_u) = 0, \end{aligned}$$

de donde se sigue por una parte que

$$r_y = s_x,$$

y por otra (considerando la ecuación (7)) que

$$\begin{aligned} (p_u - r x_u - s y_u)_v &= (p_u - r x_u - s y_u)_v - (p_v - r x_v - s y_v)_u \\ &= r_u x_v + s_u y_v - r_v x_u - s_v y_u = 0. \end{aligned}$$

Por último demostrar que

$$z_x = p, \quad z_y = q, \quad q_x = s, \quad q_y = t,$$

es equivalente a demostrar que son nulas las 1–formas $dz - pdx - qdy$ y $dq - sdx - tdy$, las cuales tienen nulas sus componentes v y ellas son nulas sobre $u + v = 0$, por lo tanto sus componentes u

$$f = z_u - p x_u - q y_u, \quad g = q_u - s x_u - t y_u,$$

también se anulan sobre $u+v = 0$ y basta demostrar que f y g se anulan en todo el plano. Para ello consideremos por una parte las ecuaciones $(3,5)$

$$\begin{aligned} (F_x + F_z p + F_p r + F_q s) x_v + F_r r_v + \lambda_1 F_t s_v = 0, \\ (F_y + F_z q + F_p s + F_q t) x_v + F_r s_v + \lambda_1 F_t t_v = 0, \end{aligned}$$

donde hemos considerado el valor de $[F^x]$ y el de $[F^y]$ y hemos considerado las ecuaciones $(1,2)$. Ahora derivemos

$$F(x,y,z,p,q,r,s,t)=0,$$

respecto de x e y respectivamente

$$\begin{aligned}F_x+F_zz_x+F_pp_x+F_qq_x+F_rr_x+F_ss_x+F_tt_x=0,\\ F_y+F_zz_y+F_pp_y+F_qq_y+F_rr_y+F_ss_y+F_tt_y=0,\end{aligned}$$

multipliquemos ambas por x_v y restémosles las dos ecuaciones anteriores (4) y (5) respectivamente (recordemos que $r=p_x$ y $s=p_y$)

$$\begin{aligned}x_v[F_z(z_x-p)+F_q(q_x-s)]+\\ +F_r(r_xx_v-r_v)+F_ss_xx_v+F_t(t_xx_v-\lambda_1s_v)=0,\\ x_v[F_z(z_y-q)+F_q(q_y-t)]+\\ +F_r(r_yx_v-s_v)+F_ss_yx_v+F_t(t_yx_v-\lambda_1t_v)=0,\end{aligned}$$

ahora multiplicando la primera por λ_2x_u y la segunda por $x_u=\lambda_2y_u$ y teniendo en cuenta que $r_y=s_x$ tendremos que

$$\begin{aligned}\lambda_2x_v[F_z(z_xx_u-px_u)+F_q(q_xx_u-sx_u)]+\\ +\lambda_2x_u[-F_rr_yy_v+F_ss_xx_v+F_t(t_xx_v-\lambda_1s_v)]=0,\\ \lambda_2x_v[F_z(z_yy_u-qy_u)+F_q(q_yy_u-ty_u)]+\\ +\lambda_2y_u[-F_rs_yy_v+F_ss_yx_v+F_t(t_yx_v-\lambda_1t_v)]=0,\end{aligned}$$

y sumando y teniendo en cuenta que $-F_r+\lambda_1F_s=\lambda_1^2F_t$, tendremos que

$$\begin{aligned}\lambda_2x_v[F_zf+F_qg]-\lambda_2y_vF_rs_u+\lambda_2x_vF_ss_u+\\ +\lambda_2F_t(t_xx_ux_v-\lambda_1x_us_v+t_yy_ux_v-\lambda_1y_ut_v)=0, \quad\Rightarrow\\ x_v[F_zf+F_qg]-F_rs_uy_v+F_ss_u\lambda_1y_v+\\ +F_t(t_xx_u\lambda_1y_v-\lambda_1x_us_v+t_yy_u\lambda_1y_v-\lambda_1y_ut_v)=0, \quad\Rightarrow\\ x_v[F_zf+F_qg]+y_v(s_xx_u+s_yy_u)F_t\lambda_1^2+\lambda_1F_t(t_xx_uy_v-\\ -x_us_xx_v-x_us_yy_v+t_yy_uy_v-y_ut_xx_v-y_ut_yy_v)=0, \quad\Rightarrow\\ x_v[F_zf+F_qg]+\lambda_1F_t(t_x-s_y)(x_uy_v-x_vy_u)=0,\end{aligned}$$

pero por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned}g_v&=(q_u-sx_u-ty_u)_v-(q_v-sx_v-ty_v)_u\\ &=s_ux_v-s_vx_u+t_uy_v-t_vy_u\\ &=(t_x-s_y)(x_uy_v-x_vy_u),\end{aligned}$$

por lo tanto se sigue de lo anterior que

$$g_v = -\frac{y_v}{F_t}(F_z f + F_q g),$$

ahora bien por otra parte se sigue de la ecuaciones (6) y de $p_y = s$ que

$$\begin{aligned} f_v &= (z_u - px_u - qy_u)_v - (z_v - px_v - qy_v)_u \\ &= -p_v x_u - q_v y_u + p_u x_v + q_u y_v \\ &= -(p_x x_v + p_y y_v)x_u - q_v y_u + (p_x x_u + p_y y_u)x_v + q_u y_v \\ &= -s y_v x_u - q_v y_u + s y_u x_v + q_u y_v + t y_u y_v - t y_u y_v \\ &= y_v(q_u - s x_u - t y_u) - y_u(q_v - s x_v - t y_v) \\ &= y_v g, \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos que f y g son, para cada u fijo, solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales en v, que en $v = -u$ valen $f = g = 0$ y como la solución es única, tendremos que f y g son nulas en todo punto, que es lo que queríamos demostrar. ∎

8.6.4. Reducción a forma canónica. Caso elíptico.

Consideremos ahora una solución z de (8.5), de tipo elíptico. En tal caso, siguiendo los pasos del caso anterior,

$$\lambda_1 = \lambda = \frac{b + i\sqrt{ac - b^2}}{c}, \qquad \lambda_2 = \overline{\lambda} = \frac{b - i\sqrt{ac - b^2}}{c},$$

y las 1–formas isótropas (complejas y conjugadas) correspondientes

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dx - \lambda_1 dy = dx - \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{c} dy, \\ \omega_2 &= dx - \lambda_2 dy = dx - \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{c} dy, \end{aligned}$$

son proporcionales a dos 1–formas exactas, du y $d\overline{u}$ respectivamente (al menos en el caso analítico). En tal caso $(u, \overline{u})$ forman un sistema de coordenadas complejas que, como en el caso lineal, también llamamos *características* aunque dependen de la solución z fijada. Siguiendo los pasos del caso anterior (hiperbólico) tendremos que las funciones $x, y, z, p = z_x, q = z_y$ satisfacen el *sistema característico* formado por las

cinco ecuaciones

$$\begin{gathered} x_u - \overline{\lambda} y_u = 0, \qquad x_{\overline{u}} - \lambda y_{\overline{u}} = 0, \\ \lambda p_u + q_u + \frac{g}{c} y_u = 0, \qquad \overline{\lambda} p_{\overline{u}} + q_{\overline{u}} + \frac{g}{c} y_{\overline{u}} = 0, \\ z_u - p x_u - q y_u = 0, \qquad \text{ó} \qquad z_{\overline{u}} - p x_{\overline{u}} - q y_{\overline{u}} = 0, \end{gathered}$$

donde observemos que al ser x, y, z reales, son tres parejas de ecuaciones conjugadas. Ahora como en cada ecuación sólo interviene la derivada parcial respecto de una de las dos coordenadas características, podemos derivar cada una de ellas respecto de la otra y obtenemos las siguientes cinco ecuaciones, en las que los puntos suspensivos son funciones de (x, y, z, p, q) y sus derivadas de primer orden

$$\begin{aligned} x_{u\overline{u}} - \overline{\lambda} y_{u\overline{u}} + \cdots &= 0, \\ x_{\overline{u}u} - \lambda y_{\overline{u}u} + \cdots &= 0, \\ \lambda p_{u\overline{u}} + q_{u\overline{u}} + \frac{g}{c} y_{u\overline{u}} + \cdots &= 0, \\ \overline{\lambda} p_{\overline{u}u} + q_{\overline{u}u} + \frac{g}{c} y_{\overline{u}u} + \cdots &= 0, \\ z_{u\overline{u}} - p x_{u\overline{u}} - q y_{u\overline{u}} + \cdots &= 0, \end{aligned}$$

las cuales son ecuaciones lineales en las derivadas segundas $x_{u\overline{u}}$, $y_{u\overline{u}}$, $z_{u\overline{u}}$, $p_{u\overline{u}}$ y $q_{u\overline{u}}$, cuyo determinante ya hemos calculado en el caso anterior y vale

$$4\frac{ac - b^2}{c^2} \neq 0,$$

por lo que podemos calcular la matriz inversa y obtener un sistema canónico de cinco ecuaciones de segundo orden del tipo

$$\begin{aligned} x_{u_1u_1} + x_{u_2u_2} + \cdots &= 0, \\ y_{u_1u_1} + y_{u_2u_2} + \cdots &= 0, \\ z_{u_1u_1} + z_{u_2u_2} + \cdots &= 0, \\ p_{u_1u_1} + p_{u_2u_2} + \cdots &= 0, \\ q_{u_1u_1} + q_{u_2u_2} + \cdots &= 0, \end{aligned}$$

puesto que $4f_{u\overline{u}} = f_{u_1u_1} + f_{u_2u_2}$, para $u = u_1 + iu_2$, y esto es una generalización del que obtuvimos en el caso lineal.

Observemos que

$$x_u y_{\overline{u}} - y_u x_{\overline{u}} = (\overline{\lambda} - \lambda) y_{\overline{u}} y_u = -2i\frac{\sqrt{ac - b^2}}{c} y_{\overline{u}} y_u. \tag{8.15}$$

Ejercicio 8.6.1 Demostrar que si z es una solución elíptica ó hiperbólica de una EDP cuasi–lineal

$$az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + g = 0,$$

y (u, v) son coordenadas características, entonces

$$\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{(x_u y_v - x_v y_u)^2}{2\sqrt{b^2 - ac}} g.$$

Ejercicio 8.6.2 Demostrar que la EDP de las superficies mínimas

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0,$$

es elíptica y se puede reducir a las ecuaciones de Laplace en las coordenadas características ($u = u_1 + iu_2, \overline{u} = u_1 - iu_2$)

$$x_{u_1u_1} + x_{u_2u_2} = 0, \quad y_{u_1u_1} + y_{u_2u_2} = 0, \quad z_{u_1u_1} + z_{u_2u_2} = 0,$$

sujetas a las condiciones

$$x_{u_1}^2 + y_{u_1}^2 + z_{u_1}^2 = x_{u_2}^2 + y_{u_2}^2 + z_{u_2}^2,$$
$$x_{u_1}x_{u_2} + y_{u_1}y_{u_2} + z_{u_1}z_{u_2} = 0.$$

Nota 8.36 En el ejercicio anterior decimos que la métrica g de la superficie mínima es proporcional a $du \otimes d\overline{u} + d\overline{u} \otimes du$, y por tanto a $du_1 \otimes du_1 + du_2 \otimes du_2$, eso quiere decir que la aplicación

$$(u_1, u_2) \colon \{z = z(x, y)\} \to \mathbb{R}^2,$$

es conforme. Ahora bien hemos visto también que las funciones x, y y z de la superficie son armónicas en las coordenadas (u_1, u_2), eso quiere decir que existen sus conjugadas armónicas respectivas (que estudiaremos en el tema de la ecuación de LaPlace), $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ y $\widetilde{z}$, tales que

$$f(u) = x(u_1, u_2) + i\widetilde{x}(u_1, u_2),$$
$$g(u) = y(u_1, u_2) + i\widetilde{y}(u_1, u_2),$$
$$h(u) = z(u_1, u_2) + i\widetilde{z}(u_1, u_2),$$

son funciones analíticas de la variable compleja $u = u_1 + iu_2$, siendo

$$f'(u)^2 + g'(u)^2 + h'(u)^2 = 0,$$

pues se tiene por las ecuaciones de Cauchy–Riemann que

$$x_u = \frac{1}{2}(x_{u_1} - ix_{u_2}) = \frac{1}{2}(\widetilde{x}_{u_2} + i\widetilde{x}_{u_1}) = i\widetilde{x}_u,$$

y lo mismo para y y z por lo tanto

$$\begin{aligned} f'(u)^2 + g'(u)^2 + h'(u)^2 &= (x_u + i\widetilde{x}_u)^2 + (y_u + i\widetilde{y}_u)^2 + (z_u + i\widetilde{z}_u)^2 \\ &= 4(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) = 0. \end{aligned}$$

En definitiva tenemos la clásica *representación de Weierstrass* de las superficies mínimas, mediante funciones analíticas de variable compleja, pues toda superficie mínima puede representarse como

$$x = \operatorname{Re} f, \quad y = \operatorname{Re} g, \quad z = \operatorname{Re} h,$$

donde f, g y h son funciones analíticas de la variable compleja $u = u_1 + iu_2$, sujetas a la condición

$$f'(u)^2 + g'(u)^2 + h'(u)^2 = 0,$$

donde haciendo un cambio de variable compleja, podemos tomar cualquiera de ellas, como la primera $v = f(u)$, como variable compleja, y por lo tanto cada superficie mínima depende esencialmente de una única función analítica de variable compleja. (Ver SPIVAK, T.IV, p.395)

Ejercicio 8.6.3 Demostrar que la EDP de las superficies mínimas, para la métrica de Minkowsky,

$$z_{xx}(z_y^2 - 1) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(z_x^2 - 1) = 0,$$

es hiperbólica y que se puede reducir a las ecuaciones de ondas en las coordenadas características ($u = u_1 + u_2, v = u_1 - u_2$), es decir

$$x_{u_1u_1} - x_{u_2u_2} = 0, \quad y_{u_1u_1} - y_{u_2u_2} = 0, \quad z_{u_1u_1} - z_{u_2u_2} = 0,$$

sujetas a las condiciones

$$x_u^2 + y_u^2 - z_u^2 = x_v^2 + y_v^2 - z_v^2 = 0.$$

8.7. Clasificación de sistemas de EDP

Podemos considerar la teoría de las EDP de segundo orden como un caso particular de una teoría mas general, la de los sistemas de EDP de primer orden

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + b_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

o escrito en forma matricial

$$\mathbf{u}_y + \mathbf{A}\mathbf{u}_x + \mathbf{b} = 0, \tag{8.16}$$

donde las a_{ij} son funciones de (x, y), $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{u}$ es el vector columna formado por las funciones u_i y $\mathbf{b}$ por las b_i, que son funciones de $(x, y, \mathbf{u})$.

Por ejemplo una EDP lineal

$$az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + dz_x + ez_y + fz = 0,$$

se reduce al siguiente sistema de EDP de primer orden, en el que consideramos x, y y z junto con las nuevas variables $p = z_x$, $q = z_y$,

$$\begin{gathered} x_y = 0, \qquad y_y = 1, \\ z_y = q, \qquad p_y = q_x, \\ ap_x + 2bq_x + cq_y + dp + eq + fz = 0 \end{gathered} \tag{8.17}$$

y estamos suponiendo que $c \neq 0$, en caso contrario y si $a \neq 0$ basta intercambiar los papeles de x e y, y si $a = c = 0$, entonces es hiperbólica y basta considerar las coordenadas $x + y$ y $x - y$.

Nuestra intención es transformar el sistema (8.16) en otro en el que, como en el sistema característico (8.6.2), las derivadas direccionales que aparezcan en cada ecuación sean de un único campo. Para ello buscamos funciones v_{ij} tales que al hacer las combinaciones

$$\sum_{i=1}^{n} v_{ki} \frac{\partial u_i}{\partial y} + \sum_{i,j=1}^{n} v_{ki} a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} v_{ki} b_i = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

obtengamos

$$\sum_{i=1}^{n} v_{ki} a_{ij} = \lambda_k v_{kj}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

de tal modo que nuestro sistema se transforme en

$$\sum_{j=1}^{n} v_{kj} \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \lambda_k \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) + \sum_{i=1}^{n} v_{ki} b_i = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

al que llamaremos *característico*, pues en cada ecuación $k = 1, \ldots, n$, sólo interviene la derivada correspondiente al campo

$$D_k = \frac{\partial}{\partial y} + \lambda_k \frac{\partial}{\partial x},$$

a los que llamaremos *campos característicos* y a sus curvas integrales *curvas características*.

Ahora bien tales funciones v_{ij} existen siempre que $\mathbf{A}$ tenga n autovalores reales λ_k. Si además tiene una base de autovectores, los dos sistemas son equivalentes. En tal caso diremos que nuestro sistema es de *tipo hiperbólico*. Un caso particular es cuando la matriz es simétrica, en cuyo caso diremos que el sistema es de *tipo simétrico hiperbólico*. Si todos los autovalores son complejos (no reales) diremos que el sistema es de *tipo elíptico*.

Ejercicio 8.7.1 Demostrar que el sistema (8.17) correspondiente a una EDP lineal en el plano, de orden 2 y de tipo hiperbólico es hiperbólico.

La importancia de las curvas características queda patente cuando buscamos una solución $\mathbf{u} = (u_i)$ de nuestra ecuación (8.16), con valores conocidos sobre una curva dada, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, que por comodidad parametrizamos por la longitud de arco. En cuyo caso si consideramos

$$T = \sigma_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = Tx \frac{\partial}{\partial x} + Ty \frac{\partial}{\partial y},$$

el vector unitario tangente a la curva y

$$N = -Ty \frac{\partial}{\partial x} + Tx \frac{\partial}{\partial y},$$

el unitario normal, tendremos que para cualquier función u

$$\begin{array}{l} Tu = Tx\, u_x + Ty\, u_y \\ Nu = -Ty\, u_x + Tx\, u_y \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} u_x = Tx\, Tu - Ty\, Nu, \\ u_y = Ty\, Tu + Tx\, Nu, \end{array}$$

de donde se sigue que (8.16) equivale a

$$\begin{aligned} &Ty\,T\mathbf{u} + Tx\,N\mathbf{u} + Tx\,\mathbf{A}\,T\mathbf{u} - Ty\,\mathbf{A}\,N\mathbf{u} + \mathbf{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &(Ty\,\mathbf{I} + Tx\,\mathbf{A})\,T\mathbf{u} + \mathbf{b} = (Ty\,\mathbf{A} - Tx\,\mathbf{I})\,N\mathbf{u}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz unidad y $T\mathbf{u}$ y $N\mathbf{u}$ son los vectores de componentes Tu_i y Nu_i respectivamente.

Ahora si la curva es tal que $Ty\,\mathbf{A} - Tx\,\mathbf{I}$ es una matriz no singular, tendremos que el conocimiento de las "presumibles soluciones" u_i sobre la curva, y consecuentemente de $Tu_i = (u_i \circ \sigma)'$, es suficiente para determinar el valor de sus derivadas normales Nu_i, pues basta multiplicar por la matriz inversa de $Ty\ \mathbf{A} - Tx\ \mathbf{I}$ y por lo tanto también están determinadas sobre la curva

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x &= Tx\,T\mathbf{u} - Ty\,N\mathbf{u}, \\ \mathbf{u}_y &= Ty\,T\mathbf{u} + Tx\,N\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Ahora bien el mismo proceso con $\mathbf{u}_x$ en lugar de $\mathbf{u}$, y observando que derivando (8.16) respecto de x se obtiene

$$(\mathbf{u}_x)_y + \mathbf{A}(\mathbf{u}_x)_x + \mathbf{d} = 0,$$

para $\mathbf{d}$ un vector de funciones que dependen de x, y, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}_x$, todas ellas conocidas sobre la curva de datos iniciales, vemos que también estarían determinadas sobre la curva $\mathbf{u}_{xx}$ y $\mathbf{u}_{xy}$, y análogamente estarían determinadas todas las derivadas parciales de $\mathbf{u}$. Esto implicaría en particular que si la solución $\mathbf{u}$ fuese analítica, estaría totalmente determinada en un entorno de la curva.

Sin embargo en caso contrario

$$\det[Ty\,\mathbf{A} - Tx\,\mathbf{I}] = 0,$$

no podremos determinarlas. En este caso tendremos que

$$\frac{Tx}{Ty} = \lambda_k,$$

es un autovalor de $\mathbf{A}$ y por tanto T es proporcional al campo característico

$$D_k = \frac{\partial}{\partial y} + \lambda_k \frac{\partial}{\partial x},$$

y la curva de los datos iniciales es característica.

8.7.1. Reducción a forma diagonal de sistemas lineales hiperbólicos.

Consideremos un sistema de tipo hiperbólico, es decir que todos los autovalores λ_i, de $\mathbf{A}$, sean reales y haya una base de autovectores. Si además las λ_i son funciones diferenciables, podemos formar una matriz $\mathbf{P}$ no singular de funciones diferenciables tales que

$$\Lambda = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

(por ejemplo cuando los autovalores son distintos), entonces podemos simplificar nuestra ecuación considerando la nueva incógnita $\mathbf{v} = \mathbf{Pu}$, para la que se verifica el sistema

$$\begin{gathered} \mathbf{v}_y + \Lambda \mathbf{v}_x + \mathbf{g} = 0, \\ \mathbf{g} = \mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1})_y \mathbf{v} + \mathbf{PA}(\mathbf{P}^{-1})_x \mathbf{v} + \mathbf{Pb}, \end{gathered}$$

y donde observemos que cada fila de la ecuación es

$$v_{ky} + \lambda_k v_{kx} + g_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D_k v_k + g_k = 0,$$

por tanto sobre la que actúa el campo característico D_k.

8.7.2. Reducción a forma diagonal de sistemas cuasi–lineales hiperbólicos.

Si nuestro sistema, que por comodidad ahora escribimos de la forma

$$\mathbf{u}_y = \mathbf{A}\mathbf{u}_x + \mathbf{b}, \tag{8.18}$$

es *cuasi lineal* de tipo hiperbólico, es decir que los términos de $\mathbf{A}$ son funciones de

$$(x, y, \mathbf{u}) = (x, y, u_1, \ldots, u_n),$$

los autovalores λ_i de $\mathbf{A}$ son reales y existe una matriz $\mathbf{P}$ no singular de funciones diferenciables que diagonaliza a $\mathbf{A}$ y suponemos además que $\mathbf{A}$

es invertible, es decir que los $\lambda_i \neq 0$, entonces podemos reducir nuestro sistema a forma diagonal introduciendo n nuevas variables

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{u}_y, \tag{8.19}$$

y reemplazando nuestro sistema n–dimensional, en la incógnita $\mathbf{u}$, por el $2n$–dimensional, en las incógnitas $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_y &= \mathbf{Q}\mathbf{v}, \qquad (\text{para } \mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}) \\ \mathbf{v}_y &= \Lambda \mathbf{v}_x + \mathbf{d}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{d}$ depende de x, y, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y esto se tiene porque por una parte, de (8.18) y (8.19) se sigue que

$$\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}_x + \mathbf{b}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_x = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Q}\mathbf{v} - \mathbf{b}),$$

y por otra diferenciando respecto de y la anterior expresión y denotando para cada función $h(x, y, \mathbf{u}(x, y))$

$$\begin{aligned} [h]_x &= \frac{\partial h(x, y, \mathbf{u}(x, y))}{\partial x} = h_x + \sum h_{u_i} u_{ix} \\ &= h_x + \sum h_{u_i} [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Q}\mathbf{v} - \mathbf{b})]_i, \\ [h]_y &= \frac{\partial h(x, y, \mathbf{u}(x, y))}{\partial y} = h_y + \sum h_{u_i} u_{iy} \\ &= h_y + \sum h_{u_i} [\mathbf{Q}\mathbf{v}]_i, \end{aligned}$$

siendo por tanto funciones de x, y, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, tendremos que

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}\mathbf{v}]_y &= [\mathbf{A}\mathbf{u}_x + \mathbf{b}]_y \\ [\mathbf{Q}]_y \mathbf{v} + \mathbf{Q}\mathbf{v}_y &= [\mathbf{A}]_y \mathbf{u}_x + \mathbf{A}\mathbf{u}_{xy} + [\mathbf{b}]_y \\ &= [\mathbf{A}]_y \mathbf{u}_x + \mathbf{A}[\mathbf{Q}\mathbf{v}]_x + [\mathbf{b}]_y \qquad \Rightarrow \\ \mathbf{v}_y &= -\mathbf{P}[\mathbf{Q}]_y \mathbf{v} + \mathbf{P}[\mathbf{A}]_y \mathbf{u}_x + \\ &\quad + \mathbf{P}\mathbf{A}([\mathbf{Q}]_x \mathbf{v} + \mathbf{Q}\mathbf{v}_x) + \mathbf{P}[\mathbf{b}]_y \\ &= \Lambda \mathbf{v}_x - \mathbf{P}[\mathbf{Q}]_y \mathbf{v} + \mathbf{P}[\mathbf{A}]_y \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Q}\mathbf{v} - \mathbf{b}) + \\ &\quad + \mathbf{P}\mathbf{A}[\mathbf{Q}]_x \mathbf{v} + \mathbf{P}[\mathbf{b}]_y. \end{aligned}$$

8.8. Apéndice

8.8.1. Transformada de Legendre.

Ejemplo 8.8.1 Transformada de Legendre en $\mathbb{R}$. Sea z una función en la recta en la que tenemos la coordenada x, tal que $\xi = z'(x)$ también sea coordenada, es decir que

$$z''(x)dx = d\xi \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z''(x) \neq 0,$$

lo cual equivale a que, en el intervalo en el que está definida, z sea cóncava o convexa.

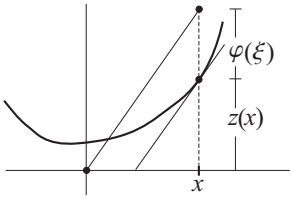


Figura 8.1. Transformada de Legendre

Definición. En tales condiciones llamamos *transformada de Legendre de la pareja* (z, x) a la pareja (φ, ξ), formada por la función de la recta, $\varphi = x\xi - z$ y la coordenada ξ.

Además se tiene que

$$\begin{array}{l} x = \varphi'(\xi), \\ \xi = z'(x) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} dx = \varphi''(\xi)d\xi \\ d\xi = z''(x)dx \end{array} \quad \Rightarrow \quad \varphi''(\xi) = \frac{1}{z''(x)},$$

por tanto para cualquier función F

$$F(x, z, z', z'') = F(\varphi', \xi\varphi' - \varphi, \xi, \frac{1}{\varphi''}) = G(\xi, \varphi, \varphi', \varphi''),$$

y z es solución de la ecuación definida por $F = 0$ si y sólo si su transformada φ lo es de $G = 0$.

Definición. Dada una función z en un abierto coordenado $(U; x_i)$, tal que $\det(z_{x_i x_j}) \neq 0$, lo cual equivale a que $\xi_i = z_{x_i}$ sea sistema de coordenadas; llamamos *transformada de Legendre de la pareja formada por la función y el sistema de coordenadas* $(z; x_i)$ a la pareja formada por la función y el sistema de coordenadas

$$\varphi = \sum \xi_i x_i - z; \qquad \xi_i = z_{x_i}.$$

Proposición 8.37 *La transformada de Legendre es involutiva, es decir si la transformada de* $(z; x_i)$ *es* $(\varphi; \xi_i)$*, la de esta es* $(z; x_i)$ *y se tiene que*

$$(z_{x_i x_j}) = (\varphi_{\xi_i \xi_j})^{-1}.$$

Demostración. La transformada de $(\varphi; \xi_i)$ tiene coordenadas φ_{ξ_i} que a su vez son las componentes de

$$\sum \varphi_{\xi_i} d\xi_i = d\varphi = d(\sum \xi_i x_i - z) = \sum x_i d\xi_i,$$

por tanto $\varphi_{\xi_i} = x_i$, y la función es $\sum x_i \xi_i - \varphi = z$.

La igualdad de las matrices se sigue de que

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_i \xi_k} z_{x_k x_j} = \sum_{k=1}^{n} (x_i)_{\xi_k} (\xi_k)_{x_j} = (x_i)_{x_j} = \delta_{ij}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 8.8.1 Demostrar que la transformada de Legendre de $z(x) = x^p/p$, para $p \neq 0$ es $\varphi(\xi) = \xi^q/q$ para p, q conjugados, es decir $(1/p) + (1/q) = 1$.

Ejercicio 8.8.2 Demostrar que si (φ, ξ) es la transformada de Legendre de (z, x), entonces la envolvente de la familia de rectas, parametrizada por ξ,

$$y = \xi \cdot x - \varphi(\xi),$$

es la curva $y = z(x)$.

Ejemplo 8.8.2 Transformada de Legendre en $\mathbb{R}^2$. Sea z una función en el plano con coordenadas (x, y), tal que $\xi = z_x, \eta = z_y$ sean sistema de coordenadas o equivalentemente que

$$z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 \neq 0,$$

(ver el siguiente ejercicio en el que se caracterizan las que no satisfacen esta propiedad), entonces por (8.37) se tienen las relaciones entre $(z; x, y)$ y su transformada $(\varphi; \xi, \eta)$,

$$\varphi = xz_x + yz_y - z, \quad \varphi_\xi = x, \quad \varphi_\eta = y$$
$$z = \xi\varphi_\xi + \eta\varphi_\eta - \varphi, \quad z_x = \xi, \quad z_y = \eta,$$
$$\Delta = \varphi_{\xi\xi}\varphi_{\eta\eta} - \varphi_{\eta\xi}^2 = \frac{1}{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2},$$
$$z_{xx} = \frac{\varphi_{\eta\eta}}{\Delta}, \quad z_{yx} = -\frac{\varphi_{\eta\xi}}{\Delta}, \quad z_{xy} = -\frac{\varphi_{\xi\eta}}{\Delta}, \quad z_{yy} = \frac{\varphi_{\xi\xi}}{\Delta}$$

Por lo tanto z es solución de una EDP

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) = 0,$$

tal que $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 \neq 0$, si y sólo si φ es solución de la EDP

$$G(\xi, \eta, \varphi, \varphi_\xi, \varphi_\eta, \varphi_{\xi\xi}, \varphi_{\xi\eta}, \varphi_{\eta\eta}) = 0,$$

para la función

$$G(\xi, \eta, \varphi, p, q, r, s, t) = F(p, q, p\xi + q\eta - \varphi, \xi, \eta, \frac{t}{rt - s^2}, -\frac{s}{rt - s^2}, \frac{r}{rt - s^2}),$$

tal que $\varphi_{\xi\xi}\varphi_{\eta\eta} - \varphi_{\eta\xi}^2 \neq 0$.

Por ejemplo a cada solución de la EDP cuasi–lineal

$$a(z_x, z_y)z_{xx} + 2b(z_x, z_y)z_{xy} + c(z_x, z_y)z_{yy} = 0,$$

satisfaciendo

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 \neq 0,$$

le corresponde una solución de la EDP lineal

$$c(\xi, \eta)\varphi_{\xi\xi} - 2b(\xi, \eta)\varphi_{\xi\eta} + a(\xi, \eta)\varphi_{\eta\eta} = 0.$$

Ejercicio 8.8.3 Una superficie $\{z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$, definida por una función del plano f, es desarrollable si y sólo si f es solución de la EDP

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0.$$

Ejercicio 8.8.4 Demostrar que todas las soluciones de $z_x z_y = 1$ y $xz_x + yz_y = z$ son superficies desarrollables y que $xz_x + yz_y = z + z_x^2 + z_y^2$ tiene una solución no desarrollable.

Ejercicio 8.8.5 Aplicar la transformada de Legendre para resolver $z_x z_y = x$.

Ejercicio 8.8.6 Aplicar la transformada de Legendre para encontrar las soluciones no desarrollables de las EDP

$$z_x z_y^3 z_{yy} - z_x^3 z_y z_{xx} - x z_y^3 (z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2) + y z_x^3 (z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2) = 0, \qquad (1)$$

$$z_y^2 z_{xx} + 2 z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} + 2x z_x z_{xx} z_{yy} - 2x z_x z_{xy}^2 = 0. \qquad (2)$$

Ejercicio 8.8.7 Demostrar que f es solución de la EDP de las superficies mínimas

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2 z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0,$$

si y sólo si la superficie $z = f(x, y)$ tiene curvatura media nula en todo punto.

8.9. Ejercicios resueltos

Ejercicio 8.4.2.- Consideremos la EDP de ondas

$$k^2 z_{xx} - z_{tt} = 0,$$

definir el ODL asociado, su símbolo, decir de que tipo es, reducirla a forma canónica y resolverla. (a) Encontrar la solución que satisface las condiciones, para $x \in \mathbb{R}$

$$z(x,0) = h(x), \quad z_t(x,0) = g(x),$$

y demostrar que es única.

(b) Demostrar que si z es solución y se anula en el infinito de x, uniformemente en t (i.e. $\forall \epsilon > 0$, $\exists M > 0$: si $|x| \geq M$, $|z(x,t)| \leq \epsilon$), entonces $z = 0$.

Solución.-

$$P = k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$
$$\mathbf{T} = k^2 \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \otimes \frac{\partial}{\partial t},$$

$a = k^2$, $b = 0$, $c = -1$, por tanto el tipo es $ac - b^2 = -k^2$ (hiperbólico),

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(dx + \lambda dt, dx + \lambda dt) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad k^2 - \lambda^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = \pm k \end{aligned}$$

por tanto $\omega_1 = dx + kdt = du$, para $u = x + kt$ y $\omega_2 = dx - kdt = dv$, para $v = x - kt$ y como en estas coordenadas $\mathbf{T}(du, dv) = 2k^2$ y $[P,u](1) = [P,v](1) = P(1) = 0$,

$$\mathbf{T} = 2k^2 \left(\frac{\partial}{\partial u} \otimes \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \otimes \frac{\partial}{\partial u} \right), \qquad P = 4k^2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}.$$

(a) Por tanto nuestra ecuación en las nuevas coordenadas es

$$\begin{aligned} z_{uv} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z_u = f(u) \\ &\Leftrightarrow \quad z = F(u) + G(v). \end{aligned}$$

y en las coordenadas (x,t), $z(x,t) = F(x+kt) + G(x-kt)$, por tanto la solución pedida satisface, para $\chi(x) = \int_0^x g(t)dt$:

$$\begin{aligned} z(x,0) = h(x) = F(x) + G(x) \\ z_t(x,0) = g(x) = kF'(x) - kG'(x) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad 2kF'(x) = kh'(x) + \chi'(x)$$
$$\Rightarrow \quad F(x) = \frac{h(x)}{2} + \frac{\chi(x)}{2k} + k_0,$$

para una constante k_0 y tenemos

$$\begin{aligned} z(x,t) = F(x+kt) + G(x-kt) = F(x+kt) + h(x-kt) - F(x-kt) \\ = \frac{h(x+kt) + h(x-kt)}{2} + \frac{\chi(x+kt) - \chi(x-kt)}{2k} \end{aligned}$$

Veamos la unicidad: si hubiese dos soluciones su diferencia z sería solución verificando $z(x,0) = z_t(x,0) = 0$, pero toda solución es de la forma $z(x,t) = F(x+kt) + G(x-kt)$, por tanto $z = 0$ pues

$$\begin{array}{l} z(x,0) = 0 = F(x) + G(x) \\ z_t(x,0) = 0 = kF'(x) - kG'(x) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 0 = F + G \\ F = G + \text{cte} \end{array} \quad \Rightarrow \quad G = \text{cte} = -F.$$

(b) La condición de que z se anule en el infinito implica que para toda función $t(x)$, $\lim_{|x|\to\infty} z(x,t(x)) = 0$, por tanto como la solución es de la forma $z = F(x+kt) + G(x-kt)$, tendremos para $t_1(x) = (x-x_0)/k$ y $t_2(x) = (x_0-x)/k$, que

$$F(2x-x_0) + G(x_0) \to 0, \quad F(x_0) + G(2x-x_0) \to 0,$$

por tanto existen los límites

$$\lim_{|x|\to\infty} F(x) = -G(x_0), \quad \lim_{|x|\to\infty} G(x) = -F(x_0),$$

y F y G son constantes contrarias, pues x_0 es arbitraria, y $z = 0$.

Ejercicio 8.4.3.- Consideremos la EDP

$$yz_{xx} - xz_{yy} - \frac{y}{2x}z_x + \frac{x}{2y}z_y = 0,$$

definir el ODL asociado, su símbolo, decir en que región es de tipo hiperbólico y resolverla, si es posible, reduciéndola antes a forma canónica. Decir cuales son sus curvas características.

Solución.-

$$P = y\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{y}{2x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{2y}\frac{\partial}{\partial y},$$
$$\mathbf{T} = y\frac{\partial}{\partial x}\otimes\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\otimes\frac{\partial}{\partial y},$$

$a = y$, $b = 0$, $c = -x$, por tanto el tipo $ac - b^2 = -xy$ es hiperbólico en el primer ($\{x > 0, y > 0\}$) y tercer ($\{x < 0, y < 0\}$) cuadrantes,

$$\mathbf{T}(dx + \lambda dy, dx + \lambda dy) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y - x\lambda^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{\frac{y}{x}}$$

por tanto podemos considerar

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1 = dx + \sqrt{\dfrac{y}{x}}dy \\ \omega_2 = dx - \sqrt{\dfrac{y}{x}}dy \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\omega_1 = d(x^{3/2} + y^{3/2}) \\ \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\omega_2 = d(x^{3/2} - y^{3/2}) \end{array}$$

por tanto para las coordenadas $v_1 = x^{3/2} + y^{3/2}$, $v_2 = x^{3/2} - y^{3/2}$, sus curvas características son $v_1 = cte$, $v_2 = cte$, y como

$$[[P, v_1], v_1] = [[P, v_2], v_2] = [P, v_1](1) = [P, v_2](1) = P(1) = 0,$$

nuestro operador es proporcional a

$$\frac{\partial^2}{\partial v_1 \partial v_2},$$

y nuestra ecuación es

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v_1 \partial v_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial v_1} = f(v_1)$$
$$\Leftrightarrow \quad z = F(v_1) + G(v_2) = F(x^{3/2} + y^{3/2}) + G(x^{3/2} - y^{3/2}).$$

Ejercicio 8.4.5.- Consideremos la EDP

$$x^2 z_{xx} - 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} + 2xz_x = 0,$$

decir en qué región es parabólica, resolverla, si es posible, reduciéndola antes a forma canónica y decir cuales son sus curvas características.

Solución.- En este caso $ac - b^2 = 0$, por tanto es parabólica en todo el plano. Si su 1–forma isótropa es proporcional a $dx + \lambda dy$, tendremos que

$$\mathbf{T}(dx + \lambda dy, dx + \lambda dy) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - \lambda y)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{x}{y},$$

por tanto podemos tomar

$$\omega = ydx + xdy = d(xy),$$

por tanto sus curvas características son las hipérbolas $xy = cte$. Y en las coordenadas $u = xy$, $v = y$, tendremos que

$$[[P, u], u] = [[P, u], v] = [P, u](1) = [P, v](1) = P(1) = 0,$$
$$\frac{[[P, v], v]}{2} = \mathbf{T}(dv, dv) = v^2,$$

por lo que nuestro operador es

$$v^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2},$$

y nuestra ecuación es en las nuevas coordenadas

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial v} = f(u) \quad \Leftrightarrow \quad z = f(u)v + g(u) = f(xy)y + g(xy).$$

Ejercicio 8.6.1.- Demostrar que si z es una solución elíptica ó hiperbólica de una EDP cuasi–lineal

$$az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + g = 0,$$

y (u, v) son coordenadas características, entonces

$$\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{(x_u y_v - x_v y_u)^2}{2\sqrt{b^2 - ac}} g.$$

Solución. Tenemos que

$$z_u = px_u + qy_u, \quad z_v = px_v + qy_v \quad \Rightarrow \quad z_{uv} = p_v x_u + px_{uv} + q_v y_u + qy_{uv},$$

por tanto

$$\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & p_v x_u + p x_{uv} \\ x_u & y_u & p x_u \\ x_v & y_v & p x_v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & q_v y_u + q y_{uv} \\ x_u & y_u & q y_u \\ x_v & y_v & q y_v \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & p_v x_u \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & q_v y_u \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (p_v x_u + q_v y_u)(x_u y_v - x_v y_u)$$

$$= (p_v \lambda_2 + q_v) y_u (x_u y_v - x_v y_u)$$

$$= -\frac{g}{c} y_v y_u (x_u y_v - x_v y_u) = \frac{(x_u y_v - x_v y_u)^2}{2\sqrt{b^2 - ac}} g,$$

donde la última igualdad se sigue de las dos primeras ecuaciones características, ya que $x_u y_v - x_v y_u = (\lambda_2 - \lambda_1) y_u y_v$. ∎

Ejercicio 8.6.2.- Demostrar que la EDP de las superficies mínimas

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2 z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0,$$

es elíptica y se puede reducir a las ecuaciones de Laplace en las coordenadas características $(u = u_1 + i u_2, \overline{u} = u_1 - i u_2)$

$$x_{u_1 u_1} + x_{u_2 u_2} = 0, \quad y_{u_1 u_1} + y_{u_2 u_2} = 0, \quad z_{u_1 u_1} + z_{u_2 u_2} = 0,$$

sujetas a las condiciones

$$x_{u_1}^2 + y_{u_1}^2 + z_{u_1}^2 = x_{u_2}^2 + y_{u_2}^2 + z_{u_2}^2,$$
$$x_{u_1} x_{u_2} + y_{u_1} y_{u_2} + z_{u_1} z_{u_2} = 0.$$

Solución. Consideremos una solución z, y su símbolo

$$\mathbf{T} = (1 + z_y^2) \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} - z_x z_y \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} - z_x z_y \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + (1 + z_x^2) \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y},$$

ahora bien como la matriz de la métrica g correspondiente, es la inversa de la de $\mathbf{T}$, tendremos que

$$g = \frac{(1 + z_x^2) dx \otimes dx + z_x z_y (dx \otimes dy + dy \otimes dx) + (1 + z_y^2) dy \otimes dy}{1 + z_x^2 + z_y^2},$$

si ahora consideramos las coordenadas características correspondientes $(u, \overline{u})$, entonces

$$\mathbf{T}(du, du) = 0, \qquad \mathbf{T}(d\overline{u}, d\overline{u}) = 0,$$

por tanto

$$0 = g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = (1 + z_x^2) x_u^2 + 2 z_x z_y x_u y_u + (1 + z_y^2) y_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$

$$0 = g\left(\frac{\partial}{\partial \overline{u}}, \frac{\partial}{\partial \overline{u}}\right) = (1 + z_x^2) x_{\overline{u}}^2 + 2 z_x z_y x_{\overline{u}} y_{\overline{u}} + (1 + z_y^2) y_{\overline{u}}^2 = x_{\overline{u}}^2 + y_{\overline{u}}^2 + z_{\overline{u}}^2,$$

y tomando la parte real y la imaginaria de la primera se tiene

$$x_{u_1}^2 + y_{u_1}^2 + z_{u_1}^2 = x_{u_2}^2 + y_{u_2}^2 + z_{u_2}^2,$$
$$x_{u_1}x_{u_2} + y_{u_1}y_{u_2} + z_{u_1}z_{u_2} = 0,$$

y si derivamos cada una de las ecuaciones respecto de "la otra" variable, tendremos que

$$0 = x_u x_{u\overline{u}} + y_u y_{u\overline{u}} + z_u z_{u\overline{u}},$$
$$0 = x_{\overline{u}} x_{u\overline{u}} + y_{\overline{u}} y_{u\overline{u}} + z_{\overline{u}} z_{u\overline{u}},$$

y como por el ejercicio anterior tenemos que

$$\begin{vmatrix} x_{u\overline{u}} & y_{u\overline{u}} & z_{u\overline{u}} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_{\overline{u}} & y_{\overline{u}} & z_{\overline{u}} \end{vmatrix} = 0,$$

pues $g = 0$, tendremos que la primera fila F_1 es combinación de las otras dos F_2 y F_3 (que son independientes pues $x_u y_{\overline{u}} - y_u x_{\overline{u}} \neq 0$), $F_1 = \lambda F_2 + \mu F_3$, lo cual implica por lo anterior, que

$$(x_{u\overline{u}})^2 + (y_{u\overline{u}})^2 + (z_{u\overline{u}})^2 = F_1 \cdot F_1 = \lambda F_2 \cdot F_1 + \mu F_3 \cdot F_1 = 0,$$

y por tanto

$$(x_{u_1u_1} + x_{u_2u_2})^2 + (y_{u_1u_1} + y_{u_2u_2})^2 + (z_{u_1u_1} + z_{u_2u_2})^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_{u_1u_1} + x_{u_2u_2} = 0, \\ y_{u_1u_1} + y_{u_2u_2} = 0, \\ z_{u_1u_1} + z_{u_2u_2} = 0. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Ejercicio 8.6.3.- Demostrar que la EDP de las superficies mínimas, para la métrica de Minkowsky,[4]

$$z_{xx}(z_y^2 - 1) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(z_x^2 - 1) = 0,$$

[4]Consideramos en $\mathbb{R}^3$ la métrica de Minkowski $dx \otimes dx + dy \otimes dy - dz \otimes dz$ y las superficies $\{z = f(x,y)\}$ en las que la métrica inducida g sea no singular (i.e. $EG - F^2 \neq 0$), por tanto sin radical. Consideremos en cada superficie la 2–forma de área, que en coordenadas $(v_1 = x, v_2 = y)$ es (si $EG - F^2 < 0$)

$$\partial_1 = \partial_x + z_x\partial_z, \quad \partial_2 = \partial_y + z_y\partial_z,$$
$$E = g(\partial_1,\partial_1) = 1 - z_x^2, \quad F = g(\partial_1,\partial_2) = -z_x z_y, \quad G = g(\partial_2,\partial_2) = 1 - z_y^2,$$
$$\sqrt{F^2 - EG}\, dx \wedge dy = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 - 1}.$$

y la EDP de las superficies mínimas es la Ecuación de Euler–Lagrange para esta lagrangiana

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 - 1}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 - 1}}\right) = 0,$$

es hiperbólica y que se puede reducir a las ecuaciones de ondas en las coordenadas características $(u = u_1 + u_2, v = u_1 - u_2)$, es decir

$$x_{u_1u_1} - x_{u_2u_2} = 0, \quad y_{u_1u_1} - y_{u_2u_2} = 0, \quad z_{u_1u_1} - z_{u_2u_2} = 0,$$

sujetas a las condiciones

$$x_u^2 + y_u^2 - z_u^2 = x_v^2 + y_v^2 - z_v^2 = 0.$$

Solución. Consideremos su símbolo

$$\mathbf{T} = (z_y^2 - 1)\frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} - z_x z_y \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} - z_x z_y \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + (z_x^2 - 1)\frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y},$$

ahora bien como la matriz de la métrica correspondiente, es la inversa de la de $\mathbf{T}$, tendremos que la métrica es

$$\frac{(z_x^2 - 1)dx \otimes dx + z_x z_y(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + (z_y^2 - 1)dy \otimes dy}{1 - z_x^2 - z_y^2},$$

que es proporcional a g, la que hereda del espacio. Si ahora consideramos las coordenadas características correspondientes (u, v), entonces

$$\mathbf{T}(du, du) = 0, \qquad \mathbf{T}(dv, dv) = 0,$$

por tanto

$$0 = g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = (z_x^2 - 1)x_u^2 + 2z_x z_y x_u y_u + (z_y^2 - 1)y_u^2 = z_u^2 - x_u^2 - y_u^2,$$
$$0 = g\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = (z_x^2 - 1)x_v^2 + 2z_x z_y x_v y_v + (z_y^2 - 1)y_v^2 = z_v^2 - x_v^2 - y_v^2,$$

y si derivamos cada una de las ecuaciones respecto de "la otra" variable, tendremos que para $D = x_{uv}\partial_x + y_{uv}\partial_y + z_{uv}\partial_z$

$$\begin{array}{l} 0 = x_u x_{uv} + y_u y_{uv} - z_u z_{uv}, \\ 0 = x_v x_{uv} + y_v y_{uv} - z_v z_{uv}, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = g(D, \partial_u), \\ 0 = g(D, \partial_v), \end{array}$$

por tanto $D = 0$, pues g no tiene radical y D es tangente a la superficie, pues para $p = z_x$ y $q = z_y$, $z_{uv} = px_{uv} + qy_{uv}$, ya que $z_u = px_u + qy_u$ y derivando y teniendo en cuenta por (8.6), pág.646, que $x_u = \lambda_2 y_u$ y por (8.7), pág. 647, que $\lambda_2 p_v = -q_v$, tenemos

$$z_{uv} = p_v x_u + px_{uv} + q_v y_u + qy_{uv} = px_{uv} + qy_{uv}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 8.8.3.- Una superficie $\{z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$, definida por una función del plano f, es desarrollable si y sólo si f es solución de la EDP

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0.$$

Solución. Las superficies desarrollables son (localmente) las que tienen nula la curvatura de Gauss, es decir el determinante del *operador de Weingarten*, (ver la pág.181) definido en la superficie $\mathcal{S} = \{z = f(x, y)\}$ de la forma

$$\phi\colon \mathcal{D}(\mathcal{S}) \to \mathcal{D}(\mathcal{S}), \quad \phi(D) = -D^{\nabla}N,$$

para N el vector unitario, normal a la superficie, es decir

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\left(-f_x\frac{\partial}{\partial x} - f_y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Si consideramos la base de campos $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$, definida por la aplicación

$$F(x,y) = (x,y,f(x,y)), \qquad \begin{aligned} D_1 &= F_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} + f_x\frac{\partial}{\partial z}, \\ D_2 &= F_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y} + f_y\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

tendremos que para $k = 1/\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$

$$k_x = -(f_x f_{xx} + f_y f_{xy})k^3, \quad k_y = -(f_x f_{xy} + f_y f_{yy})k^3,$$

y puesto que las componentes de N no dependen de z, tendremos que sobre ellas $D_1 = \partial_x$ y $D_2 = \partial_y$, por lo que

$$\begin{aligned} \phi(D_1) = -D_1^\nabla N &= D_1^\nabla\left(kf_x\frac{\partial}{\partial x} + kf_y\frac{\partial}{\partial y} - k\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= (kf_x)_x\frac{\partial}{\partial x} + (kf_y)_x\frac{\partial}{\partial y} - k_x\frac{\partial}{\partial z} \\ &= (kf_x)_x D_1 + (kf_y)_x D_2 \\ \phi(D_2) &= (kf_x)_y D_1 + (kf_y)_y D_2, \end{aligned}$$

por lo que el determinante es

$$(k_x f_x + kf_{xx})(k_y f_y + kf_{yy}) - (k_x f_y + kf_{yx})(k_y f_x + kf_{yx}) = k^4(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2). \quad \blacksquare$$

Ejercicio 8.8.5.- Aplicar la transformada de Legendre para resolver la EDP $z_x z_y = x$.

Solución.- Esta ecuación se transforma en $\xi\eta = \varphi_\xi$, la cual tiene solución

$$\varphi = \frac{1}{2}\xi^2\eta + f(\eta),$$

y las soluciones (no desarrollables) de nuestra ecuación original se obtienen eliminando ξ y η del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= \xi\eta, \\ y &= \varphi_\eta = \frac{1}{2}\xi^2 + f'(\eta), \\ z &= x\xi + y\eta - \varphi = \xi^2\eta + \eta f'(\eta) - f(\eta), \end{aligned}$$

ahora para encontrar las soluciones desarrollables derivemos la ecuación respecto de x e y

$$\begin{aligned} z_{xx}z_y + z_x z_{xy} &= 1, \\ z_{xy}z_y + z_x z_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

y z es una solución desarrollable si y sólo si $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0$, lo cual equivale a que $z_{yy} = z_{xy} = 0$ y esto a que z_y sea constante y como $z_x z_y = x$, tendremos que las soluciones desarrollables tienen la forma

$$z = ay + \frac{1}{2a}x^2 + b,$$

donde a y b son constantes arbitrarias.

Ejercicio 8.8.7.- Demostrar que f es solución de la EDP de las superficies mínimas

$$z_{xx}(1+z_y^2) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1+z_x^2) = 0,$$

si y sólo si la superficie $z = f(x,y)$ tiene curvatura media nula en todo punto.

Solución.- La curvatura media es la traza del *operador de Weingarten* (ver la pág.181) definido en la superficie $\mathcal{S} = \{z = f(x,y)\}$, que siguiendo el ejercicio (8.8.3), vale[5]

$$\operatorname{traz}\phi = (kf_x)_x + (kf_y)_y = 0. \quad \blacksquare$$

[5] Ver el ejemplo (7.10.2), pág.512, donde hemos obtenido la EDP de las superficies mínimas mediante la ecuación de *Euler–Lagrange*, es decir

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right) = 0,$$

que es la considerada en el enunciado del ejercicio multiplicada por la inversa de la función $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}^{\,3}$. Este es un buen ejemplo de que no siempre se debe simplificar una ecuación si esta es canónica y las obtenidas por métodos variacionales tienen todo el aspecto de serlo.

8.10. Bibliografía y comentarios

COURANT,R. AND HILBERT, D.: "*Methods of Mathematical Phisics. Vol. I y II, Partial Differential Equations*". J.Wiley, 1962.

DIEUDONNÉ, J.: "*Elementos de Análisis*". Tomo IV. Ed. Reverté, 1983.

EGOROV, YU.V. AND SHUBIN, M.A. (EDS.): "*Partial Differential Equations Vol.I.*". Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 30. Springer–Verlag, 1992.

GAMKRELIDGE, R.V. (ED.): "*Geometry, Vol.I.*". Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 28. Springer–Verlag, 1991.

GARABEDIAN, P.R.: "*Partial Differential Equations*". Chelsea, 1986.

GOCKELER, M. AND SCHUCKER, T.: "*Differential geometry, gauge theories, and gravity*". Cambridge Univ. Press, 1987.

GODBILLON, C.: "*Elements de Topologie Algebrique*". Hermann, Paris, 1971.

SPIVAK, M.: "*A comprehensive Introduction to Differential Geometry*". 5 Vol. Publish or Perish, 1975. (Vol.IV y Vol.V.)

VLADIMIROV, V.S.: "*Equations of Mathematical Phisics*". Marcel Dekker, 1971.

En la primera lección hemos seguido el DIEUDONNÉ, pero debemos advertir que lo que el autor dice en la pág.112, sobre la dimensión de los elementos integrales del sistema de Pfaff generado por dF, ω, ω_1 y ω_2, es verdad para $n = 2$, pero falso para $n \geq 3$.

Hemos utilizado el GAMKRELIDGE, R.V., para la definición de ODL, en el EGOROV, YU.V. AND SHUBIN, M.A. y el GOCKELER, M. AND SCHUCKER, T. se encuentra la expresión en coordenadas del operador de *Laplace–Beltrami* y en este último y el clásico de GODBILLON, C. podemos encontrar la definición del operador $*$ de *Hodge* y las demostraciones de sus propiedades, así como las del operador de *Laplace–Beltrami*.

Para el tema en su conjunto hemos seguido fundamentalmente el GARABEDIAN, P.R., el COURANT,R. AND HILBERT, D. y el SPIVAK, M..

Finalizamos estos comentarios con una teoría que no hemos tratado en el tema pero que hemos visto en ejercicios (ver pág.668) y es de una gran importancia: La teoría de las superficies mínimas.

En *1760* J.L.LAGRANGE (*1736–1813*) inicia el estudio de las superficies mínimas —que él ve como superficies de mínima área con el borde fijo—, como una aplicación de sus estudios acerca del cálculo de variaciones (ver la Nota (7.10.2) de la pág.512). A MEUSNIER se debe el descubrimiento de las dos superficies mínimas elementales: El catenoide y el helicoide recto. Y para caracterizarlas utiliza la frase

"*... son superficies para las que las curvaturas principales k_1 y k_2 son iguales y de distinto signo*".

Es decir son superficies con curvatura media $H = (k_1 + k_2)/2$ nula (ver el ejercicio (8.8.7) de la pág.668). (La noción de curvatura media aparece por primera vez en un trabajo de St. Germain de *1831*). Esta definición de superficie mínima es más correcta y la propiedad de ser de "mínima área" es una propiedad similar a la de las geodésicas que son de "longitud mínima" en general.

El significado eminentemente físico de la curvatura media H, fue reconocido en *1805* y *1806* por T.Young y P.S.Laplace en sus investigaciones sobre el ascenso de un líquido en un tubo capilar:

"*La diferencia de presión cerca de un interfaz es proporcional a la curvatura media del interfaz en ese punto*".

Aquí interfaz es la superficie que separa el líquido del medio en el que se encuentra. Remitimos al lector a la pág.22 del libro

Nitsche, J.C.: "*Lectures on minimal surfaces. Vol.1*". Cambridge Univ. Press, 1989.

Por último Plateau consiguió en *1873* superficies mínimas de película jabonosa, introduciendo un alambre en forma de curva alabeada cerrada, en una solución de jabón.

Fin del Tema 8

Tema 9

El problema de Cauchy

Con este título entendemos el problema de determinar la solución de una EDP (ó de un sistema de EDP) que satisfaga ciertas condiciones predeterminadas. En este tema estudiaremos en primer lugar la existencia y unicidad de solución de una EDP de segundo orden en el plano, satisfaciendo condiciones dadas sobre una curva, y en segundo lugar la dependencia continua de la solución respecto de los datos iniciales.

9.1. Sistemas de EDP de primer orden

Consideremos una EDP de segundo orden en el plano

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) = 0,$$

ahora bien si $F_t \neq 0$, podemos aplicar el **Teorema de las funciones implícitas** y expresar la EDP de la forma

$$z_{yy} = f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}). \tag{9.1}$$

Si $z = z(x, y)$ es solución de esta EDP, entonces las funciones

$$u_3 = z,\ u_4 = z_x,\ u_5 = z_y,\ u_6 = z_{xx},\ u_7 = z_{xy},\ u_8 = z_{yy}, \tag{9.2}$$

son solución del sistema de EDP de primer orden

$$\begin{aligned} &(a)\quad u_{3y}=u_5, \quad (b)\quad u_{4y}=u_7, \quad (c)\quad u_{5y}=u_8,\\ &(d)\quad u_{6y}=u_{7x}, \quad (e)\quad u_{7y}=u_{8x},\\ &(f)\quad u_{8y}=f_y+f_zu_5+f_pu_7+f_qu_8+f_ru_{7x}+f_su_{8x}, \end{aligned} \tag{9.3}$$

y aunque no es cierto que para toda solución $u_3, u_4, \ldots, u_8$ de este sistema (9.3), la función $z = u_3$ sea solución de (9.1), sí es cierta la equivalencia si le imponemos ciertas condiciones.

Observemos que si $z = z(x, y)$ es una solución de (9.1), en un entorno de un punto (x_0, y_0), satisfaciendo las condiciones

$$z(x,y_0)=\phi(x), \quad z_y(x,y_0)=\chi(x), \tag{9.4}$$

entonces también se tiene que

$$\begin{gathered} z_x(x,y_0)=\phi'(x), \quad z_{xx}(x,y_0)=\phi''(x), \quad z_{xy}(x,y_0)=\chi'(x),\\ z_{yy}(x,y_0)=f(x,y_0,\phi(x),\phi'(x),\chi(x),\phi''(x),\chi'(x)), \end{gathered}$$

lo cual implica que la solución correspondiente, (9.2) de (9.3), satisface las condiciones

$$\begin{aligned} &u_3(x,y_0)=\phi(x), && u_4(x,y_0)=\phi'(x),\\ &u_5(x,y_0)=\chi(x), && u_6(x,y_0)=\phi''(x),\\ &u_7(x,y_0)=\chi'(x),\\ &u_8(x,y_0)=f(x,y_0,\phi(x),\phi'(x),\chi(x),\phi''(x),\chi'(x)). \end{aligned} \tag{9.5}$$

Veamos ahora el recíproco.

Teorema 9.1 *Si $u_3, u_4, \ldots, u_8$ es una solución de (9.3), que satisface las condiciones (9.5), entonces $z = u_3$ es solución de (9.1) satisfaciendo las condiciones (9.4).*

Demostración. De (a) y (c) se sigue que para $z = u_3$

$$z_y=u_5, \quad z_{yy}=u_8,$$

de (e) y (c) que $z_{yx} = u_7$, pues

$$\begin{aligned} u_{7y}=u_{8x}=u_{5yx}=u_{5xy} \quad &\Rightarrow \quad \text{(integrando en } y)\\ u_7=u_{5x}+\beta(x) \quad &\Rightarrow\\ u_7(x,y_0)=u_{5x}(x,y_0)+\beta(x) \quad &\Rightarrow \quad \text{(por las condiciones iniciales)}\\ \chi'(x)=\chi'(x)+\beta(x) \quad &\Rightarrow\\ u_7=u_{5x}=z_{yx}, \quad &\text{(por ser } z_y=u_5), \end{aligned}$$

de (b) que

$$\begin{aligned} u_{4y} = u_7 = z_{xy} \quad &\Rightarrow \quad \text{(integrando en } y\text{)} \\ u_4 = z_x + \alpha(x) \quad &\Rightarrow \\ u_4(x, y_0) = z_x(x, y_0) + \alpha(x) \quad &\Rightarrow \quad \text{(por las condiciones iniciales)} \\ \phi'(x) = \phi'(x) + \alpha(x) \quad &\Rightarrow \quad u_4 = z_x, \end{aligned}$$

de (d) que

$$\begin{aligned} u_{6y} = u_{7x} = z_{xxy} \quad &\Rightarrow \quad \text{(integrando en } y\text{)} \\ u_6 = z_{xx} + \gamma(x) \quad &\Rightarrow \\ u_6(x, y_0) = z_{xx}(x, y_0) + \gamma(x) \quad &\Rightarrow \quad \text{(por las condiciones iniciales)} \\ \phi''(x) = \phi''(x) + \gamma(x) \quad &\Rightarrow \quad u_6 = z_{xx}, \end{aligned}$$

y por último de (f) que

$$\begin{aligned} z_{yyy} = u_{8y} &= f_y + f_z u_5 + f_p u_7 + f_q u_8 + f_r u_{7x} + f_s u_{8x} \\ &= f_y + f_z z_y + f_p z_{xy} + f_q z_{yy} + f_r z_{xxy} + f_s z_{xyy} \\ &= \frac{\partial f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy})}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \text{(integrando en } y\text{)} \\ z_{yy} &= f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}) + \psi(x), \end{aligned}$$

y por las condiciones iniciales tendremos que $\psi(x) = 0$, por tanto

$$z_{yy} = f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}),$$

es decir que $z = u_3$ es solución de (9.1) satisfaciendo (9.4). ∎

Nota 9.2 Observemos que el sistema (9.3) satisfaciendo las condiciones iniciales (9.5), es equivalente al sistema de EDP

$$\begin{gathered} u_{1y} = 0, \qquad u_{2y} = u_{1x}, \\ u_{3y} = u_5 u_{1x}, \quad u_{4y} = u_7 u_{1x}, \quad u_{5y} = u_8 u_{1x}, \\ u_{6y} = u_{7x}, \quad u_{7y} = u_{8x}, \\ u_{8y} = f_y u_{1x} + f_z u_5 u_{1x} + f_p u_7 u_{1x} + f_q u_8 u_{1x} + f_r u_{7x} + f_s u_{8x}, \end{gathered} \tag{9.6}$$

si consideramos las condiciones

$$\begin{aligned} &u_1(x, y_0) = x, \quad u_2(x, y_0) = y_0, \quad u_3(x, y_0) = \phi(x), \\ &u_4(x, y_0) = \phi'(x), \quad u_5(x, y_0) = \chi(x), \\ &u_6(x, y_0) = \phi''(x), \quad u_7(x, y_0) = \chi'(x), \\ &u_8(x, y_0) = f(x, y_0, \phi(x), \phi'(x), \chi(x), \phi''(x), \chi'(x)), \end{aligned} \tag{9.7}$$

pues se tiene que $u_1 = x$ y $u_2 = y$. Y este sistema es de la forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(u_1, \ldots, u_n)\frac{\partial u_j}{\partial x}, \qquad (\text{para } i = 1, \ldots, n) \tag{9.8}$$

satisfaciendo condiciones iniciales del tipo

$$u_i(x, y_0) = \phi_i(x), \qquad (\text{para } i = 1, \ldots, n) \tag{9.9}$$

Estudiaremos el **Teorema de Cauchy–Kowalewsky** en la lección 9.5, en él se prueba la existencia y unicidad de solución (u_i), del sistema (9.8), satisfaciendo las condiciones (9.9), cuando las funciones f_{ij} y ϕ_i son analíticas.

Por último observemos que si $z = z(x, y)$ es solución de (9.1), para la que

$$\begin{aligned} z(x_0, y_0) = z_0, \quad z_x(x_0, y_0) = p_0, \quad z_y(x_0, y_0) = q_0, \\ z_{xx}(x_0, y_0) = r_0, \quad z_{xy}(x_0, y_0) = s_0, \quad z_{yy}(x_0, y_0) = t_0, \end{aligned}$$

y tenemos que f está definida en un entorno del punto

$$(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0),$$

(en el que f vale t_0), entonces podemos simplificar nuestro problema considerando las nuevas variables

$$\xi = x - x_0, \qquad \eta = y - y_0,$$

y la nueva incógnita

$$\widetilde{z}(\xi, \eta) = z(\xi + x_0, \eta + y_0) - z_0 - \xi p_0 - \eta q_0 - \frac{\xi^2}{2} r_0 - \xi\eta s_0 - \frac{\eta^2}{2} t_0,$$

para las que se verifica

$$\begin{aligned} \widetilde{z}_\xi &= z_x - p_0 - \xi r_0 - \eta s_0, \\ \widetilde{z}_\eta &= z_y - q_0 - \xi s_0 - \eta t_0, \\ \widetilde{z}_{\xi\xi} &= z_{xx} - r_0, \\ \widetilde{z}_{\xi\eta} &= z_{xy} - s_0, \\ \widetilde{z}_{\eta\eta} &= z_{yy} - t_0 \\ &= f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}) - t_0 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(\xi + x_0, \eta + y_0,\\
&\quad \widetilde{z} + z_0 + \xi p_0 + \eta q_0 + \xi^2 r_0/2 + \xi\eta s_0 + \eta^2 t_0/2,\\
&\quad \widetilde{z}_\xi + p_0 + \xi r_0 + \eta s_0, \widetilde{z}_\eta + q_0 + \xi s_0 + \eta t_0,\\
&\quad \widetilde{z}_{\xi\xi} + r_0, \widetilde{z}_{\xi\eta} + s_0) - t_0\\
&= g(\xi, \eta, \widetilde{z}, \widetilde{z}_\xi, \widetilde{z}_\eta, \widetilde{z}_{\xi\xi}, \widetilde{z}_{\xi\eta}),
\end{aligned}$$

donde la función g está definida en un entorno del origen (en el que se anula), de la forma

$$\begin{aligned}
g(\xi,\eta, \widetilde{z}, p, q, r, s) &= f(\xi + x_0, \eta + y_0,\\
&\quad \widetilde{z} + z_0 + \xi p_0 + \eta q_0 + \xi^2 r_0/2 + \xi\eta s_0 + \eta^2 t_0/2,\\
&\quad p + p_0 + \xi r_0 + \eta s_0, q + q_0 + \xi s_0 + \eta t_0, r + r_0, s + s_0) - t_0,
\end{aligned}$$

y por tanto $\widetilde{z}$ es solución de la ecuación

$$\widetilde{z}_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, \widetilde{z}, \widetilde{z}_\xi, \widetilde{z}_\eta, \widetilde{z}_{\xi\xi}, \widetilde{z}_{\xi\eta}),$$

satisfaciendo las condiciones

$$\begin{aligned}
\widetilde{z}(\xi, 0) &= z(\xi + x_0, y_0) - z_0 - \xi p_0 - \xi^2 r_0/2,\\
\widetilde{z}_\xi(\xi, 0) &= z_x(\xi + x_0, y_0) - p_0 - \xi r_0,\\
\widetilde{z}_\eta(\xi, 0) &= z_y(\xi + x_0, y_0) - q_0 - \xi s_0,\\
\widetilde{z}_{\xi\xi}(\xi, 0) &= z_{xx}(\xi + x_0, y_0) - r_0,\\
\widetilde{z}_{\xi\eta}(\xi, 0) &= z_{xy}(\xi + x_0, y_0) - s_0,
\end{aligned}$$

y por tanto verificando

$$\begin{aligned}
\widetilde{z}(0, 0) = \widetilde{z}_\xi(0, 0) &= \widetilde{z}_\eta(0, 0)\\
= \widetilde{z}_{\xi\xi}(0, 0) &= \widetilde{z}_{\xi\eta}(0, 0) = \widetilde{z}_{\eta\eta}(0, 0) = 0,
\end{aligned}$$

lo cual simplifica las condiciones de una forma que nos será útil en la demostración del **Teorema de Cauchy–Kowalewski**.

9.2. Curvas características

Consideremos una ecuación *cuasi–lineal*

$$az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} = d, \tag{9.10}$$

donde a, b, c, d son funciones de x, y, z, z_x, z_y. La cuestión que planteamos en este tema consiste en encontrar una solución $z = z(x, y)$, con valores

$$z[x(t), y(t)] = z(t), \quad z_x[x(t), y(t)] = p(t), \quad z_y[x(t), y(t)] = q(t),$$

determinados sobre una curva plana, dada paramétricamente de la forma

$$x = x(t), \quad y = y(t). \tag{9.11}$$

En tales condiciones las funciones $z(t)$, $p(t)$ y $q(t)$ no pueden darse arbitrariamente, pues están relacionadas con $x(t)$ e $y(t)$ de la siguiente forma

$$z'(t) = z_x x'(t) + z_y y'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t),$$

por otra parte tendremos que si tal solución z existe, debe satisfacer las ecuaciones

$$\begin{aligned} p'(t) &= z_{xx}x'(t) + z_{xy}y'(t), \\ q'(t) &= z_{yx}x'(t) + z_{yy}y'(t), \end{aligned}$$

que junto con (9.10) definen el sistema

$$\begin{pmatrix} a & 2b & c \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ 0 & x'(t) & y'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{xx} \\ z_{xy} \\ z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ p'(t) \\ q'(t) \end{pmatrix},$$

el cual nos permite despejar las derivadas segundas de la z a lo largo de la curva siempre que

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ 0 & x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} = ay'^2 - 2bx'y' + cx'^2 \neq 0.$$

Por tanto sobre una curva que satisfaga esta propiedad los datos de Cauchy $z(t)$, $p(t)$, $q(t)$, $x(t)$ e $y(t)$ determinan las derivadas segundas

de z sobre la curva y por tanto todas las derivadas sobre la curva, pues derivando (9.10) respecto de x, y considerando $\varphi(t) = z_{xx}[x(t), y(t)]$ y $\psi(t) = z_{xy}[x(t), y(t)]$, tendremos que

$$\begin{aligned} az_{xxx} + 2bz_{xxy} + cz_{xyy} &= D, \\ x'(t)z_{xxx} + y'(t)z_{xxy} &= \varphi'(t), \\ x'(t)z_{xxy} + y'(t)z_{xyy} &= \psi'(t), \end{aligned}$$

donde D es una función de a, b, c, sus derivadas y z y sus derivadas primeras y segundas, todas ellas conocidas sobre la curva. Entonces como la matriz del sistema tiene $|\mathbf{A}| \neq 0$, podemos despejar estas derivadas terceras de la z sobre nuestra curva. Y así sucesivamente. Esto nos permite construir una solución formal en serie de potencias de $x - x_0, y - y_0$, en un punto (x_0, y_0) de la curva, la cual definirá una verdadera función en un entorno del punto si la solución z es analítica, cosa que demostraremos en el caso de que las funciones que intervienen en el problema sean analíticas.

Nota 9.3 Observemos que si para los datos de Cauchy $z(t)$, $p(t)$ y $q(t)$, se verifica

$$|\mathbf{A}| = ay'^2 - 2bx'y' + cx'^2 = 0.$$

esto significa que nuestra curva inicial $(x(t), y(t))$ es *característica* para la hipotética solución z, que sobre la curva satisface $z = z(t)$, $z_x = p(t)$ y $z_y = q(t)$, pues tal curva es tangente a uno de los campos característicos —para $a \neq 0$—

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \frac{\partial}{\partial y},$$

En cuyo caso, si nuestros datos iniciales son tales que $ac - b^2 > 0$, es decir nuestra hipotética solución es *elíptica*, no hay curvas características, si $ac - b^2 = 0$ —es decir es parabólica—, hay una familia de curvas características, y si $ac - b^2 < 0$ —es decir es hiperbólica—, hay dos familias de curvas características.

9.2.1. Propagación de singularidades.

En esta sección veremos que las curvas características están relacionadas con la propagación de cierto tipo de singularidades de la solución de una EDP.

Consideremos una EDP lineal definida en un abierto U del plano

$$P(z) = az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} + dz_x + ez_y + fz = 0,$$

donde a, b, c, d, e, f son funciones de x, y, y sea $\gamma = \{(x(t), y(t))\}$ una curva del abierto tal que $U - \gamma$ sea la unión disjunta de dos abiertos A y B. Consideremos una función u en U, tal que $u = u_1$ en A y $u = u_2$ en B, con u_1 y u_2 de clase 3 soluciones de la EDP respectivamente en $A \cup \gamma$ y $B \cup \gamma$ y tales que u es de clase 1 en U. En tal caso se tiene por continuidad que para todo t

$$\begin{aligned} u_1[x(t), y(t)] &= u_2[x(t), y(t)], \\ u_{1x}[x(t), y(t)] &= u_{2x}[x(t), y(t)], \\ u_{1y}[x(t), y(t)] &= u_{2y}[x(t), y(t)], \end{aligned} \tag{9.12}$$

y si llamamos

$$\begin{aligned} s_{11}(t) &= u_{1xx}[x(t), y(t)] - u_{2xx}[x(t), y(t)], \\ s_{12}(t) &= u_{1xy}[x(t), y(t)] - u_{2xy}[x(t), y(t)], \\ s_{22}(t) &= u_{1yy}[x(t), y(t)] - u_{2yy}[x(t), y(t)], \end{aligned}$$

entonces se tiene que estas tres funciones no son independientes, pues derivando las dos últimas ecuaciones de (9.12) se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= x's_{11} + y's_{12}, \\ 0 &= x's_{12} + y's_{22}, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$s_{12} = -\frac{x'}{y'}s_{11} \qquad s_{22} = -\frac{x'}{y'}s_{12} = \frac{x'^2}{y'^2}s_{11}, \tag{9.13}$$

y por otra parte considerando $P(u_1) - P(u_2) = 0$ sobre la curva, teniendo en cuenta (9.12), se sigue que

$$as_{11} + 2bs_{12} + cs_{22} = 0,$$

lo cual implica que

$$\begin{pmatrix} a & 2b & c \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ 0 & x'(t) & y'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix} = 0,$$

y si el determinante de la matriz es no nulo (es decir la curva no es característica), hay solución única $s_{ij} = 0$ y no hay saltos en las derivadas segundas, por lo que nuestra solución u sería de clase 2, pero si el determinante se anula, la curva es característica y en tal caso para

$$s_{111}(t) = u_{1xxx}[x(t), y(t)] - u_{2xxx}[x(t), y(t)], \quad s_{112} = \cdots,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} s'_{11} &= x' s_{111} + y' s_{112}, \\ s'_{12} &= x' s_{112} + y' s_{122}, \end{aligned}$$

y aplicando (9.13) se tiene que

$$\begin{aligned} y'^2(as_{111} + 2bs_{112} + cs_{122}) &= y'^2 as_{111} + 2by'(s'_{11} - s_{111}x') + \\ &\quad + c(y's'_{12} - s_{112}x'y') \\ &= s_{111}(y'^2 a - 2bx'y') + 2by's'_{11} + \\ &\quad + cy's'_{12} - cx'(s'_{11} - s_{111}x') \\ &= s_{111}(y'^2 a - 2bx'y' + x'^2 c) + \\ &\quad + s'_{11}(2by' - cx') + cy'\left(-\frac{x'}{y'}s_{11}\right)' \\ &= 2s'_{11}(by' - cx') - cy'\left(\frac{x'}{y'}\right)' s_{11}, \end{aligned}$$

y si derivamos $P(u_1) = 0$ y $P(u_2) = 0$ respecto de x, las restamos y el resultado se evalúa sobre la curva, tendremos que

$$\begin{aligned} 0 = {} & as_{111} + 2bs_{112} + cs_{122} + a_x s_{11} \\ & + 2b_x s_{12} + c_x s_{22} + ds_{11} + es_{12}, \end{aligned}$$

y multiplicando por y'^2 y utilizando la igualdad anterior, tendremos que

$$2s'_{11}(by' - cx') = (cy'\left(\frac{x'}{y'}\right)' - a_x - d + (2b_x + e)\frac{x'}{y'} - c_x\frac{x'^2}{y'^2})s_{11},$$

que es una ecuación diferencial ordinaria en s_{11}, que nos da la ley de propagación del salto en las derivadas segundas de dos soluciones que coinciden, junto con sus derivadas primeras sobre la curva. Observemos que por lo tanto el salto en un punto determina el salto en cualquier otro

punto, por ejemplo si en un punto t_0 no hay salto, $s_{11}(t_0) = 0$, no lo hay en ningún punto, $s_{11} = 0$, y por tanto

$$s_{12} = s_{22} = s_{11} = 0,$$

es decir las derivadas segundas de ambas soluciones coinciden y u sería de clase 2.

9.3. Funciones analíticas reales

A lo largo de la lección denotaremos con letras griegas $\alpha, \ldots$ los multi–índices $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, y con

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$$
$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

asimismo escribiremos $\alpha \leq \beta$ para denotar las desigualdades componente a componente. Con x denotamos un punto $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y con

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad x^1 = x_1 \cdots x_n.$$

Ejercicio 9.3.1 Demostrar que

$$(x_1 + \cdots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha,$$

y que para todo multi–índice α,

$$\alpha! \leq |\alpha|! \leq n^{|\alpha|} \alpha!.$$

9.3.1. Series de potencias.

Definición. Llamamos *radio de convergencia* de una serie de potencias en $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

al valor R, cuyo inverso es

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

si este es finito y $R = 0$ si es infinito.

Teorema de Abel 9.4 *(Ver* APOSTOL*, p.285 y 287). Sea R el radio de convergencia de la serie de potencias en $\mathbb{R}$, $\sum c_n x^n$, entonces:*

i) La serie converge absolutamente en $|x| < R$ y uniformemente en $|x| \le r$, para $r < R$.

ii) La serie diverge en $|x| > R$.

iii) La serie es de clase infinito en $|x| < R$ y su derivada es la serie de las derivadas

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$

que tiene el mismo radio de convergencia R.

Ejercicio 9.3.2 Demostrar que para $x \in (-1, 1)$, y $k \in \mathbb{N}$, la serie

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k},$$

converge absolutamente a $k!/(1-x)^{1+k}$.

9.3.2. Series múltiples.

En esta lección consideraremos series múltiples de números reales

$$\sum_{\alpha} c_\alpha,$$

las cuales recordemos que están definidas como el límite (si es que existe)

$$\lim_{t_1,\dots,t_n\to\infty} \sum_{\alpha_1=0}^{t_1} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{t_n} c_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)},$$

y consideraremos las absolutamente convergentes, $\sum_\alpha |c_\alpha| < \infty$, lo cual equivale a la convergencia de la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} |c_\alpha|,$$

en cuyo caso se tiene (ver APOSTOL, p.245)

$$\sum_{\alpha} c_\alpha = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} c_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} c_\alpha. \tag{9.14}$$

Una propiedad básica que utilizaremos es que si las series

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{1m}, \ldots, \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm},$$

son absolutamente convergentes, entonces también lo es (ver APOSTOL, p.247)

$$\sum_{\alpha} c_\alpha, \qquad (\text{para } c_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} = a_{1\alpha_1} \cdots a_{n\alpha_n}),$$

y se tiene

$$\sum_{\alpha} c_\alpha = \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{1m} \right) \cdots \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \right).$$

Ejercicio 9.3.3 Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, con $|x_i| < 1$, entonces la serie $\sum_\alpha x^\alpha$ converge absolutamente a

$$\frac{1}{(1-x)^1}.$$

Ejercicio 9.3.4 Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, con $\sum_{i=1}^n |x_i| < 1$, entonces la serie

$$\sum_{\alpha} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha,$$

converge absolutamente a

$$\frac{1}{1-(x_1+\cdots+x_n)}.$$

9.3.3. Series múltiples de funciones.

Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sea $f_\alpha \colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, tal que para cada $x \in U$, $\sum f_\alpha(x)$ converja absolutamente a un número real $f(x)$ (habitualmente escribiremos $f = \sum f_\alpha$). Diremos que la convergencia de la serie es *uniforme* en U si para las sumas parciales

$$s_\alpha(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} f_\beta(x),$$

se tiene que para todo $\epsilon > 0$, existe un α_ϵ, tal que

$$|s_\alpha(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

para todo $\alpha \geq \alpha_\epsilon$ y todo $x \in U$.

Si U es un abierto, cada f_α es una función continua y existe $A \subset U$ y constantes $c_\alpha \geq 0$ tales que

$$\sum_\alpha c_\alpha < \infty \quad \text{y} \quad |f_\alpha(x)| \leq c_\alpha, \qquad \text{para todo } x \in A \text{ y } \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

entonces la serie $\sum f_\alpha(x)$ converge absolutamente y uniformemente en A a una función continua $\sum f_\alpha \in \mathcal{C}(A)$.

Recordemos (ver la lección 2 del Tema I) que si tenemos que $f_\alpha \in \mathcal{C}^k(U)$ y la serie

$$\sum_\alpha D^\beta f_\alpha(x),$$

converge absolutamente y uniformemente en los compactos de U, para todo β con $|\beta| \leq k$, entonces $\sum f_\alpha \in \mathcal{C}^k(U)$ y además

$$D^\beta \left(\sum_\alpha f_\alpha \right) = \sum_\alpha D^\beta f_\alpha, \qquad \text{para } |\beta| \leq k.$$

Ejercicio 9.3.5 Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, con $|x_i| < 1$, y $\beta \in \mathbb{N}^n$, entonces la serie

$$\sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta},$$

converge absolutamente a

$$\frac{\beta!}{(1-x)^{1+\beta}}.$$

Ejercicio 9.3.6 Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, con $\sum |x_i| < 1$, y $\beta \in \mathbb{N}^n$, entonces la serie

$$\sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta},$$

converge absolutamente a

$$\frac{|\beta|!}{(1 - x_1 - \cdots - x_n)^{1+|\beta|}}.$$

Proposición 9.5 *Sea $y \in \mathbb{R}^n$ y $c_\alpha \in \mathbb{R}$, tales que $\sum |c_\alpha y^\alpha| = \mu < \infty$, entonces $\sum c_\alpha x^\alpha$ converge absolutamente a una función $f(x)$ continua en $C = \{x : |x_i| \leq |y_i|\}$ y de clase infinito en el interior A de C. Además*

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0),$$

y dado un compacto de $K \subset A$ existen constantes $0 < r, M$ tales que para todo $x \in K$

$$|D^\beta f(x)| \leq M|\beta|! r^{-|\beta|}.$$

Demostración. Obviamente la serie converge absolutamente en C. Ahora bien A es no vacío sólo si $y_i \neq 0$, para todo i, en cuyo caso todo compacto $K \subset A$ está en un conjunto de la forma

$$|x_i| \leq \lambda |y_i|,$$

con $\lambda \in (0, 1)$ y tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha |D^\beta (c_\alpha x^\alpha)| &\leq \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} |c_\alpha| \lambda^{|\alpha - \beta|} |y^{\alpha - \beta}| \\
&\leq \frac{\mu}{|y^\beta|} \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} \lambda^{|\alpha - \beta|} \\
&= \frac{\mu}{|y^\beta|} \frac{\beta!}{(1 - \lambda)^{n + |\beta|}},
\end{aligned}$$

y la serie de las derivadas converge absolutamente en A y uniformemente en cualquier compacto de A. Por tanto $f = \sum c_\alpha x^\alpha$ es de clase infinito en A y en K se tiene que $|D^\beta f(x)| \leq M|\beta|! r^{-|\beta|}$, para

$$M = \frac{\mu}{(1 - \lambda)^n}, \qquad r = (1 - \lambda) \min_i |y_i|,$$

además

$$D^\beta f(x) = \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} c_\alpha x^{\alpha - \beta} \quad \Rightarrow \quad D^\beta f(0) = \beta!\, c_\beta. \quad \blacksquare$$

Definición. Diremos que una función $f \colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *analítica real* en un punto $y = (y_i)$ si existe un entorno abierto U_y de y en el abierto U y $c_\alpha \in \mathbb{R}$, tales que para todo $x = (x_i) \in U_y$,

$$f(x) = \sum_\alpha c_\alpha (x - y)^\alpha,$$

(donde la serie es absolutamente convergente). Diremos que f es analítica real en U si lo es en cada punto de U, en cuyo caso lo denotaremos $f \in \mathcal{C}^\omega(U)$.

El siguiente resultado es una reelaboración del último.

Teorema 9.6 *Si $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es analítica real en un punto $y \in U$ entonces existe un entorno suyo U_y y $M, r > 0$, tales que $f \in \mathcal{C}^\infty(U_y)$ y para todo $x \in U_y$*

$$f(x) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(y)(x-y)^\alpha,$$
$$|D^\beta f(x)| \leq M|\beta|! r^{-|\beta|}.$$

Demostración. Hágala el lector. (Ind. Considérese la serie absolutamente convergente $\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$, en un entorno de 0, obtenida a partir de la de la definición). ∎

Esta propiedad de acotación de las derivadas es la que esencialmente caracteriza las funciones analíticas reales, como se ve en el siguiente resultado.

Teorema 9.7 *$f \in \mathcal{C}^\omega(U)$ si y sólo si $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y para cada compacto $K \subset U$ existen $M, r > 0$, tales que para cada $x \in K$*

$$|D^\beta f(x)| \leq M|\beta|! r^{-|\beta|}.$$

Demostración. Si $f \in \mathcal{C}^\omega(U)$ entonces por el resultado anterior, $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y para cada $y \in U$ existe un entorno U_y y $M = M_y$, $r = r_y$, positivos, tales que para todo $x \in U_y$

$$|D^\beta f(x)| \leq M|\beta|! r^{-|\beta|}.$$

Ahora dado un compacto $K \subset U$ podemos recubrirlo de un número finito de entornos U_y y basta considerar $M = \max M_y$ y $r = \min r_y$.

Recíprocamente sea $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y consideremos un $y \in U$ y una bola cerrada, de la $\| \ \|_1$, $K = B[y, r'] \subset U$. Ahora sean M, r las constantes correspondientes a K y sea $x \in U_y = B(y, r) \cap B(y, r')$, por tanto tal que para $z = x - y$

$$\|z\|_1 = \|x - y\|_1 = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| < r.$$

Veamos en primer lugar que la serie

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(y)(x-y)^{\alpha},$$

converge absolutamente, lo cual equivale a demostrar la convergencia de

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} |D^{\alpha} f(y)(x-y)^{\alpha}| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} M r^{-n} \sum_{|\alpha|=n} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |z^{\alpha}| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} M r^{-n} \|z\|_1^n < \infty.\end{aligned}$$

Definamos ahora la función

$$g(t) = f(tx + (1-t)y),$$

para la que se tiene (ver ejercicio siguiente) que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = g(1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} g^{(i}(0) + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n g^{(n+1}(t) dt,$$

siendo

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{n!} g^{(n}(t) \right| &= \left| \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(tz+y) z^{\alpha} \right| \\ &\leq M r^{-n} \sum_{|\alpha|=n} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |z^{\alpha}| = M r^{-n} \|z\|_1^n,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left| \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n g^{(n+1}(t) dt \right| \leq M \left(\frac{\|z\|_1}{r} \right)^{n+1} \to 0,$$

y haciendo $n \to \infty$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} g^{(i}(0) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(y)(x-y)^{\alpha}.$$

por (9.14), pues la convergencia es absoluta. ∎

Ejercicio 9.3.7 (a) Demostrar que si $g \in \mathcal{C}^\infty((a,b))$, para $[0,1] \subset (a,b) \subset \mathbb{R}$

$$g(1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} g^{(i}(0) + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n g^{(n+1}(t)dt.$$

(b) Que si $g(t) = f(tz+y)$, para $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, entonces

$$g^{(n}(t) = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} D^\alpha f(tz+y) z^\alpha.$$

Ejercicio 9.3.8 Demostrar que f es analítica real en un punto si y sólo si lo es en un entorno del punto.

Las funciones analíticas reales están totalmente determinadas si conocemos los valores de todas sus derivadas en un punto cualquiera, en particular si la conocemos en el entorno de un punto, o la conocemos en germen de un punto.

Teorema 9.8 *Si U es conexo y $f \in \mathcal{C}^\omega(U)$ entonces f está determinada de forma única si conocemos los valores $D^\beta f(z)$, para un $z \in U$ y todo $\beta \in \mathbb{N}^n$.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{C}^\omega(U)$, tales que para toda $\beta \in \mathbb{N}^n$, $D^\beta f(z) = D^\beta g(z)$, y sea $h = f - g$, entonces los conjuntos

$$U_1 = \{x : D^\beta h(x) \neq 0, \quad \text{para algún } \beta \in \mathbb{N}^n\},$$
$$U_2 = \{x : D^\beta h(x) = 0, \quad \text{para todo } \beta \in \mathbb{N}^n\},$$

son abiertos, el primero por la continuidad de $D^\beta h$ y el segundo porque si $x \in U_2$ se sigue del teorema (9.6) que $f = 0$ en un entorno de x. Por tanto como $z \in U_2$, tendremos que $U_2 = U$ y $f = g$. ∎

Ejercicio 9.3.9 Demostrar que para $M, r > 0$, la función

$$\varphi(y) = \frac{Mr}{r - (y_1 + \cdots + y_m)},$$

definida en $\{\sum y_i \neq r\}$, verifica

$$D^\alpha \varphi(0) = M|\alpha|! r^{-|\alpha|},$$

y es analítica en $\{\sum |y_i| < r\}$.

Definición. Diremos que una aplicación $F = (f_i)\colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ es *analítica* en un punto $x \in U$ si sus componentes f_i son funciones analíticas en el punto. Diremos que es una *aplicación analítica* si lo es en cada punto.

Teorema 9.9 *Una aplicación $F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$, es analítica si y sólo si la aplicación*

$$F^*\colon \mathcal{C}^\infty(V) \to \mathcal{C}^\infty(U), \quad F^*(g) = g \circ F,$$

lleva funciones analíticas en funciones analíticas.

Demostración. Como las funciones coordenadas y_i en $\mathbb{R}^m$ son analíticas la suficiencia es obvia por la definición, pues $F^*(y_i) = f_i$ son analíticas, por tanto lo es $F = (f_i)$.

Veamos la necesidad, es decir que si F es analítica y g es una función analítica, entonces $f = g \circ F$ es una función analítica en todo punto $x \in U$. Para ello basta demostrar que para cada punto x existe un entorno suyo y constantes $M, s > 0$ tales que en cada punto x' del entorno y para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$|D^\alpha f(x')| \leq M|\alpha|! s^{-|\alpha|}.$$

Por ser g y las f_i analíticas, sabemos que existen entornos U_x de x y V_y de $y = F(x)$ y constantes $M, r > 0$, tales que para cada punto $x' \in U_x$ e $y' \in V_y$ y para cualesquiera multiíndices $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y $\beta \in \mathbb{N}^m$

$$|\Delta^\beta g(y')| \leq M|\beta|! r^{-|\beta|},$$
$$|D^\alpha f_i(x')| \leq M|\alpha|! r^{-|\alpha|},$$

donde denotamos $\Delta^\beta = \partial^{|\beta|}/\partial y_1^{\beta_1} \cdots \partial y_m^{\beta_m}$

Ahora cortando U_x con $F^{-1}(V_y)$ si es necesario, podemos suponer que $F(U_x) \subset V_y$, en cuyo caso tendremos mediante sucesivas aplicaciones de la regla de la cadena que

$$\begin{aligned} |D^\alpha f(x')| &= |D^\alpha g(f_1, \ldots, f_m)(x')| \\ &= |P_\alpha \left[\Delta^\beta g[F(x')], \ldots, D^\gamma f_i(x'), \ldots\right]| \\ &\leq P_\alpha \left[|\Delta^\beta g[F(x')]|, \ldots, |D^\gamma f_i(x')|, \ldots\right], \end{aligned}$$

para P_α un polinomio de coeficientes positivos, siendo $\beta \in \mathbb{N}^m$ y $\gamma \in \mathbb{N}^n$ tales que $1 \leq |\beta| \leq |\alpha|$ y $1 \leq |\gamma| \leq |\alpha|$. Además tales polinomios

son independientes de las funciones consideradas, por eso, definiendo las funciones

$$\begin{aligned}\varphi(y_1,\dots,y_m) &= \frac{Mr}{r-\sum y_i},\\ \phi_j(x_1,\dots,x_n) &= \frac{Mr}{r-\sum x_i} - M, \qquad \text{para } j=1,\dots,m\\ \phi &= (\phi_1,\dots,\phi_m),\end{aligned}$$

en entornos del origen de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente, considerando el ejercicio (9.3.9) y que $\phi(0)=0$, se tiene que

$$\begin{aligned}|D^\alpha f(x')| &\le P_\alpha\left[|\Delta^\beta g[F(x')]|,\dots,|D^\gamma f_i(x')|,\dots\right]\\ &\le P_\alpha\left[M|\beta|!r^{-|\beta|},\dots,M|\gamma|!r^{-|\gamma|},\dots\right]\\ &= P_\alpha\left[\Delta^\beta\varphi[\phi(0)],\dots,D^\gamma\phi_i(0),\dots\right]\\ &= D^\alpha(\varphi\circ\phi)(0)\\ &= M'|\alpha|!s^{-|\alpha|},\end{aligned}$$

para

$$M' = \frac{Mm}{r+Mm}M \le M, \qquad s = \frac{r^2}{r+mM},$$

lo cual de nuevo es consecuencia del ejercicio (9.3.9), pues se demuestra fácilmente que

$$\begin{aligned}\varphi[\phi(x)] &= \frac{Mr}{r-m\dfrac{Mr}{r-\sum x_i}+mM}\\ &= \frac{\dfrac{Mm}{r+Mm}Ms}{s-\sum x_i}+\frac{Mr}{r+mM}.\end{aligned}$$ ∎

Como consecuencia de este resultado se tiene trivialmente el siguiente.

Corolario 9.10 *La composición de aplicaciones analíticas es una aplicación analítica.*

9.4. Funciones analíticas complejas

Hay una diferencia fundamental entre la teoría de funciones diferenciables de variable real y la de variable compleja, pues en la de variable real estudiamos la clase de las funciones derivables, entre ellas estudiamos las que tienen derivada segunda, y así sucesivamente; luego estudiamos una clase más reducida, las que son infinitamente derivables y entre ellas las analíticas reales, que pueden expresarse a través de su desarrollo de Taylor, siendo distintas todas estas clases de funciones. Sin embargo para las funciones de variable compleja ocurre que todas las clases anteriores coinciden, es decir que basta pedirle a una función de estas que sea derivable en un abierto, para que sea de clase infinita y analítica en el abierto. Remitimos al lector a la lección (8.4.3), pág.631, donde ya hemos hablado de estas cuestiones y vimos el Teorema de Cauchy (8.24).

9.4.1. Las ecuaciones de Cauchy–Riemann.

Definición. Una función

$$f(z) : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

es *diferenciable* en un punto z_0 si existe y es único el

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

y es un número complejo que denotamos $f'(z_0)$. Diremos que f es *holomorfa ó analítica compleja* en U si es diferenciable en todo punto de U y su derivada es continua[1].

En el caso de que $U = \mathbb{C}$, diremos que f es *entera*.

Es fácil demostrar que si f es diferenciable en un punto z_0, es continua en ese punto, para ello basta tomar límites (cuando $z \to z_0$) en la igualdad

$$f(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) + f(z_0).$$

[1] Esta última condición no es necesaria, pues Goursat demostró en 1900 que si f' existe es continua.

Consideremos la identificación natural entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ dada por $(x, y) \to z = x + iy$ y una función

$$f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \text{ó} \quad F = (u, v)\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

entendiendo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. En estos términos se tiene la siguiente caracterización.

Teorema 9.11 *Condición necesaria y suficiente para que f sea holomorfa en U es que u y v sean de clase 1 en U y satisfagan las* ECUACIONES DE CAUCHY–RIEMANN

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x, \end{aligned}$$

Demostración. Tomemos el $z = x + iy$, en el límite de la definición, primero con $y = y_0$ y después con $x = x_0$, en ambos casos el límite debe ser

$$f'(z_0) = u_x + iv_x = v_y - iu_y,$$

de esta forma quedaría demostrada la necesidad. Para probar la suficiencia tenemos por el **Teorema del valor medio** y las **ecuaciones de Cauchy–Riemann**, que

$$\begin{aligned} &f(z_0 + z) - f(z_0) = \\ &\quad = u(x_0 + x, y_0 + y) - u(x_0, y_0) + \\ &\qquad + i[v(x_0 + x, y_0 + y) - v(x_0, y_0)] \\ &\quad = u(x_0 + x, y_0 + y) - u(x_0 + x, y_0) + u(x_0 + x, y_0) - u(x_0, y_0) + \\ &\qquad + i[v(x_0 + x, y_0 + y) - v(x_0 + x, y_0) + v(x_0 + x, y_0) - v(x_0, y_0)] \\ &\quad = yu_y(x_0 + x, \overline{y}) + xu_x(\overline{x}, y_0) + \\ &\qquad + i[yv_y(x_0 + x, y') + xv_x(x', y_0)] = \\ &\quad = y[u_y(x_0, y_0) + \epsilon_1] + x[u_x(x_0, y_0) + \epsilon_2] + \\ &\qquad + i[y[v_y(x_0, y_0) + \epsilon_3] + x[v_x(x_0, y_0) + \epsilon_4]] \\ &\quad = y[-v_x(x_0, y_0) + \epsilon_1] + x[u_x(x_0, y_0) + \epsilon_2] + \\ &\qquad + i[y[u_x(x_0, y_0) + \epsilon_3] + x[v_x(x_0, y_0) + \epsilon_4]] \\ &\quad = z(u_x + iv_x) + y\epsilon_1 + x\epsilon_2 + iy\epsilon_3 + ix\epsilon_4, \end{aligned}$$

donde los ϵ_i tienden a cero cuando $z = x + iy$ tiende a cero. Por tanto se sigue que

$$\left|\frac{f(z_0+z)-f(z_0)}{z} - u_x - iv_x\right| = \left|\frac{y\epsilon_1 + x\epsilon_2 + iy\epsilon_3 + ix\epsilon_4}{z}\right| \leq |\epsilon_2 + i\epsilon_4| + |\epsilon_1 + i\epsilon_3|,$$

de donde se sigue que

$$f'(z_0) = u_x + iv_x. \quad \blacksquare$$

Si como decimos consideramos la identificación natural entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$, tendremos que $\mathbb{R}^2$ adquiere una estructura de espacio vectorial complejo para el que

$$1 = (1,0), \quad i = (0,1), \quad \Rightarrow \quad i(1,0) = (0,1), \qquad i(0,1) = (-1,0),$$

y por tanto todos los espacios tangentes $T_{(x,y)}(\mathbb{R}^2)$, para los que

$$i\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad i\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x},$$

por tanto dada una función

$$f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

podemos considerar la aplicación lineal tangente de

$$F = (u,v)\colon U \to \mathbb{R}^2, \qquad F_*\colon T_{(x,y)}(\mathbb{R}^2) \to T_{(x,y)}(\mathbb{R}^2)$$

y se tiene el siguiente resultado.

Teorema 9.12 *Condición necesaria y suficiente para que u y v satisfagan las ecuaciones de Cauchy–Riemann es que F_* sea $\mathbb{C}$–lineal.*

Demostración. Basta observar que

$$iF_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = i\left(u_x\frac{\partial}{\partial x} + v_x\frac{\partial}{\partial y}\right) = u_x\frac{\partial}{\partial y} - v_x\frac{\partial}{\partial x},$$
$$F_*\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = F_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = u_y\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y}. \quad \blacksquare$$

9.4.2. Fórmula integral de Cauchy.

Dada una función

$$f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

se tiene la siguiente caracterización de las funciones analíticas de variable compleja.

Teorema 9.13 *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *Para cada punto $z_0 \in U$, existe un disco abierto $D_0 \subset U$, centrado en z_0 y $c_n \in \mathbb{C}$, tales que para todo $z \in D_0$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

en el sentido de que la serie converge absolutamente.

ii) *La función f es derivable, su derivada es continua y las funciones u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann.*

iii) *La función f es derivable, su derivada es continua y fdz es cerrada, es decir $d(fdz) = 0$.*

iv) *La función f es continua y para todo abierto V, con $V \subset \overline{V} \subset U$ y con borde ∂V variedad diferenciable, se tiene la* Fórmula integral de Cauchy*,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

para todo $z_0 \in V$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Se tiene que

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}.$$

y la serie converge absolutamente en D_0 y f' es continua en D_0 y por tanto en todo U (ver Cartan, p.22). El resto se sigue del teorema de caracterización de las funciones holomorfas.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} fdz &= (u+iv)(dx+idy) = (udx - vdy) + i(vdx + udy) \qquad \Rightarrow \\ d(fdz) &= d(udx - vdy) + id(vdx + udy) \\ &= (-u_y - v_x)dx \wedge dy + i(-v_y + u_x)dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Consideremos la 1–forma

$$\omega = \frac{f}{z - z_0} dz,$$

en el abierto $U_0 = U - \{z_0\}$, la cual es cerrada, pues se tiene

$$d\omega = d\left(\frac{1}{z - z_0}\right) \wedge f dz + \frac{1}{z - z_0} d(f dz) = f \frac{dz}{(z - z_0)^2} \wedge dz = 0.$$

Consideremos un disco $D_r = \{|z - z_0| \leq r\} \subset V$, para un $r > 0$ suficientemente pequeño y consideremos el abierto $A = V - D_r$ con borde $\partial V \cup C_r$, en el que consideramos la orientación sobre el borde tomando un campo exterior a A —observemos que sobre C_r es la orientación contraria a la habitual—. Entonces aplicando el **Teorema de Stokes**, (14.12), pág.988

$$0 = \int_A d\omega = \int_{\partial V} \omega - \int_{C_r} \omega \qquad \Rightarrow$$
$$\int_{\partial V} \frac{f}{z - z_0} dz = \int_{C_r} \frac{f}{z - z_0} dz,$$

y tomando límites cuando $r \to 0$, se tiene el resultado, pues parametrizando la circunferencia C_r, $z = z_0 + r\,\mathrm{e}^{it}$, tendremos que

$$\int_{C_r} \frac{f}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{it})}{r\,\mathrm{e}^{it}} ir\,\mathrm{e}^{it}\, dt$$
$$= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{it}) dt \quad \to \quad 2\pi i f(z_0). \tag{9.15}$$

(iv) $\Rightarrow$ (i). Consideremos un disco $D_r = \{|z - z_0| \leq r\} \subset U$ y apliquemos (iv) al interior V de D_r, tendremos que para todo $\xi \in V$,

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - \xi} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \left[1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right]^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n\right] dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n dz, \end{aligned}$$

pues la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n,$$

es uniformemente convergente en los $z \in C_r$ y por tanto definiendo

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad \Rightarrow \quad f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi - z_0)^n.$$

y el resultado se concluye. ∎

Nota 9.14 Observemos que de la fórmula integral de Cauchy en la forma (9.15), se sigue el **Teorema del valor medio** para funciones analíticas:

El valor $f(z_0)$ es el valor medio de f en cualquier circunferencia centrada en z_0, cuyo disco esté en su dominio.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{it})\,dt,$$

Como consecuencia se tiene el **Principio del máximo**:

Si el módulo de una función holomorfa alcanza el máximo en el interior de su dominio conexo es constante.

Esto se demuestra considerando que si el máximo es $a = |f(z_0)|$, entonces el conjunto $\{|f(z)| = a\}$ es cerrado, no vacío y además es abierto pues si $|f(p)| = a$ y consideramos una bola centrada en p y cualquier punto suyo z, para $r = |z - p|$, se tiene

$$|f(p)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{it})|\,dt,$$

y en todo punto de la circunferencia $|f| \le a$ y si en un punto fuese estrictamente menor también lo sería en un entorno y el valor medio sería estrictamente menor que a y $|f(p)| < a$, por lo que llegaríamos a contradicción.

9.4.3. Funciones analíticas n–dimensionales.

Remitimos al lector a las p.70–72 del FRITZ–JOHN para un breve análisis de las funciones analíticas complejas n–dimensionales. En particular al siguiente resultado.

Teorema 9.15 *Si $f \in \mathcal{C}^\omega(U)$, con U abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces para cada compacto $K \subset U$, existe un entorno $\kappa \subset \mathbb{C}^n$ de K y una función F analítica compleja en κ, tal que $F(x) = f(x)$, para cada $x \in K$.*

9.5. El Teorema de Cauchy–Kowalewski

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial y} &= \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(u_1, \ldots, u_n)\frac{\partial u_j}{\partial x}, \qquad (\text{para } i = 1, \ldots, n) \\ \mathbf{u}_y &= \mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{u}_x, \qquad (\text{en forma matricial}), \end{aligned} \tag{9.16}$$

satisfaciendo condiciones iniciales del tipo

$$\begin{aligned} u_i(x, y_0) &= \phi_i(x), \qquad (\text{para } i = 1, \ldots, n) \\ \mathbf{u}(x, y_0) &= \phi(x), \qquad (\text{en forma vectorial}), \end{aligned}$$

donde supondremos que las funciones ϕ_i son analíticas en un entorno de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ y las f_{ij} analíticas en un entorno de $\phi(x_0) \in \mathbb{R}^n$.

Nuestra intención consiste en demostrar que en tales condiciones existe una única solución $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, analítica en un entorno de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

En primer lugar observamos que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_0 = y_0 = \phi(x_0) = 0$, pues basta considerar el nuevo sistema

$$\begin{gathered} \frac{\partial z_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(z_1, \ldots, z_n)\frac{\partial z_j}{\partial x}, \qquad z_i(x, 0) = \chi_i(x), \\ \text{para} \quad h_{ij}(z) = f_{ij}(z + \phi(x_0)), \qquad \chi(x) = \phi(x + x_0) - \phi(x_0), \end{gathered}$$

el cual si tiene solución $z = (z_i)$, entonces el original la tiene $u(x, y) = z(x - x_0, y - y_0) + \phi(x_0)$.

En segundo lugar observemos que las ecuaciones (9.16) son una fórmula de recurrencia que nos permite calcular todos los valores

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+k} u_i}{\partial x^m \partial y^k} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^{m+k-1}}{\partial x^m \partial y^{k-1}} \left[f_{ij}(u) \frac{\partial u_j}{\partial x} \right] \\ &= P_{m,k}[D^\alpha f_{ij}(u), \ldots, \frac{\partial^{\beta_1+\beta_2} u_j}{\partial x^{\beta_1} \partial y^{\beta_2}}, \ldots], \end{aligned} \tag{9.17}$$

siendo $P_{m,k}$ un polinomio con coeficientes positivos en las derivadas parciales de las f_{ij} y las u_i y donde $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y $\beta \in \mathbb{N}^2$ recorren los multiíndices que satisfacen

$$|\alpha| \leq m + k - 1, \qquad \beta_1 \leq m + 1, \quad \beta_2 \leq k - 1,$$

además estos polinomios son independientes de las funciones f_{ij} y u_j. Esta fórmula nos permite calcular todos los valores

$$\frac{\partial^{m+k} u_i}{\partial x^m \partial y^k}(0, 0),$$

pues por una parte tendremos que para todo m

$$\frac{\partial^m u_i}{\partial x^m}(0, 0) = \phi_i^{(m}(0),$$

y sustituyendo estos valores en la fórmula (9.17), podemos calcular los valores correspondientes a $k = 1$

$$\frac{\partial^{m+1} u_i}{\partial x^m \partial y}(0, 0),$$

los cuales podemos substituir de nuevo en la fórmula para obtener los valores correspondientes a $k = 2$ y así sucesivamente.

Que la solución analítica es única (de existir) es consecuencia de (9.6), puesto que sus derivadas en $0 \in \mathbb{R}^2$ las acabamos de determinar de forma única y la solución sería

$$u_i(x, y) = \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{1}{m!k!} \frac{\partial^{m+k} u_i}{\partial x^m \partial y^k}(0, 0) x^m y^k, \tag{9.18}$$

ahora lo único que falta comprobar es que efectivamente cada una de estas series convergen absolutamente en un entorno del origen, pues en tal caso cada una define una función u_i analítica en un entorno del origen, que por (9.8) coincide con ϕ_i en $y = 0$, pues $u_i(x, 0)$ y $\phi_i(x)$ son analíticas y tienen las mismas derivadas en 0; y las u_i satisfacen nuestro sistema de ecuaciones por el mismo teorema, pues ambos lados de la ecuación son funciones analíticas, que por construcción tienen las mismas derivadas en el origen.

Para demostrar que efectivamente se tiene la convergencia absoluta en un entorno del origen supongamos que tenemos otras funciones g_{ij}, analíticas en un entorno del origen de $\mathbb{R}^n$, y que demostramos la existencia de solución analítica $v = (v_i)$, en un entorno del origen de $\mathbb{R}^2$, del sistema

$$\frac{\partial v_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(v_1, \dots, v_n)\frac{\partial v_j}{\partial x}, \qquad (\text{para } i = 1, \dots, n)$$

satisfaciendo unas condiciones iniciales del tipo

$$v_i(x, 0) = \psi_i(x), \qquad (\text{para } i = 1, \dots, n)$$

con las ψ_i analíticas en un entorno del origen y tales que para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y $m \in \mathbb{N}$

$$|D^\alpha f_{ij}(0)| \le D^\alpha g_{ij}(0), \qquad |\phi_i^{(m}(0)| \le \psi_i^{(m}(0).$$

En tal caso tendríamos que la serie

$$v_i(x, y) = \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{1}{m!k!}\frac{\partial^{m+k} v_i}{\partial x^m \partial y^k}(0, 0)x^m y^k,$$

converge absolutamente en un entorno del origen de $\mathbb{R}^2$ y por consiguiente nuestra serie (9.18), pues por una parte para todo m tendríamos que

$$\left|\frac{\partial^m u_i}{\partial x^m}(0, 0)\right| = \left|\phi_i^{(m}(0)\right| \le \psi_i^{(m}(0) = \frac{\partial^m v_i}{\partial x^m}(0, 0),$$

y por inducción en k tendríamos la desigualdad en todos los casos, pues

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^{m+k} u_i}{\partial x^m \partial y^k}(0)\right| &\le P_{m,k}(|D^\alpha f_{ij}(0)|, \left|D^\beta u_j(0)\right|) \\ &\le P_{m,k}(D^\alpha g_{ij}(0), D^\beta v_j(0)) = \frac{\partial^{m+k} v_i}{\partial x^m \partial y^k}(0).\end{aligned}$$

Ejercicio 9.5.1 Sabiendo que para una función $f = \sum c_\alpha x^\alpha$ analítica en 0, es $D^\beta(\sum c_\alpha x^\alpha) = \sum D^\beta(c_\alpha x^\alpha)$, demostrar que existen constantes $M, r > 0$ tales que

$$|D^\alpha f(0)| \le |\alpha|!\, M\, r^{-|\alpha|}.$$

Ahora bien nuestras funciones f_{ij} y ϕ_i son analíticas en un entorno del origen (de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ respectivamente), por tanto existen constantes $M, r > 0$ tales que

$$|D^\alpha f_{ij}(0)| \le |\alpha|! M r^{-|\alpha|}, \qquad |\phi_i^{(m}(0)| \le m! M r^{-m}.$$

Esto nos induce a considerar las funciones analíticas en un entorno del origen (de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ respectivamente) $g_{ij} = g$ y $\psi_i = \psi$, para

$$g(x_1, \dots, x_n) = \frac{Mr}{r - x_1 - \cdots - x_n},$$
$$\psi(x) = \frac{Mr}{r - x} - M = \frac{Mx}{r - x},$$

pues para ellas se tiene que $\psi(0) = 0$ y (ver el problema (9.3.9))

$$|D^\alpha f_{ij}(0)| \le D^\alpha g(0) = |\alpha|! M r^{-|\alpha|},$$
$$\phi_i^{(m}(0) \le \psi^{(m}(0) = m! M r^{-m}.$$

Por lo tanto nos basta estudiar el sistema particular

$$\frac{\partial v_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^{n} \frac{Mr}{r - v_1 - \cdots - v_n} \frac{\partial v_j}{\partial x}, \qquad (\text{para } i = 1, \dots, n)$$

satisfaciendo las condiciones iniciales

$$v_i(x, 0) = \frac{Mx}{r - x},$$

y basta encontrar una función z analítica solución de la EDP de primer orden

$$z_y = \left(\frac{nMr}{r - nz}\right) z_x, \qquad z(x, 0) = \frac{Mx}{r - x}, \tag{9.19}$$

pues en tal caso $v_i = z$ son la solución de la anterior.

Para resolverla consideramos el campo

$$\frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{nMr}{r - nz}\right) \frac{\partial}{\partial x},$$

en las coordenadas (x, y, z) y buscamos un par de integrales primeras como

$$z, \qquad u = \frac{nMry}{r - nz} + x = \frac{ay}{b + z} + x,$$

para $a = -Mr$ y $b = -r/n$. Ahora el resultado de despejar z en $F(u, z) = 0$, como función de (x, y), para cualquier función F, será solución de la EDP. En particular para cualquier función f de una variable, basta despejar z en

$$z = f(u) \quad \Rightarrow \quad z = f\left(\frac{ay}{b + z} + x\right),$$

pero como a nosotros nos interesa la solución que satisface la condición inicial (9.19), esta f debe verificar —puesto que en $y = 0$, $u = x$—

$$f(x) = z(x, 0) = \frac{Mx}{r - x} \quad \Rightarrow \quad f(u) = \frac{Mu}{r - u}$$

por lo que la solución debe satisfacer

$$\begin{aligned}
&\frac{Mu}{r - u} - z = 0 \quad \Rightarrow \quad Mu + uz - rz = 0 \\
&\qquad \Rightarrow \quad (M + z)\left[\frac{ay}{b + z} + x\right] - zr = 0 \\
&\qquad \Rightarrow \quad (M + z)[ay + bx + zx] - zr(b + z) = 0 \\
&\qquad \Rightarrow \quad (x - r)z^2 + (ay + bx - rb + Mx)z + M(ay + bx) = 0,
\end{aligned}$$

y de las dos raíces de esta ecuación cuadrática, la solución debe ser la que vale 0 en el origen, es decir

$$\begin{aligned}
z = &\frac{1}{2(x - r)}\left[(ay + bx + nb^2 + Mx) - \right. \\
&\left. - \sqrt{(ay + bx + nb^2 + Mx)^2 - 4M(ay + bx)(x - r)}\right],
\end{aligned}$$

la cual define una función analítica en un entorno del origen, pues ni el denominador ni el radical se anulan en el origen. Esto finaliza la demostración del teorema que a continuación enunciamos.

Teorema de Cauchy–Kowalewski 9.16 *El sistema de ecuaciones en forma matricial*

$$\mathbf{u}_y = \mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{u}_x,$$

satisfaciendo condiciones iniciales del tipo

$$\mathbf{u}(x, y_0) = \phi(x),$$

y tal que las componentes ϕ_i y f_{ij} de ϕ y $\mathbf{A}$, son analíticas en un entorno del $x_0 \in \mathbb{R}$ y de $\phi(x_0) \in \mathbb{R}^n$, respectivamente, tiene una única solución analítica en un entorno del $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

9.6. EDP de tipo hiperbólico

En esta lección vamos a estudiar el problema de Cauchy para una EDP de segundo orden en el plano, definida por un operador diferencial lineal de tipo hiperbólico y por tanto expresable en la forma canónica

$$z_{xy} + \cdots = 0,$$

más generalmente supondremos que los puntos suspensivos definen una función arbitraria, no necesariamente de tipo lineal. Por tanto consideraremos una EDP de la forma

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y), \tag{9.20}$$

y la cuestión consiste en encontrar una solución $z = z(x, y)$, con valores

$$z = u(t), \quad z_x = p(t), \quad z_y = q(t),$$

determinados sobre una curva plana dada paramétricamente de la forma

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

y para los que se debe satisfacer la *relación de compatibilidad*

$$u'(t) = z_x f'(t) + z_y g'(t) = p(t)f'(t) + q(t)g'(t).$$

Ahora bien en la lección 2 vimos que las curvas características, que en nuestro caso son $y = cte$, $x = cte$, eran excepcionales para el estudio

de la existencia y unicidad, de hecho si nuestra curva es tangente a una característica, es decir $f'(t) = 0$ ó $g'(t) = 0$ —y por tanto $\det \mathbf{A} = 0$ (ver la lección 2)—, los datos no determinan las derivadas de todos los ordenes de z en el punto de la curva $(f(t), g(t))$, mientras que en caso contrario si. Por ejemplo si nuestra ecuación es

$$z_{xy} = 0,$$

y los datos u, p y q los damos sobre la curva característica $f(t) = t$, $g(t) = a = cte$,

$$z(x, a) = u(x), \quad z_x(x, a) = p(x), \quad z_y(x, a) = q(x),$$

tendremos que la condición de compatibilidad exige que

$$u'(x) = z_x(x, a) = p(x),$$

lo cual no exige ninguna condición para la q. Ahora bien si existe tal solución, debe verificarse $q'(x) = z_{xy}(x, a) = 0$, y por tanto $q(x) = b = cte$ y en tal caso todas las funciones de la forma

$$z(x, y) = u(x) + \phi(y),$$

con $\phi(a) = 0$ y $\phi'(a) = b$, definen una solución de la EDP satisfaciendo las condiciones impuestas.

En definitiva en un problema de Cauchy como el anterior, con datos iniciales sobre una curva característica, puede no existir solución (si por ejemplo q no es constante) o existir pero sin ser única. Por tanto las curvas características son excepcionales en cuanto al problema de Cauchy. Esta es la razón de imponer a nuestra curva inicial que no sea tangente a las curvas características, lo cual significa que es estrictamente creciente o decreciente y puede definirse mediante cualquiera de las funciones inversas

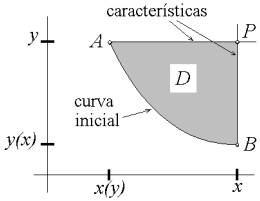


Figura 9.1. Dominio de dependencia

$$y = y(x), \qquad x = x(y),$$

y podemos tomar tanto el parámetro x como el y para parametrizarla.

Para cada punto[2] $P = (x, y)$ del plano, (ver Figura 9.1), consideremos los puntos de la curva inicial $A = (x(y), y)$ y $B = (x, y(x))$, y denotemos con C_1 la parte de la curva limitada por estos puntos, con D la región del plano limitada por la curva C, unión de C_1 y las características $C_2 = BP$ y $C_3 = PA$ y consideremos un vector N exterior a D y la orientación sobre la curva C,

$$i_N(dx \wedge dy),$$

en estos términos se tiene la siguiente equivalencia.

Teorema 9.17 *Sean u, p y q, funciones definidas sobre la curva inicial, satisfaciendo las condiciones de compatibilidad. Entonces condición necesaria y suficiente para que z sea solución de*

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y),$$

que en la curva inicial satisface $z = u$, $z_x = p$ y $z_y = q$, es que sea solución de

$$z(x,y) = \frac{u(A)+u(B)}{2} + \frac{1}{2}\int_{C_1}[pdx - qdy] + \iint_D f(x,y,z,z_x,z_y)dx\,dy. \tag{9.21}$$

Demostración. *Suficiencia*: Aplicando el **Teorema de Stokes**, (14.12), pág.988 tenemos que

$$\begin{aligned}
&\iint_D f(x,y,z,z_x,z_y)dx\,dy = \iint_D z_{xy}dx\wedge dy\\
&= \frac{1}{2}\iint_D d[z_y dy - z_x dx]\\
&= \frac{1}{2}\int_C [z_y dy - z_x dx]\\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{C_1}[z_y dy - z_x dx] + \int_{C_2}[z_y dy - z_x dx] + \int_{C_3}[z_y dy - z_x dx]\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{C_1}[qdy - pdx] + \int_{y(x)}^{y} z_y(x,\eta)d\eta + \int_{x(y)}^{x} z_x(\xi,y)d\xi\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{C_1}[qdy - pdx] + z(x,y) - z(x,y(x)) + z(x,y) - z(x(y),y)\right],
\end{aligned}$$

[2]Realmente no es para cada punto P del plano sino en una región que determina la curva, que es en la que A y B están definidos.

de donde se sigue que z satisface la ecuación integral (9.21).

Necesidad: Es obvio que $z = u$ sobre la curva, ahora si parametrizamos u, p y q con x, tendremos

$$z(x,y) = \frac{u(x)+u(x(y))}{2} + \frac{1}{2}\int_{x(y)}^{x}(p - qy')dx + \\ + \int_{x(y)}^{x}\int_{y(\xi)}^{y} f(\xi,\eta,z,z_x,z_y)d\xi\, d\eta,$$

y derivando respecto de x, considerando las ecuaciones de compatibilidad que nos aseguran que $u'(x) = p(x) + q(x)y'(x)$, tendremos que $z_x = p$ sobre la curva, pues

$$z_x(x,y) = \frac{u'(x)}{2} + \frac{p(x) - q(x)y'(x)}{2} + \\ + \int_{y(x)}^{y} f(x,\eta,z,z_x,z_y)d\eta \\ = p(x) + \int_{y(x)}^{y} f(x,\eta,z,z_x,z_y)d\eta,$$

y del mismo modo si parametrizamos respecto de y tendremos que $z_y = q$ sobre la curva, además derivando respecto de y en la última igualdad se tiene que z satisface la ecuación (9.20). ∎

Esta ecuación integro–diferencial nos servirá como base para el estudio de la existencia y unicidad de solución. A continuación damos una primera versión de este resultado, consecuencia directa del anterior, para el caso en el que $f = f(x,y)$.

Teorema de existencia y unicidad 9.18 *Si consideramos sobre nuestra curva inicial tres funciones u, p y q, que satisfacen las condiciones de compatibilidad, entonces existe, y es única, la solución del problema de Cauchy*

$$z_{xy} = f(x,y),$$
$$z = u, \quad z_x = p, \quad z_y = q, \qquad \textit{(sobre la curva)}$$

y viene dada por la expresión

$$z(x,y) = \frac{u(A)+u(B)}{2} + \frac{1}{2}\int_{C_1}[pdx - qdy] + \\ + \iint_D f(x,y)dx\, dy. \tag{9.22}$$

Nota 9.19 Observemos que z está determinada en P si ella y sus derivadas de primer orden lo están en la curva inicial AB y f lo está en D. Esta es la razón de llamar al conjunto D *dominio de dependencia* de la solución z con respecto a P (ver la figura 41 de la página 710).

Ejercicio 9.6.1 Encontrar la solución de la EDP $z_{xy} = x + y$, que en $x + y = 0$ satisface, $z = 0$ y $z_x = x$.

9.7. Método de las aprox. sucesivas

El objetivo de esta lección es demostrar en primer lugar la existencia y unicidad de la solución de la EDP hiperbólica (9.20)

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y),$$

con sus valores y los de sus derivadas de primer orden fijados sobre una curva estrictamente monótona y en segundo lugar su dependencia diferenciable con respecto a estos. Para ello consideraremos el problema equivalente representado por la ecuación integro–diferencial (9.21) y demostraremos que la solución existe, es única y depende diferenciablemente de los datos fijados.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los datos iniciales u, p y q se anulan sobre la curva y por tanto que la ecuación integral (9.21) es

$$z(x, y) = \iint_D f(x, y, z, z_x, z_y)dx\,dy,$$

puesto que para cualesquiera otras funciones, u, p y q, podemos considerar la solución (9.22)

$$\varphi(x, y) = \frac{u(A) + u(B)}{2} + \frac{1}{2}\int_{C_1} [pdx - qdy],$$

de $z_{xy} = 0$, que sobre la curva satisface las condiciones fijadas y considerar la solución de

$$z_{xy} = g(x, y, z, z_x, z_y),$$
$$\text{para} \qquad g(x, y, z, z_1, z_2) = f(x, y, z + \varphi, z_1 + \varphi_x, z_2 + \varphi_y),$$

que tanto ella como sus derivadas se anulen sobre la curva. Entonces la función $v = \varphi + z$ será solución de (9.20), satisfaciendo las condiciones deseadas sobre la curva. Observemos que si f es localmente acotada, continua, localmente lipchiciana en las tres últimas variables uniformemente en las dos primeras, ó lineal en las tres últimas variables, entonces también lo es g.

Recordemos que D es la región determinada por las rectas paralelas a los ejes que pasan por (x, y) y la curva dada y que podemos considerar que esta curva es, sin pérdida de generalidad, la recta

$$x + y = 0,$$

puesto que basta hacer el cambio de coordenadas (que siguen siendo características)

$$\begin{matrix} u = y(x), \\ v = -y, \end{matrix} \quad \text{ó} \quad \begin{matrix} u = -x, \\ v = x(y), \end{matrix}$$

sin que el problema se modifique esencialmente, pues

$$x = y^{-1}(u) = x(u), \quad y = -v,$$
$$z_x = z_u y'(x), \quad z_y = -z_v, \quad z_{xy} = -z_{uv} y'(x),$$

por tanto

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y) \quad \Leftrightarrow \quad z_{uv} = g(u, v, z, z_u, z_v),$$
$$\text{para} \qquad g(u, v, z, z_1, z_2) = -\frac{1}{y'[x(u)]} f(x(u), -v, z, z_1 y'[x(u)], -z_2).$$

9.7.1. Existencia de solución.

La cuestión consiste en fijar un punto de $x+y = 0$, que por comodidad será el origen (para ello basta hacer un nuevo cambio de coordenadas: una traslación) y demostrar que bajo ciertas condiciones apropiadas para g, el límite de la sucesión definida recurrentemente por la fórmula

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x, y) &= \iint_D g(x, y, u_n, p_n, q_n) dx\, dy \\ &= \int_{-y}^{x} \int_{-\xi}^{y} g(\xi, \eta, u_n, p_n, q_n) d\xi\, d\eta \\ &= \int_{-x}^{y} \int_{-\eta}^{x} g(\xi, \eta, u_n, p_n, q_n) d\xi\, d\eta, \end{aligned} \tag{9.23}$$

con $u_0 = 0$ y para

$$p_{n+1}(x,y) = u_{n+1x}(x,y) = \int_{-x}^{y} g(x,\eta,u_n,p_n,q_n)d\eta,$$

$$q_{n+1}(x,y) = u_{n+1y}(x,y) = \int_{-y}^{x} g(\xi,y,u_n,p_n,q_n)d\eta,$$

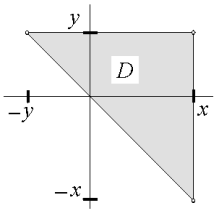


Figura 9.2.

las cuales se anulan en $x + y = 0$, existe y es la solución de nuestro problema. Tal solución será local, es decir definida en un entorno del punto considerado, en nuestro caso el origen.

Teorema 9.20 *Sea $W \subset \mathbb{R}^5$ abierto, con $0 \in U$, y $g\colon W \longrightarrow R$ localmente acotada (por ejemplo si g es continua) y localmente lipchiciana en z, p y q uniformemente en x e y (por ejemplo si g es de clase 1), entonces existe una solución de*

$$z_{xy} = g(x,y,z,z_x,z_y),$$

definida en un entorno abierto del $0 \in \mathbb{R}^2$, tal que $z = z_x = z_y = 0$, en los puntos de $x + y = 0$ en ese abierto.

Demostración. Por ser localmente lipchiciana para cualquier entorno acotado

$$U_L = \{|x| \le L, |y| \le L\},$$

del origen de $\mathbb{R}^2$ y V entorno compacto del origen de $\mathbb{R}^3$, tales que el compacto $U_L \times V \subset W$, existe una constante M tal que

$$|g(x,y,z,p,q) - g(x,y,z',p',q')| \le M[|z - z'| + |p - p'| + |q - q'|],$$

para $(x,y) \in U_L$ y $(z,p,q),(z',p',q') \in V$. Sea $|g| \le k$ en $U_L \times V$ y consideremos un $T > 0$ y el conjunto

$$G = \{(x,y) \in [-L,L]^2 :\ |x + y| \le T\},$$

para el que se verifica que si en todos sus puntos, $(u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) \in V$, entonces en $(x,y) \in G$

$$|u_n(x,y)| \le \frac{kT^2}{2}, \quad |p_n(x,y)| \le kT, \quad |q_n(x,y)| \le kT, \tag{9.24}$$

por lo que tomando un $T > 0$ suficientemente pequeño, tendremos que (u_n, p_n, q_n) también está en V y como $u_0 = p_0 = q_0 = 0$, tendremos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_n(x,y), p_n(x,y), q_n(x,y)) \in V,$$

en todo punto $(x,y) \in G$, en el que además se tiene

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}(x,y) - u_n(x,y)| &\leq \\
&\leq \iint_D |g(\xi,\eta,u_n,p_n,q_n) - g(\xi,\eta,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})|d\xi\, d\eta \\
&\leq M \iint_D [|u_n - u_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|]d\xi\, d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|p_{n+1}(x,y) - p_n(x,y)| &\leq \\
&\leq M \int_{-x}^{y} [|u_n - u_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|]d\eta \\
|q_{n+1}(x,y) - q_n(x,y)| &\leq \\
&\leq M \int_{-y}^{x} [|u_n - u_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|]d\xi,
\end{aligned}$$

pues el dominio de dependencia de (x,y), $D \subset G$. Ahora consideremos, para $n \geq 1$, las funciones $Z_n \colon [-T,T] \to [0,\infty)$

$$\begin{aligned}
Z_n(t) = \max_{x+y=t,(x,y)\in G} &[|u_n(x,y) - u_{n-1}(x,y)| + \\
&+ |p_n(x,y) - p_{n-1}(x,y)| + |q_n(x,y) - q_{n-1}(x,y)|],
\end{aligned}$$

y las nuevas variables

$$v = x - y, \qquad t = x + y,$$

para las que se tiene

$$dv \wedge dt = d(x-y) \wedge d(x+y) = 2dx \wedge dy,$$

y por tanto (para $x + y > 0$)

$$\begin{aligned}
\iint_D [|u_n - u_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|]dx\, dy &\leq \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^{x+y} \int_{t-2y}^{2x-t} Z_n(t)dt\, dv \\
&\leq \int_0^{x+y} |x + y - t| Z_n(t)dt \leq T \int_0^{x+y} Z_n(t)dt,
\end{aligned}$$

entonces combinando las desigualdades obtenidas tendremos que

$$|u_{n+1}(x,y) - u_n(x,y)| + |p_{n+1}(x,y) - p_n(x,y)| + \\ + |q_{n+1}(x,y) - q_n(x,y)| \leq M \int_0^{x+y} [2+T] Z_n(t)dt,$$

y por tanto para $|t| \leq T$

$$Z_{n+1}(t) \leq M(2+T) \int_0^t Z_n(t)dt = \lambda \int_0^t Z_n(t)dt.$$

Ahora como $u_0 = 0$ tendremos $p_0 = q_0 = 0$ y por (9.24)

$$Z_1(t) \leq \frac{kT^2}{2} + kT + kT = \mu,$$

que puesta en la fórmula de recurrencia nos acota

$$Z_2(t) \leq \mu\lambda t,$$

y por inducción

$$Z_{n+1}(t) \leq \mu \frac{\lambda^n t^n}{n!},$$

con lo cual dada la serie convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu \frac{\lambda^n T^n}{n!} = \mu\, \mathrm{e}^{\lambda T},$$

tendremos a la vez la convergencia uniforme de

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} [u_{n+1} - u_n] = u,$$

$$\lim_{n\to\infty} u_{nx} = \sum_{n=0}^{\infty} [p_{n+1} - p_n] = u_x,$$

$$\lim_{n\to\infty} u_{ny} = \sum_{n=0}^{\infty} [q_{n+1} - q_n] = u_y,$$

en nuestro conjunto G con lo que podemos pasar el límite bajo el signo integral en (9.23) y obtener que u es solución de nuestro problema. ∎

Nota 9.21 Observemos que si

$$g(x,y,z,p,q) = a(x,y)z + b(x,y)p + c(x,y)q + h(x,y),$$

es decir es lineal en (z,p,q) (y continua), entonces el dominio de g es de la forma $U \times \mathbb{R}^3$ y la constante de lipchicianidad M sólo depende de a, b y c en un compacto de $U \subset \mathbb{R}^2$, que podemos tomar tan grande como queramos.

Por otra parte si U contiene el dominio de dependencia —D— de todos sus puntos, podemos tomar M como una cota del máximo en módulo de a, b y c en un compacto $K \subset U$ que a su vez podemos tomar tan grande como queramos y que contenga el dominio de dependencia de todos sus puntos. No es necesario considerar una cota de g y si llamamos k a una cota de $|h|$ en el compacto K tendremos que

$$|u_1(x,y)| = \iint_D |h(x,y)|dx\,dy \le \frac{k(x+y)^2}{2},$$
$$|p_1(x,y)| = |u_{1x}(x,y)| \le \int_{-x}^{y} |h(x,\eta)|d\eta \le k|x+y|,$$
$$|q_1(x,y)| = |u_{1y}(x,y)| \le \int_{-y}^{x} |h(\xi,y)|d\xi \le k|x+y|,$$

y por tanto si $|x+y| \le T$, para un $T > 0$ tan grande como queramos, tendremos que para $|t| \le T$, también se tiene $Z_1(t) \le \mu$ como en el caso general y se sigue sin dificultad que la solución u está definida globalmente en todo U. En definitiva hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema de Existencia 9.22 *Dadas sobre una curva inicial tres funciones u, p y q, que satisfacen las condiciones de compatibilidad, y f está localmente acotada y es localmente lipchiciana en las tres últimas variables uniformemente en las dos primeras, entonces para cada punto de la curva existe una solución definida en un entorno del punto, del problema de Cauchy*

$$z_{xy} = f(x,y,z,z_x,z_y),$$
$$z = u, \quad z_x = p, \quad z_y = q, \qquad \textit{(sobre la curva)},$$

9.7.2. Unicidad de solución.

Para ver la unicidad supongamos que hay dos soluciones u y v, de clase 1, satisfaciendo las condiciones del Teorema (9.20), entonces para U

un abierto común de definición de ambas funciones, que podemos tomar de la forma $[-L, L]^2$ y T suficientemente pequeño tendremos que

$$(u, u_x, u_y), (v, v_x, v_y) \in V,$$

ya que estas 6 funciones se anulan en $x + y = 0$, y por tanto —con la notación de la lección— si $(x, y) \in G$

$$\begin{aligned}
|u(x,y) - v(x,y)| &\leq \iint_D |g(\xi,\eta,u,u_x,u_y) - g(\xi,\eta,v,v_x,v_y)|d\xi\, d\eta \\
&\leq M \iint_D [|u-v| + |u_x - v_x| + |u_y - v_y|]d\xi\, d\eta \\
|u_x(x,y) - v_x(x,y)| &\leq M \int_{-x}^{y} [|u-v| + |u_x - v_x| + |u_y - v_y|]d\eta \\
|u_y(x,y) - v_y(x,y)| &\leq M \int_{-y}^{x} [|u-v| + |u_x - v_x| + |u_y - v_y|]d\xi,
\end{aligned}$$

de donde se sigue que para

$$U(t) = \max_{x+y=t,(x,y)\in G} [|u-v| + |u_x - v_x| + |u_y - v_y|,$$

se tiene para todo $|t| \leq T$ que

$$U(t) \leq \lambda \int_0^t U(t)dt,$$

lo cual implica que a partir de un $n \in \mathbb{N}$

$$\max_{|t|\leq 1/n} U(t) \leq \lambda \max_{|t|\leq 1/n} U(t)\frac{1}{n},$$

lo cual es absurdo para n grande, a menos que $U(t) = 0$ para $|t| \leq 1/n$, es decir

$$u(x, y) = v(x, y),$$

en un entorno de nuestra curva.

En definitiva hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema de Unicidad 9.23 *Si consideramos sobre una curva inicial tres funciones u, p y q, que satisfacen las condiciones de compatibilidad, y f está localmente acotada y es localmente lipchiciana en las tres últimas*

variables uniformemente en las dos primeras, entonces para cada punto de la curva existe una única solución definida en un entorno del punto, del problema de Cauchy

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y),$$
$$z = u, \quad z_x = p, \quad z_y = q, \qquad \textit{(sobre la curva)},$$

en el sentido de que si existe otra, coinciden en un entorno del punto.

9.7.3. Dependencia de las condiciones iniciales.

Supongamos en primer lugar que $g(x, y, z, z_1, z_2; \lambda)$ depende de un parámetro λ multidimensional, que para un λ_0

$$g(x, y, z, z_1, z_2; \lambda) \longrightarrow g(x, y, z', z_1', z_2'; \lambda_0),$$
$$\text{cuando} \quad (z, z_1, z_2, \lambda) \longrightarrow (z', z_1', z_2', \lambda_0),$$

que para cada λ está en las condiciones de (9.20) y que $|g| \leq k$ en un entorno compacto del $(0, 0, 0, 0, 0; \lambda_0)$, entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 9.24 *La solución z de*

$$z(x, y) = \iint_D g(x, y, z, z_x, z_y; \lambda) dx\, dy, \tag{9.25}$$

satisface $z(x, y; \lambda) \longrightarrow z(x, y; \lambda_0)$, cuando $\lambda \to \lambda_0$ (lo mismo z_x y z_y).

Demostración. Sabemos por el teorema de existencia y unicidad y por (9.20), que la solución correspondiente a cada λ —así como sus derivadas de primer orden— es un límite uniforme de funciones continuas en $\lambda = \lambda_0$, por lo que ellas mismas lo son. ∎

Al principio de la lección hemos visto que la solución de (9.20) que satisface las condiciones fijadas sobre la curva, $z = u$, $z_x = p$ y $z_y = q$, es $v = \varphi + z$, para

$$\varphi(x, y) = \frac{u(A) + u(B)}{2} + \frac{1}{2} \int_{C_1} [p dx - q dy],$$

y z la solución de

$$z_{xy} = g(x, y, z, z_x, z_y),$$
$$\text{para} \qquad g(x, y, z, z_1, z_2) = f(x, y, z + \varphi, z_1 + \varphi_x, z_2 + \varphi_y),$$

que tanto ella como sus derivadas se anulan sobre la curva y por tanto solución de la ecuación integro–diferencial

$$z(x,y) = \iint_D g(x,y,z,z_x,z_y)dx\,dy.$$

Por tanto para estudiar cómo depende v de las funciones u, p y q, basta estudiar la dependencia de φ y la de z. Para ello consideremos que

$$u = u(x,y(x);\lambda), \quad p = p(x,y(x);\lambda), \quad q = q(x,y(x);\lambda),$$

dependen de un parámetro λ y son continuas en $\lambda = \lambda_0$, en el sentido de que son continuas en los puntos $(x,y(x),\lambda_0)$ y por tanto se tiene que si $x \to x_0$ y $\lambda \to \lambda_0$, entonces

$$u(x,y(x);\lambda) \to u(x_0,y(x_0);\lambda_0),$$

y lo mismo para p y q. En cuyo caso φ depende de λ y es continua en $\lambda = \lambda_0$ y como $\varphi_{xy} = 0$, tendremos que

$$\varphi_x(x,y) = \varphi_x(x,y(x)) = p(x,y(x)),$$
$$\varphi_y(x,y) = \varphi_y(x(y),y) = q(x(y),y),$$

por lo que también φ_x y φ_y dependen de λ continuamente en $\lambda = \lambda_0$. Como consecuencia también

$$g(x,y,z,z_1,z_2;\lambda) =$$
$$= f(x,y,z+\varphi(x,y;\lambda), z_1+\varphi_x(x,y;\lambda), z_2+\varphi_y(x,y;\lambda)),$$

es continua en $\lambda = \lambda_0$. Además si f está acotada en un entorno compacto del $(0,0,u(0,0;\lambda_0),p(0,0;\lambda_0),q(0,0;\lambda_0))$, entonces g lo está en un entorno compacto del $(0,0,0,0,0,\lambda_0)$. Si f es una función localmente lipchiciana en las tres últimas variables, uniformemente en las dos primeras, entonces g es localmente lipchiciana en (z,z_1,z_2), uniformemente en (x,y,λ), para los λ de un entorno de λ_0. En estos términos tenemos el siguiente resultado.

Teorema de dependencia continua 9.25 *Si consideramos sobre una curva inicial tres funciones u, p y q, que satisfacen las condiciones de compatibilidad, dependen continuamente de un parámetro λ y f es una función continua, localmente lipchiciana en las tres últimas variables, uniformemente en las dos primeras, entonces para cada punto de la curva y cada*

parámetro λ_0, existe un entorno del punto, un entorno del parámetro y una función continua $v = \varphi + z$ definida en su producto, tal que para cada λ del entorno, $v(\cdot;\lambda)$ es la solución, del problema de Cauchy

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y),$$
$$z = u(\cdot;\lambda), \quad z_x = p(\cdot;\lambda), \quad z_y = q(\cdot;\lambda), \qquad \textit{(sobre la curva)},$$

además v_x y v_y también son continuas en λ.

Demostración. Es consecuencia de que φ y z lo son. ∎

Teorema 9.26 *Si $g(x, y, z, p, q; \lambda)$ es de clase 1, entonces la solución de (9.25) tiene derivada parcial z_λ, es continua en λ y es solución de la EDP lineal de tipo hiperbólico*

$$z_{\lambda xy} = g_\lambda + g_z z_\lambda + g_p z_{\lambda x} + g_q z_{\lambda y},$$

obtenida derivando formalmente (9.25).

Demostración. Consideremos la función, para $\lambda_2 \neq \lambda_1$

$$u(x, y; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{z(x, y; \lambda_1) - z(x, y; \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

la cual satisface la ecuación integro–diferencial

$$\begin{aligned} u(x, y; \lambda_1, \lambda_2) &= \iint_D (g_\lambda + g_z u + g_p u_x + g_q u_y) dx\, dy, \\ &= \iint_D h(x, y, u, u_x, u_y; \lambda_1, \lambda_2) dx\, dy, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el teorema del valor medio y las derivadas de g están evaluadas en un punto intermedio entre los puntos

$$P = (\xi, \eta, z(\xi, \eta; \lambda_1), z_x(\xi, \eta; \lambda_1), z_y(\xi, \eta; \lambda_1); \lambda_1),$$
$$Q = (\xi, \eta, z(\xi, \eta; \lambda_2), z_x(\xi, \eta; \lambda_2), z_y(\xi, \eta; \lambda_2); \lambda_2).$$

Ahora bien fijado λ_1, h es continua en λ_2, para $\lambda_2 = \lambda_1$ y aunque no sabemos que h sea continua en (x, y) sí es obviamente lipchiciana en (u, u_x, u_y) y se tiene la acotación en un compacto, por tanto podemos

aplicar el teorema de existencia y para todo λ_2, incluido $\lambda_2 = \lambda_1$, hay solución u. Ahora aplicando (9.24), tendremos que u, y sus derivadas

$$
\begin{aligned}
u_x(x,y;\lambda_1,\lambda_2) &= \int_{-x}^{y} (g_\lambda + g_z u + g_p u_x + g_q u_y)dy, \\
u_y(x,y;\lambda_1,\lambda_2) &= \int_{-y}^{x} (g_\lambda + g_z u + g_p u_x + g_q u_y)dx,
\end{aligned} \tag{9.26}
$$

son continuas en $\lambda_2 = \lambda_1$, por tanto z, z_x y z_y son derivables respecto de λ siendo

$$
\lim_{\lambda_2\to\lambda_1} u = z_\lambda, \quad \lim_{\lambda_2\to\lambda_1} u_x = z_{x\lambda}, \quad \lim_{\lambda_2\to\lambda_1} u_y = z_{y\lambda},
$$

y haciendo $\lambda_2 \to \lambda_1$ en la ecuación tendremos que

$$
z_\lambda(x,y;\lambda_1) = \iint_D (g_\lambda + g_z z_\lambda + g_p z_{x\lambda} + g_q z_{y\lambda})dx\,dy,
$$

y derivando esta ecuación respecto de x e y y haciendo $\lambda_2 \to \lambda_1$ en (9.26) tendremos que

$$
\begin{aligned}
z_{\lambda x}(x,y;\lambda_1) &= \int_{-x}^{y} (g_\lambda + g_z z_\lambda + g_p z_{x\lambda} + g_q z_{y\lambda})dy = z_{x\lambda}(x,y;\lambda_1), \\
z_{\lambda y}(x,y;\lambda_1) &= \int_{-y}^{x} (g_\lambda + g_z z_\lambda + g_p z_{x\lambda} + g_q z_{y\lambda})dx = z_{y\lambda}(x,y;\lambda_1),
\end{aligned}
$$

por lo tanto z_λ es la solución de

$$
u(x,y;\lambda_1) = \iint_D (g_\lambda + g_z u + g_p u_x + g_q u_y)dx\,dy,
$$

y como el integrando de esta ecuación es continuo en λ, tendremos que z_λ también lo es y satisface la ecuación del enunciado. ∎

Teorema de dependencia diferenciable 9.27 *Si u, p y q, dependen diferenciablemente de λ y f es de clase 1, entonces la solución $v(\cdot;\lambda) = \varphi + z$ es de clase 1 en λ.*

9.7.4. El problema de Goursat.

Otro problema que también se puede resolver por el método de las aproximaciones sucesivas consiste en resolver la EDP

$$
z_{xy} = f(x,y,z,z_x,z_y),
$$

con los valores de z conocidos sobre una curva característica, el eje x y sobre otra curva estrictamente creciente $x = x(y)$,

$$z(x,0) = u(x), \qquad z(x(y),y) = v(y),$$

que supondremos pasa por el origen y en él z es continua, $u(0) = v(0)$. Este problema se conoce como *problema de Goursat* y podemos plantearlo de forma equivalente observando que si z es solución, entonces para cada punto (x,y), con $x,y \geq 0$, y D el cuadrado de vértices (x,y), $(x,0)$, $(x(y),y)$ y $(x(y),0)$

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y,z,z_x,z_y) &= \iint_D z_{xy}dx\,dy \\ &= \int_0^y \int_{x(y)}^x z_{xy}dx\,dy \\ &= z(x,y) - z(x,0) - z(x(y),y) + z(x(y),0),\end{aligned}$$

(si $x(y) < x$, en caso contrario cambia algún signo en la expresión) lo cual equivale a que z sea solución de la ecuación

$$z(x,y) = u(x) + v(y) - u(x(y)) + \iint_D f(x,y,z,z_x,z_y).$$

Ahora de una manera semejante a la del problema de Cauchy, se demuestra que el siguiente proceso iterativo

$$\begin{aligned}z_0(x,y) &= u(x) + v(y) - u(x(y)), \\ z_{m+1}(x,y) &= u(x) + v(y) - u(x(y)) + \iint_D f(x,y,z_m,z_{mx},z_{my})dx\,dy,\end{aligned}$$

tiene límite y es la solución (única y que depende continuamente de los datos iniciales) de nuestro problema.

9.7.5. El problema de valor inicial característico.

El mismo proceso demuestra la existencia de solución en el caso degenerado en el que la segunda curva es otra característica, en nuestro caso el eje $x = 0$, este problema se llama *problema de valor inicial característico* y puede considerarse también como un caso límite de problema de Cauchy en el que la curva de los datos iniciales tiende a la curva formada por los dos semiejes positivos, no siendo necesario dar los valores de z_x

y z_y sobre esta curva, pues quedan determinados (salvo una constante), por los valores de z sobre la curva y la propia ecuación (demuéstrelo el lector).

9.8. Sistemas hiperbólicos

El método de las aproximaciones sucesivas puede aplicarse también para demostrar la existencia de solución de un sistema *cuasi lineal* de tipo hiperbólico, el cual vimos en el tema anterior que podemos expresar de la forma canónica,

$$\begin{aligned} v_{ix} + \lambda_i v_{iy} &= c_i, \qquad (i = 1, \dots, n), \\ \mathbf{v}_x + \Lambda \mathbf{v}_y &= \mathbf{c}, \qquad (\text{en forma matricial}), \end{aligned} \tag{9.27}$$

donde los λ_i y los c_i son función de $(x, y, v_1, \dots, v_n)$; y demostrar la unicidad cuando fijamos la solución sobre el eje y

$$v_i(0, y) = \varphi_i(y).$$

Supongamos que $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ es una solución de (9.27), satisfaciendo estas condiciones, entonces para cada $i = 1, \dots, n$, podemos considerar el campo característico

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_i(x, y, \mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial y},$$

y su grupo uniparamétrico

$$X_i = (x_i, y_i) \colon \mathcal{W}_i \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

cuyas componentes satisfacen, para cada $(t, p) \in \mathcal{W}_i$

$$\begin{aligned} x'_{ip}(t) &= 1 \\ y'_{ip}(t) &= \lambda_i[x_i(t, p), y_i(t, p), \mathbf{v}(X_i(t, p))] \end{aligned}$$

lo cual implica que para $p = (x, y)$

$$\begin{aligned} x_i(t,p) &= t + x \\ y_i(t,p) &= y + \int_0^t \lambda_i[X_i(s,p), \mathbf{v}(X_i(s,p))]ds, \end{aligned}$$

por tanto $x_i(-x, p) = 0$. Además se tiene que

$$c_i[X_i(t,p), \mathbf{v}(X_i(t,p))] = D_i v_i[X_i(t,p)] = (v_i \circ X_{ip})'(t),$$

lo cual implica que

$$v_i[X_i(t,p)] = v_i(p) + \int_0^t c_i[X_i(s,p), \mathbf{v}(X_i(s,p))]ds,$$

y en definitiva tomando $t = -x$, concluimos que las v_i y las y_i son solución del sistema de ecuaciones (donde $p = (x, y)$ es un punto arbitrario)

$$\begin{aligned} v_i(p) &= v_i[0, y_i(-x,p)] - \int_0^{-x} c_i[s + x, y_i(s,p), \mathbf{v}(s + x, y_i(s,p))]ds \\ &= \varphi_i[y_i(-x,p)] - \int_0^{-x} c_i[s + x, y_i(s,p), \mathbf{v}(s + x, y_i(s,p))]ds, \\ y_i(t,p) &= y + \int_0^t \lambda_i[s + x, y_i(s,p), \mathbf{v}(s + x, y_i(s,p))]ds, \end{aligned}$$

y este sistema es equivalente a nuestro problema de Cauchy original, pues si (v_i, y_i) es una solución tendremos que

$$X_i(t,p) = (t + x, y_i(t,p)),$$

es el grupo uniparamétrico del campo característico D_i y por tanto

$$D_i v_i[X_i(t,p)] = (v_i \circ X_{ip})'(t),$$

y por otra parte para cada $p = (x, y)$ si consideramos el punto del eje

$x = 0$, $q = X_i(-x, p)$, tendremos que $p = X_i(x, q)$ y

$$\begin{aligned} v_i[X_i(x,q)] &= v_i(q) - \int_0^{-x} c_i[s+x, y_i(s,p), \mathbf{v}(s+x, y_i(s,p))]ds \\ &= v_i(q) - \int_0^{-x} c_i[X_i(s,p), \mathbf{v}[X_i(s,p)]]ds \\ &= v_i(q) - \int_0^{-x} c_i[X_i(s+x,q), \mathbf{v}[X_i(s+x,q)]]ds \\ &= v_i(q) + \int_0^{x} c_i[X_i(s,q), \mathbf{v}[X_i(s,q)]]ds, \end{aligned}$$

y por tanto

$$D_i v_i(p) = D_i v_i[X_{iq}(x)] = (v_i \circ X_{iq})'(x) = c_i[p, \mathbf{v}(p)],$$

es decir las v_i son solución de (9.27) satisfaciendo las condiciones deseadas.

Veamos por tanto que este sistema en v_i, y_i tiene solución, para lo cual haremos uso, como dijimos, del método de las aproximaciones sucesivas. Pero antes necesitamos hacer unas consideraciones previas. Supondremos que nuestras funciones c_i y λ_i están definidas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^{2+n}$, en el que son de clase 1, que contiene un compacto del tipo

$$\begin{aligned} K = \{(x, y, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^{2+n} : \\ |x| \le \alpha,\ |y| \le \beta,\ |z_1 - \varphi_1(y)| \le \delta, \ldots, |z_n - \varphi_n(y)| \le \delta\}, \end{aligned}$$

entorno de la curva

$$\{(0, y, \varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y)) :\ y \in [-\beta, \beta]\},$$

del mismo modo supondremos que las φ_i son de clase 1 en un intervalo abierto que contiene a $[-\beta, \beta]$.

Ahora consideramos el conjunto G del plano limitado por el hexágono formado por las rectas

$$x = \alpha,\ x = -\alpha,\ y = \pm\beta \pm kx,$$

donde $k \ge 1$ es una constante que acota a los módulos de las funciones c_i, λ_i y sus primeras derivadas parciales en K y a las φ_i y sus derivadas en $[-\beta, \beta]$.

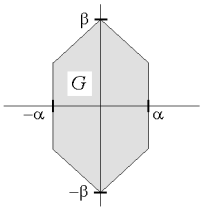


Figura 9.3.

Sobrentenderemos el índice $i = 1, \ldots, n$ y denotaremos por comodidad $\lambda = \lambda_i$, $c = c_i$ y $\varphi = \varphi_i$.

Consideremos las sucesiones de funciones, v_m e y_m, (aunque realmente es una para cada i, $v_m = v_{im}$, $y_m = y_{im}$ y en forma vectorial escribiremos $\mathbf{v}_m = (v_{1m}, \ldots, v_{nm})$), definidas de forma recurrente por las fórmulas, para $p = (x, y) \in G$

$$\begin{aligned} X_m(t,p) &= (t + x, y_m(t,p)), \\ v_{m+1}(p) &= \varphi[y_m(-x,p)] - \int_0^{-x} c[X_m(s,p), \mathbf{v}_m[X_m(s,p)]]ds, \\ y_{m+1}(t,p) &= y + \int_0^t \lambda[X_m(s,p), \mathbf{v}_m[X_m(s,p)]]ds, \end{aligned}$$

con los valores iniciales

$$v_0(p) = \varphi(y), \qquad y_0(t,p) = y,$$

en tales condiciones se tiene que si elegimos α suficientemente pequeño, entonces esta sucesión está bien definida.

Lema 9.28 *Para un α suficientemente pequeño se verifica que si $m \in \mathbb{N}$ es tal que para todo $j \leq m$, para cualquier $p = (x, y) \in G$ y para todo s entre 0 y $-x$,*

$$(X_j(s,p), \mathbf{v}_j[X_j(s,p)]) \in K,$$

entonces lo mismo también es cierto para $j = m + 1$.

Demostración. En primer lugar la curva

$$X_{m+1}(s,p) = (s + x, y_{m+1}(s,p)),$$

que para $s = 0$ pasa por p y para $s = -x$ pasa por un punto del eje $x = 0$, está, entre estos valores, enteramente en G, pues su pendiente en módulo $|\partial y_{m+1}(s,p)/\partial t|$ está acotada por k. Ahora bien por otra parte si tomamos α suficientemente pequeña tendremos que también para todo s entre 0 y $-x$

$$(X_{m+1}(s,p), \mathbf{v}_{m+1}(X_{m+1}(s,p))) \in K,$$

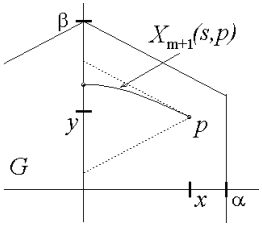


Figura 9.4.

pues basta observar que (para cualquiera de las n componentes de $\mathbf{v}_{m+1}$), si $(x', y') = p' = X_{m+1}(s, p) \in G$ entonces

$$\begin{aligned}|v_{m+1}(x', y') - \varphi(y')| &= |\varphi[y_m(-x', p')] - \varphi(y') - \\ &- \int_0^{-x'} c[s + x', y_m(s, p'), \mathbf{v}_m(s + x', y_m(s, p'))]ds| \\ &\leq |\varphi[y_m(-x', p')] - \varphi(y')| + \alpha k \\ &\leq k|y_m(-x', p')] - y'| + \alpha k \\ &\leq k^2\alpha + \alpha k \leq \delta. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Observemos que la hipótesis del lema anterior es válida para $m = 0$, por lo tanto es cierta para cualquier m y la sucesión está bien definida para

$$\alpha \leq \frac{\delta}{k(1+k)}.$$

Lema 9.29 *Para un α suficientemente pequeño se tiene que para todo $m \in \mathbb{N}$, para todo $i = 1, \ldots, n$ y para cualesquiera $(x, y), (x, y') \in G$*

$$|v_{i,m}(x, y) - v_{i,m}(x, y')| \leq 3k|y - y'|.$$

Demostración. Derivando nuestro sistema respecto de y tendremos que

$$\begin{aligned}v_{m+1y}(x, y) &= \varphi' y_{my} - \int_0^{-x} [c_y y_{my} + \sum_{i=1}^{n} c_{z_i} v_{imy} y_{my}]ds, \\ y_{m+1y}(t, p) &= 1 + \int_0^{t} [\lambda_y y_{my} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{z_i} v_{imy} y_{my}]ds,\end{aligned}$$

y si llamamos

$$\begin{aligned}\delta_m &= \text{máx}\{|v_{imy}(x, y)| : \ i = 1, \ldots, n; (x, y) \in G\}, \\ \epsilon_m &= \text{máx}\{|y_{imy}(t, x, y)| : \ i = 1, \ldots, n; (x, y) \in G, \ t \text{ entre 0 y } -x\},\end{aligned}$$

tendremos que

$$\begin{aligned}\delta_{m+1} &\leq k\epsilon_m + \alpha(k\epsilon_m + nk\delta_m\epsilon_m), \\ \epsilon_{m+1} &\leq 1 + \alpha(k\epsilon_m + nk\delta_m\epsilon_m),\end{aligned}$$

siendo por otra parte $\delta_0 \leq k$ y $\epsilon_0 = 1$, de donde se sigue por inducción que tomando

$$\alpha \leq \frac{1}{2k + 6nk^2},$$

se tiene que para todo m

$$\delta_m \leq 3k, \qquad \epsilon_m \leq 2,$$

puesto que

$$\begin{aligned}
\delta_{m+1} &\leq k\epsilon_m + \alpha(k\epsilon_m + nk\delta_m\epsilon_m), \\
&\leq k2 + \alpha(k2 + nk3k2) \leq 2k + 1 \leq 3k, \\
\epsilon_{m+1} &\leq 1 + \alpha(2k + 6nk^2) \leq 2,
\end{aligned}$$

y por tanto el teorema del valor medio nos asegura que para todo $i = 1, \ldots, n$

$$|v_{i,m}(x, y) - v_{i,m}(x, y')| \leq 3k|y - y'|. \quad \blacksquare$$

Como consecuencia —recordando todas las derivadas que acota k—, se tiene que en $p = (x, y) \in G$

$$\begin{aligned}
|v_{m+1} - v_m| &\leq k|y_m - y_{m-1}| + k\int_0^{-x} [|y_m - y_{m-1}| + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} |v_{i,m}[s + x, y_m(s, p)] - v_{i,m-1}[s + x, y_{m-1}(s, p)|]ds \\
&\leq k|y_m - y_{m-1}| + k\int_0^{-x} [|y_m - y_{m-1}| + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} |v_{i,m}[s + x, y_m(s, p)] - v_{i,m-1}[s + x, y_m(s, p)]| + \\
&+ |v_{i,m-1}[s + x, y_m(s, p)] - v_{i,m-1}[s + x, y_{m-1}(s, p)|]ds \\
&\leq k|y_m - y_{m-1}| + k\int_0^{-x} [(1 + 3nk)|y_m - y_{m-1}| + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} |v_{i,m}[s + x, y_m(s, p)] - v_{i,m-1}[s + x, y_m(s, p)]|]ds
\end{aligned}$$

del mismo modo tenemos que en el dominio de las y_m

$$|y_{m+1} - y_m| \leq k \int_0^t [(1+3nk)|y_m - y_{m-1}| + \\ + \sum_{i=1}^{n} |v_{i,m}[s+x, y_m(s,p)] - v_{i,m-1}[s+x, y_m(s,p)]|]ds,$$

y si consideramos

$$\mu_m = \text{máx}\,|v_{i,m} - v_{i,m-1}|, \qquad \nu_m = \text{máx}\,|y_{i,m} - y_{i,m-1}|,$$

tendremos que

$$\mu_{m+1} \leq k\nu_m + \alpha k[(1+3nk)\nu_m + n\mu_m],$$
$$\nu_{m+1} \leq \alpha k[(1+3nk)\nu_m + n\mu_m].$$

Ahora bien $\mu_1 \leq \alpha k$ y $\nu_1 \leq \alpha k$, y se sigue por inducción que si elegimos α suficientemente pequeño se tiene

$$\mu_m \leq (2nk\sqrt{\alpha})^m, \qquad \nu_m \leq (2nk\sqrt{\alpha})^m\sqrt{\alpha},$$

pues

$$\begin{aligned}
\mu_{m+1} &\leq k(2nk\sqrt{\alpha})^m\sqrt{\alpha} + \alpha k[(1+3nk)(2nk\sqrt{\alpha})^m\sqrt{\alpha} + \\
&\qquad + n(2nk\sqrt{\alpha})^m] \\
&\leq (2n)^m(k\sqrt{\alpha})^{m+1}[1 + \alpha(1+3nk) + n\sqrt{\alpha}] \\
&\leq (2nk\sqrt{\alpha})^{m+1}, \qquad (\text{si } 1 + \alpha(1+3nk) + n\sqrt{\alpha} \leq 2n), \\
\nu_{m+1} &\leq \alpha k[(1+3nk)(2nk\sqrt{\alpha})^m\sqrt{\alpha} + n(2nk\sqrt{\alpha})^m] \\
&\leq (2n)^m(k\sqrt{\alpha})^{m+1}[\alpha(1+3nk) + n\sqrt{\alpha}] \\
&= (2n)^m(k\sqrt{\alpha})^{m+1}\sqrt{\alpha}[\sqrt{\alpha}(1+3nk) + n] \\
&\leq (2nk\sqrt{\alpha})^{m+1}\sqrt{\alpha}, \qquad (\text{si } \sqrt{\alpha} \leq \frac{n}{1+3nk}).
\end{aligned}$$

En definitiva tendremos que para $\alpha > 0$ satisfaciendo

$$\alpha \leq \frac{\delta}{k(1+k)}, \qquad \alpha \leq \frac{1}{2k+6nk^2}, \qquad 2nk\sqrt{\alpha} < 1,$$
$$1 + \alpha(1+3nk) + n\sqrt{\alpha} \leq 2n, \qquad \sqrt{\alpha} \leq \frac{n}{1+3nk},$$

se tiene la convergencia uniforme, en sus dominios respectivos, de las $2n$ sucesiones

$$\lim v_{i,m} = v_{i,0} + \sum_{m=1}^{\infty} (v_{i,m} - v_{i,m-1}),$$
$$\lim y_{i,m} = y_{i,0} + \sum_{m=1}^{\infty} (y_{i,m} - y_{i,m-1}),$$

a la solución v_i, y_i de nuestro problema, pues los términos de ambas series están mayorados por los de la serie convergente

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2nk\sqrt{\alpha})^m = \frac{2nk\sqrt{\alpha}}{1 - 2nk\sqrt{\alpha}}.$$

Argumentos en la misma línea demuestran que esta es única y que depende continuamente de los datos iniciales. En definitiva tenemos el siguiente resultado.

Teorema 9.30 *El sistema*

$$v_{ix} + \lambda_i v_{iy} = c_i, \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

con las λ_i *y* c_i *funciones de* $(x, y, v_1, \ldots, v_n)$ *de clase 1, con las condiciones*

$$v_i(0, y) = \varphi_i(y)$$

siendo las φ_i *de clase 1 en un entorno del origen, tiene una solución local, definida en un entorno del origen, que es única y depende continuamente de las condiciones iniciales.*

9.9. La función de Riemann–Green

9.9.1. Operador diferencial lineal adjunto.

Definición. A todo ODL P en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, le corresponde un único ODL P^*, llamado el *adjunto* de P, satisfaciendo la siguiente pro-

piedad: para cualesquiera funciones $z, v \in \mathcal{C}^\infty(U)$, de soporte compacto

$$\int_U vP(z)dx_1 \cdots dx_n = \int_U zP^*(v)dx_1 \cdots dx_n.$$

En primer lugar tenemos que de existir es único, pues si hubiera dos bastaría considerar su diferencia, llamémosla L y para la función $z = L(v)$ se tendría que

$$\int_U L^2(v)dx_1 \cdots dx_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L(v) = 0,$$

y esto implica que $L = 0$, pues $L(f)(p)$ sólo depende del valor de f en un entorno de p.

La existencia vamos a demostrarla como consecuencia de las siguientes propiedades.

1.- Si P y Q tienen adjuntos, también $P + Q$ y vale

$$(P + Q)^* = P^* + Q^*.$$

2.- Si P y Q tienen adjuntos también $P \circ Q$ y vale

$$(P \circ Q)^* = Q^* \circ P^*,$$

pues

$$\begin{aligned}\int_U v[P \circ Q](z)dx_1 \cdots dx_n &= \int_U v[P[Q(z)]dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_U Q(z)P^*(v)dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_U zQ^*[P^*(v)]dx_1 \cdots dx_n.\end{aligned}$$

3.- Para $P = f \in \mathcal{O}_0(U)$ es obvio que existe el adjunto y es él mismo

$$P^* = f.$$

4.- Por último las derivadas parciales también tienen adjuntos y valen

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^* = -\frac{\partial}{\partial x_i},$$

para verlo consideremos z y v y el compacto K unión de sus soportes, ahora extendiéndolas como 0 fuera de U y considerando un abierto rectangular

$$R = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n),$$

que contenga a K tendremos que

$$\begin{aligned}\int_U v\frac{\partial z}{\partial x_i}dx_1\cdots dx_n &= \int_R v\frac{\partial z}{\partial x_i}dx_1\cdots dx_n\\ &= \int_R \frac{\partial(zv)}{\partial x_i}dx_1\cdots dx_n - \int_R z\frac{\partial v}{\partial x_i}dx_1\cdots dx_n\\ &= \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}\frac{\partial(zv)}{\partial x_i}dx_1\cdots dx_n -\\ &\quad -\int_U z\frac{\partial v}{\partial x_i}dx_1\cdots dx_n\\ &= -\int_U z\frac{\partial v}{\partial x_i}dx_1\cdots dx_n,\end{aligned}$$

pues se tiene que z y v se anulan en los puntos de la forma

$$(x_1, \ldots, a_i, \ldots, x_n), \qquad (x_1, \ldots, b_i, \ldots, x_n).$$

Como consecuencia de estas propiedades tenemos que todo ODL, $P \in \mathcal{O}_m(U)$

$$P = \sum_{|\alpha|\le m} f_\alpha D^\alpha,$$

tiene adjunto $P^* \in \mathcal{O}_m(U)$, que vale

$$\begin{aligned}P^* &= \sum_{|\alpha|\le m}[f_\alpha D^\alpha]^* = \sum_{|\alpha|\le m}[D^\alpha]^*\circ f_\alpha\\ &= \sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\circ f_\alpha,\end{aligned}$$

y de la definición se sigue que $(P^*)^* = P$.

Definición. Diremos que un operador es *autoadjunto* si $P^* = P$.

9.9.2. ODL adjuntos en el plano.

Consideremos ahora un ODL de orden 2 en un abierto U del plano

$$P = a\frac{\partial^2}{\partial x\partial x} + 2b\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2}{\partial y\partial y} + e\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y} + g,$$

en cuyo caso su adjunto es

$$P^* = \frac{\partial^2}{\partial x\partial x}\circ a + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\circ b + \frac{\partial^2}{\partial y\partial y}\circ c - \frac{\partial}{\partial x}\circ e - \frac{\partial}{\partial y}\circ f + g,$$

y por tanto para cada función v

$$\begin{aligned} P^*(v) &= (va)_{xx} + 2(vb)_{xy} + (vc)_{yy} - (ve)_x - (vf)_y + gv \\ &= av_{xx} + 2bv_{xy} + cv_{yy} + (2a_x + 2b_y - e)v_x + \\ &\quad + (2b_x + 2c_y - f)v_y + (a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy} - e_x - f_y + g)v. \end{aligned}$$

Ejercicio 9.9.1 Demostrar que P es autoadjunto si y sólo si $e = a_x + b_y$ y $f = b_x + c_y$.

Para cualesquiera funciones u y w se tiene que

$$\begin{aligned} uw_{xx} - u_{xx}w &= (uw_x)_x - (u_xw)_x, \\ uw_{xy} - u_{xy}w &= (uw_x)_y - (u_yw)_x = (uw_y)_x - (u_xw)_y, \end{aligned}$$

por tanto tendremos que para cualesquiera funciones z y v se tiene que

$$\begin{aligned} vP(z) - zP^*(v) &= vaz_{xx} - z(va)_{xx} + vbz_{xy} - z(vb)_{xy} + \\ &\quad + vbz_{yx} - z(vb)_{xy} + vcz_{yy} - z(vc)_{yy} + \\ &\quad + vez_x + z(ve)_x + vfz_y + z(vf)_y \\ &= (vaz_x)_x - ((va)_xz)_x + (vbz_x)_y - ((vb)_yz)_x + \\ &\quad + (vbz_y)_x - ((vb)_xz)_y + (vcz_y)_y - \\ &\quad - ((vc)_yz)_y + (vez)_x + (vfz)_y \\ &= \operatorname{div} D, \end{aligned}$$

para el campo tangente

$$\begin{aligned} D = (vaz_x - (va)_xz - (vb)_yz + vbz_y + vez)\frac{\partial}{\partial x} + \\ + (vbz_x - (vb)_xz + vcz_y - (vc)_yz + vfz)\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

9.9.3. El método de Riemann.

Con este título entendemos el método que el propio RIEMANN desarrolló para resolver un problema de Cauchy para una EDP lineal de tipo hiperbólico, y en el que hacía uso de una solución particular, para la ecuación adjunta de la original, de un problema de valor inicial característico.

Nos interesa estudiar el problema de Cauchy, en los términos de la lección 9.6, para una ecuación

$$z_{xy} + e(x,y)z_x + f(x,y)z_y + g(x,y)z = h(x,y),$$

es decir del tipo $P(z) = h$, con P un ODL de tipo hiperbólico, (que ya hemos reducido a forma canónica $a = c = 0$, $2b = 1$), con los valores de z y sus derivadas parciales conocidos sobre una curva estrictamente decreciente (ó creciente), $y = y(x)$. En tal caso tendremos —en los términos de la lección 9.6—, que para un punto (x_1, y_1) cualquiera y D su dominio de dependencia

(9.28)

$$\begin{aligned}
\iint_D [vP(z) - zP^*(v)]dx\,dy &= \iint_D \operatorname{div} D\,dx \wedge dy \\
&= \int_C i_D(dx \wedge dy) = \int_C [Dx\,dy - Dy\,dx] \\
&= \int_C \left[\left(\frac{1}{2}vz_y + vez - \frac{1}{2}v_y z \right) dy - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{2}vz_x - \frac{1}{2}v_x z + vfz \right) dx \right] \\
&= -\int_{C_1} \omega_{z,v} + \int_{C_2} \left(\frac{1}{2}vz_y + vez - \frac{1}{2}v_y z \right) dy - \\
&\quad - \int_{C_3} \left(\frac{1}{2}vz_x - \frac{1}{2}v_x z + vfz \right) dx \\
&= -\int_{C_1} \omega_{z,v} + \int_{C_2} \frac{1}{2}(vz)_y\,dy + \int_{C_2} (ve - v_y)z\,dy - \\
&\quad - \int_{C_3} \frac{1}{2}(vz)_x\,dx + \int_{C_3} (v_x - vf)z\,dx \\
&= -\int_{C_1} \omega_{z,v} + \int_{C_2} (ve - v_y)z\,dy + \int_{C_3} (v_x - vf)z\,dx +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}[v(x_1,y_1)\cdot z(x_1,y_1)-v(x_1,y(x_1))\cdot z(x_1,y(x_1))]+\\
&+\frac{1}{2}[v(x_1,y_1)\cdot z(x_1,y_1)-v(x(y_1),y_1)\cdot z(x(y_1),y_1)]\\
&=v(x_1,y_1)\cdot z(x_1,y_1)-\\
&\quad-\frac{1}{2}[v(x_1,y(x_1))\cdot z(x_1,y(x_1))+v(x(y_1),y_1)\cdot z(x(y_1),y_1)]-\\
&\quad-\int_{C_1}\omega_{z,v}+\int_{y(x_1)}^{y_1}(ve-v_y)z\,dy+\int_{x(y_1)}^{x_1}(vf-v_x)z\,dx,
\end{aligned}
$$

para la 1–forma

$$\omega_{z,v}=\left(\frac{1}{2}vz_x-\frac{1}{2}v_xz+vfz\right)dx-\left(\frac{1}{2}vz_y+vez-\frac{1}{2}v_yz\right)dy.$$

Debemos decir que nuestros cálculos han sido desarrollados suponiendo que nuestra curva de datos iniciales es decreciente, en caso contrario hay que cambiar algunos signos (hágalo el lector como ejercicio).

Nuestra intención es seleccionar, para cada punto (x_1,y_1), una función v de tal manera que la ecuación anterior nos ofrezca la solución de nuestro problema de Cauchy $P(z)=h$ satisfaciendo las condiciones sobre nuestra curva

$$z=u,\qquad z_x=p,\qquad z_y=q.$$

Una buena candidata, con intención de que desaparezca la z en la primera integral, es una que verifique la ecuación

$$P^*(v)=0, \tag{9.29}$$

y como no conocemos los valores de z a lo largo de las dos características $C_2\subset\{x=x_1\}$ y $C_3\subset\{y=y_1\}$, podemos eliminarlas si elegimos v satisfaciendo

$$
\begin{aligned}
v_y&=ve,\qquad \text{en el eje } x=x_1,\\
v_x&=vf,\qquad \text{en el eje } y=y_1,
\end{aligned}
$$

y por tanto estando determinadas sobre las curvas características por las expresiones (donde hemos fijado para mayor comodidad la condición

inicial $v(x_1, y_1) = 1$)

$$\begin{aligned} v(x_1, y) &= \exp\left[\int_{y_1}^{y} e(x_1, t)\, dt\right], \\ v(x, y_1) &= \exp\left[\int_{x_1}^{x} f(t, y_1)\, dt\right], \end{aligned} \tag{9.30}$$

ahora bien (9.29) y (9.30) definen un problema de valor inicial característico (ver la lección 7), el cual posee una única solución v que, al depender de (x_1, y_1), escribiremos de la forma

$$R(x, y; x_1, y_1) = v(x, y),$$

(observemos que esta función sólo depende del operador P y no de la curva sobre la que damos los datos de Cauchy de nuestro problema).

Definición. A esta función, $R(x, y; x_1, y_1)$, la llamaremos *función de Riemann–Green* asociada a nuestro operador P original.

Solución al problema de Cauchy. Con esta función tenemos que (9.28) nos permite expresar la solución de nuestro problema de Cauchy original (si la curva de los datos iniciales es decreciente), de la forma

(9.31)

$$\begin{aligned} z(x_1, y_1) = {} & \frac{1}{2} R(x_1, y(x_1); x_1, y_1) \cdot z(x_1, y(x_1)) + \\ & + \frac{1}{2} R(x(y_1), y_1; x_1, y_1) \cdot z(x(y_1), y_1) + \\ & + \int_{C_1} \omega_{z(x,y), R(x,y;x_1,y_1)} + \iint_D R(x, y; x_1, y_1) \cdot h(x, y) dx\, dy \\ = {} & \frac{1}{2} R(x_1, y(x_1); x_1, y_1) \cdot z(x_1, y(x_1)) + \\ & + \frac{1}{2} R(x(y_1), y_1; x_1, y_1) \cdot z(x(y_1), y_1) + \\ & + \int_{C_1} \left[\left(\frac{1}{2} Rp - \frac{1}{2} R_x u + fRu \right) dx - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{2} Rq + eRu - \frac{1}{2} R_y u \right) dy \right] + \\ & + \iint_D R(x, y; x_1, y_1) \cdot h(x, y) dx\, dy, \end{aligned}$$

y en el caso de que la curva sea creciente

$$z(x_1,y_1)=\frac{1}{2}R(x_1,y(x_1);x_1,y_1)\cdot z(x_1,y(x_1))+$$
$$+\frac{1}{2}R(x(y_1),y_1;x_1,y_1)\cdot z(x(y_1),y_1)+$$
$$+\int_{C_1}\left[\left(\frac{1}{2}Rq+eRu-\frac{1}{2}R_yu\right)\,dy-\left(\frac{1}{2}Rp-\frac{1}{2}R_xu+fRu\right)\,dx\right]-$$
$$-\iint_D R(x,y;x_1,y_1)\cdot h(x,y)dx\,dy,$$

(se queda como ejercicio para el lector comprobar que efectivamente es la solución a nuestro problema, para lo cual basta observar que hemos demostrado su existencia).

Solución al problema de valor inicial característico. Si lo que queremos es resolver un problema de valor inicial característico, la función de Riemann–Green también sirve para encontrar la solución, pues en el desarrollo de (9.28) (y en el de (9.31)), no hemos utilizado el que C_1 sea una curva especial. Si ahora consideramos que la curva C_1 está formada por las dos características que pasan por un punto (x_0,y_0), de tal modo que D es el rectángulo —ver la figura 9.5— de vértices (x_0,y_0), (x_0,y_1), (x_1,y_0) y (x_1,y_1), tendremos (siguiendo (9.31)), la representación

$$z(x_1,y_1)=\frac{R(x_1,y_0;x_1,y_1)\cdot z(x_1,y_0)+R(x_0,y_1;x_1,y_1)\cdot z(x_0,y_1)}{2}+$$
$$+\int_{y_0}^{y_1}\left(\frac{1}{2}Rz_y+Rez-\frac{1}{2}R_yz\right)\,dy+$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{1}{2}Rz_x-\frac{1}{2}R_xz+Rfz\right)\,dx+\iint_D Rh\,dx\,dy=$$
$$=\frac{1}{2}[R(x_1,y_0;x_1,y_1)\cdot z(x_1,y_0)+R(x_0,y_1;x_1,y_1)\cdot z(x_0,y_1)]$$
$$+\int_{y_0}^{y_1}\left(\frac{1}{2}(Rz)_y+Rez-R_yz\right)\,dy+$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{1}{2}(Rz)_x-R_xz+Rfz\right)\,dx+\iint_D Rh\,d\xi\,d\eta=$$

$$= R(x_1, y_0; x_1, y_1) \cdot z(x_1, y_0) + R(x_0, y_1; x_1, y_1) \cdot z(x_0, y_1) -$$
$$- R(x_0, y_0; x_1, y_1) \cdot z(x_0, y_0) +$$
$$+ \int_{y_0}^{y_1} (Re - R_y) z \, dy + \int_{x_0}^{x_1} (Rf - R_x) z \, dx + \iint_D Rh \, d\xi \, d\eta,$$

que nos determina la solución del problema de valor inicial característico de nuestra ecuación $P(z) = h$, conocida z sobre las características pasando por el punto (x_0, y_0). Como antes queda como ejercicio para el lector comprobar que efectivamente es la solución a nuestro problema.

Ahora, desarrollando la última igualdad, podemos expresar también la solución de la siguiente forma que nos será útil en el siguiente resultado

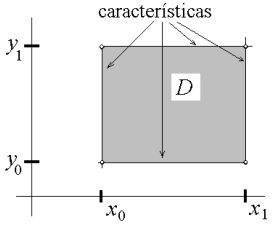


Figura 9.5.

$$z(x_1, y_1) = R(x_1, y_0; x_1, y_1) \cdot z(x_1, y_0) + R(x_0, y_1; x_1, y_1) \cdot z(x_0, y_1) -$$
$$- R(x_0, y_0; x_1, y_1) \cdot z(x_0, y_0) +$$
$$+ \int_{y_0}^{y_1} (Rez - (Rz)_y + Rz_y) \, dy +$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} (Rfz - (Rz)_x + Rz_x) \, dx + \iint_D Rh \, dx \, dy$$
$$= R(x_0, y_0; x_1, y_1) \cdot z(x_0, y_0) + \int_{y_0}^{y_1} (ez + z_y) R \, dy +$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} (fz + z_x) R \, dx + \iint_D Rh \, dx \, dy.$$

Teorema 9.31 *Si llamamos R^* a la función de Riemann–Green asociada a P^*, se tiene que*

$$R(x_0, y_0; x_1, y_1) = R^*(x_1, y_1; x_0, y_0),$$

en particular si $P = P^*$, es decir es autoadjunta,

$$R(x_0, y_0; x_1, y_1) = R(x_1, y_1; x_0, y_0).$$

Demostración. Para cada (x_0, y_0), la función

$$z(x, y) = R^*(x, y; x_0, y_0),$$

es la que satisface las condiciones

$$P(z) = 0, \quad z(x_0, y_0) = 1,$$
$$z_y = -ez, \quad \text{en } x = x_0 \quad z_x = -fz, \quad \text{en } y = y_0$$

y por las igualdades desarrolladas en el párrafo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} z(x_1, y_1) &= R(x_0, y_0; x_1, y_1) \cdot z(x_0, y_0) + \int_{y_0}^{y_1} (ez + z_y) R \, dy + \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} (fz + z_x) R \, dx + \iint_D Rh \, dx \, dy \\ &= R(x_0, y_0; x_1, y_1). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 9.9.2 Encontrar la función de Riemann–Green para el ODL $P(z) = z_{xy}$.

Dado un ODL P y una función invertible ϕ, definimos el ODL

$$Q = P + \frac{[P, \phi]}{\phi} = \frac{1}{\phi} \circ P \circ \phi,$$

que es el único que satisface

$$\phi \circ Q = P \circ \phi,$$

y cuyo adjunto vale

$$Q^* = \phi \circ P^* \circ \frac{1}{\phi}.$$

Proposición 9.32 *En los términos anteriores si*

$$P(z) = z_{xy} + e(x, y) z_x + f(x, y) z_y + g(x, y) z,$$

entonces

$$\begin{aligned} Q(z) = z_{xy} &+ \left(\frac{\phi_y}{\phi} + e \right) z_x + \left(\frac{\phi_x}{\phi} + f \right) z_y + \\ &+ \left(\frac{\phi_{xy}}{\phi} + \frac{\phi_y}{\phi} f + \frac{\phi_x}{\phi} e + g \right) z, \end{aligned}$$

y si $R_P(x,y;x_1,y_1)$ es la función de Riemann–Green asociada a P, la de Q es

$$R_Q(x,y;x_1,y_1)=\frac{\phi(x,y)}{\phi(x_1,y_1)}R_P(x,y;x_1,y_1).$$

Demostración. Por una parte se tiene que

$$\begin{aligned}Q(z)&=\frac{1}{\phi}\cdot P(z\phi)=\frac{1}{\phi}\left[(z\phi)_{xy}+e(z\phi)_x+f(z\phi)_y+gz\phi\right]\\&=z_{xy}+\left(\frac{\phi_y}{\phi}+e\right)z_x+\left(\frac{\phi_x}{\phi}+f\right)z_y+\\&\quad+\left(\frac{\phi_{xy}}{\phi}+\frac{\phi_y}{\phi}f+\frac{\phi_x}{\phi}e+g\right)z,\end{aligned}$$

y por otra fijando el punto (x_1,y_1) y llamando

$$u(x,y)=R_P(x,y;x_1,y_1),\qquad v(x,y)=R_Q(x,y;x_1,y_1),$$

tendremos que

$$\begin{aligned}&v(x_1,y_1)=1,\qquad Q^*[v]=\phi\cdot P^*[\frac{u}{\phi(x_1,y_1)}]=0,\\&v_y(x_1,y)=\frac{\phi_y(x_1,y)}{\phi(x_1,y_1)}u(x_1,y)+\frac{\phi(x_1,y)}{\phi(x_1,y_1)}u_y(x_1,y)\\&\qquad=\frac{\phi_y(x_1,y)}{\phi(x_1,y)}v(x_1,y)+\frac{\phi(x_1,y)}{\phi(x_1,y_1)}e(x_1,y)u(x_1,y)\\&\qquad=\left(\frac{\phi_y(x_1,y)}{\phi(x_1,y)}+e\right)v(x_1,y)\\&v_x(x,y_1)=\left(\frac{\phi_x(x,y_1)}{\phi(x,y_1)}+f\right)v(x,y_1).\quad\blacksquare\end{aligned}$$

Nota 9.33 Observemos que dado P, como en el enunciado, existe una función ϕ para la que Q es autoadjunto si y sólo si

$$\begin{aligned}\frac{\phi_y}{\phi}+e=\frac{\phi_x}{\phi}+f=0\quad&\Leftrightarrow\quad e=-(\log\phi)_y,\quad f=-(\log\phi)_x\\&\Leftrightarrow\quad e_x=f_y.\end{aligned}$$

Ejercicio 9.9.3 Calcular la función de Riemann–Green del ODL

$$Q(z)=z_{xy}+\frac{z_x+z_y}{x+y}.$$

Ejercicio 9.9.4 Demostrar que la función de Riemann–Green del ODL

$$P(z) = z_{xy} - \frac{2}{(x+y)^2} z$$

es

$$R(x, y; x_1, y_1) = \frac{(x + y_1)(x_1 + y) + (x - x_1)(y - y_1)}{(x + y)(x_1 + y_1)},$$

y demostrar utilizando el método de Riemann que la solución de $P(z) = 0$, que satisface $z = 0$ y $z_x = x^2$ en la recta $y = x$ es

$$z(x, y) = \frac{1}{4}(x - y)(x + y)^2.$$

Ejercicio 9.9.5 Encontrar la función de Riemann–Green del ODL

$$Q(z) = z_{xy} + \frac{2(z_x + z_y)}{(x + y)},$$

y demostrar, utilizando el método de Riemann, que la solución de $Q(z) = 0$, que satisface $z = 0$ y $z_x = 3x^2$ en la recta $y = x$ es

$$z(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$

9.10. Ejercicios resueltos

Ejercicio 9.3.1.- Demostrar que

$$(x_1 + \cdots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha,$$

y que para todo multi–índice α,

$$\alpha! \leq |\alpha|! \leq n^{|\alpha|} \alpha!.$$

Solución. Por inducción en $m \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(x_1 + \cdots + x_n)^{m+1} &= \left[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \right] (x_1 + \cdots + x_n) \\
&= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x_1^{\alpha_1+1} \cdots x_n^{\alpha_n} + \cdots + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n+1} \\
&= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!(\alpha_1+1)}{\alpha!(\alpha_1+1)} x_1^{\alpha_1+1} \cdots x_n^{\alpha_n} + \cdots + \\
&\qquad + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!(\alpha_n+1)}{\alpha!(\alpha_n+1)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n+1} \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=m+1 \\ \alpha_1 \geq 1}} \frac{m!\alpha_1}{\alpha!} x^\alpha + \cdots + \sum_{\substack{|\alpha|=m+1 \\ \alpha_n \geq 1}} \frac{m!\alpha_n}{\alpha!} x^\alpha = \\
&= \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{m!\alpha_1}{\alpha!} x^\alpha + \cdots + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{m!\alpha_n}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{(m+1)!}{\alpha!} x^\alpha.
\end{aligned}$$

La primera desigualdad de la segunda parte se demuestra primero para $n = 2$ y luego por inducción. La otra desigualdad es consecuencia de la primera parte para $x_i = 1$. ∎

Ejercicio 9.3.2.- Demostrar que para $x \in (-1, 1)$, y $k \in \mathbb{N}$, la serie

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k},$$

converge absolutamente a $k!/(1-x)^{1+k}$.

Solución. En primer lugar la serie

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n,$$

converge absolutamente y uniformemente en cualquier compacto de nuestro conjunto abierto, pues su radio de convergencia es $R \geq 1$,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+k)\cdots(n+1)} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+k} \cdots \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1,$$

pues si llamamos $\sqrt[n]{n+k} = 1 + c_n$, tendremos que $0 < c_n \to 0$, ya que

$$n + k = (1 + c_n)^n > \frac{n(n-1)}{2} c_n^2.$$

Ahora el resultado se demuestra por inducción aplicando el Teorema de Abel pues

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)!}{n!} x^n. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 9.3.3.- Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, con $|x_i| < 1$, entonces la serie $\sum_\alpha x^\alpha$ converge absolutamente a

$$\frac{1}{(1-x)^1}.$$

Solución.

$$\sum_\alpha x^\alpha = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{\alpha_i=0}^{\infty} x_i^{\alpha_i} \right) = \frac{1}{(1-x_1)\cdots(1-x_n)} = \frac{1}{(1-x)^1}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 9.3.4.- Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, con $\sum_{i=1}^n |x_i| < 1$, entonces la serie

$$\sum_\alpha \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha,$$

converge absolutamente a

$$\frac{1}{1 - (x_1 + \cdots + x_n)}.$$

Solución.

$$\sum_\alpha \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} (x_1 + \cdots + x_n)^j$$
$$= \frac{1}{1 - (x_1 + \cdots + x_n)}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 9.3.5.- Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, con $|x_i| < 1$, y $\beta \in \mathbb{N}^n$, entonces la serie

$$\sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta},$$

converge absolutamente a

$$\frac{\beta!}{(1-x)^{1+\beta}}.$$

Solución. En primer lugar la serie converge absolutamente y uniformemente en cualquier compacto de nuestro conjunto abierto, pues aplicando el ejercicio (9.3.2) tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\geq\beta}\frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}x^{\alpha-\beta} &= \sum_{\alpha\geq 0}\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!}x^{\alpha}\\ &= \prod_{i=1}^{n}\left[\sum_{\alpha_i=0}^{\infty}\frac{(\alpha_i+\beta_i)!}{\alpha_i!}x_i^{\alpha_i}\right]\\ &= \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\beta_i!}{(1-x_i)^{1+\beta_i}}\right]\\ &= \frac{\beta!}{(1-x)^{1+\beta}}.\end{aligned}$$

Observemos que el resultado también puede obtenerse aplicando el ejercicio (8.2.2) y el ejercicio (9.3.3) de la forma

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\geq\beta}\frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}x^{\alpha-\beta} &= \sum_{\alpha}D^{\beta}x^{\alpha} = D^{\beta}\left(\sum_{\alpha}x^{\alpha}\right)\\ &= D^{\beta}\frac{1}{(1-x)^{1}} = \frac{\beta!}{(1-x)^{1+\beta}},\end{aligned}$$

observando que la serie de las derivadas converge uniformemente en cualquier compacto de nuestro conjunto abierto. ∎

Ejercicio 9.3.6.- Demostrar que si $x\in\mathbb{R}^n$, con $\sum|x_i|<1$, y $\beta\in\mathbb{N}^n$, entonces la serie

$$\sum_{\alpha\geq\beta}\frac{|\alpha|!}{(\alpha-\beta)!}x^{\alpha-\beta},$$

converge absolutamente a

$$\frac{|\beta|!}{(1-x_1-\cdots-x_n)^{1+|\beta|}}.$$

Solución. La serie converge absolutamente en el abierto pues

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\geq\beta}\frac{|\alpha|!}{(\alpha-\beta)!}|x^{\alpha-\beta}| &= \sum_{\alpha\geq 0}\frac{|\alpha+\beta|!}{\alpha!}|x^{\alpha}|\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=j}\frac{(j+|\beta|)!}{\alpha!}|x^{\alpha}|\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+|\beta|)!}{j!}\sum_{|\alpha|=j}\frac{j!}{\alpha!}|x^{\alpha}|\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+|\beta|)!}{j!}(|x_1|+\cdots+|x_n|)^{j}\\ &= \frac{|\beta|!}{(1-|x_1|-\cdots-|x_n|)^{1+|\beta|}},\end{aligned}$$

por tanto se tiene el resultado pues se tienen las igualdades anteriores sin tomar módulos.

Observemos no obstante que también pudimos resolverlo del modo siguiente

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\geq\beta}\frac{|\alpha|!}{(\alpha-\beta)!}x^{\alpha-\beta} &= \sum_{\alpha\geq 0}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}D^\beta x^\alpha\\ &= D^\beta\left(\sum_{\alpha\geq 0}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}x^\alpha\right)\\ &= D^\beta\frac{1}{1-(x_1+\cdots+x_n)}\\ &= \frac{|\beta|!}{(1-x_1-\cdots-x_n)^{1+|\beta|}},\end{aligned}$$

pues se tiene que la serie de las derivadas converge uniformemente en cada compacto del abierto, ya que la diferencia de dos sumas parciales (con $\alpha\leq\alpha'$)

$$\begin{aligned}|s'_\alpha(x)-s_\alpha(x)| &\leq \sum_{j=|\alpha|}^{\infty}\frac{(j+|\beta|)!}{j!}(|x_1|+\cdots+|x_n|)^j\\ &\leq \sum_{j=|\alpha|}^{\infty}\frac{(j+|\beta|)!}{j!}r^j,\end{aligned}$$

se hace tan pequeña como queramos haciendo α tan grande como queramos y donde r es el máximo de $|x_1|+\cdots+|x_n|$ en el compacto. ∎

Ejercicio 9.3.7.- (a) Demostrar que si $g\in\mathcal{C}^\infty((a,b))$, para $[0,1]\subset(a,b)\subset\mathbb{R}$

$$g(1)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}g^{(i}(0)+\frac{1}{n!}\int_0^1(1-t)^n g^{(n+1}(t)dt.$$

(b) Que si $g(t)=f(tz+y)$, para $f\in\mathcal{C}^\infty(U)$, con $U\subset\mathbb{R}^n$ abierto, entonces

$$g^{(n}(t)=\sum_{|\alpha|=n}\frac{n!}{\alpha!}D^\alpha f(tz+y)z^\alpha,$$

Ind. Por inducción en n. (a) Derívese $(1-t)^{n+1}g^{(n+1}/(n+1)!$ e intégrese entre 0 y 1. ∎

Ejercicio 9.3.8.- Demostrar que f es analítica real en un punto si y sólo si lo es en un entorno del punto.

Solución. Por los teoremas (9.6) y (9.7). ∎

Ejercicio 9.3.9.- Demostrar que para $M,r>0$, la función

$$\varphi(y)=\frac{Mr}{r-(y_1+\cdots+y_m)},$$

definida en $\{\sum y_i \neq r\}$, verifica

$$D^\alpha \varphi(0) = M|\alpha|! r^{-|\alpha|},$$

y es analítica en $\{\sum |y_i| < r\}$.

Solución. Consideremos la función

$$h(y) = \frac{1}{1-(y_1+\cdots+y_m)},$$

para la que se demuestra fácilmente por inducción que

$$D^\alpha h(y) = \frac{|\alpha|!}{(1-y_1-\cdots-y_m)^{1+|\alpha|}},$$

y el resultado se sigue de que

$$\varphi(y) = Mh\left(\frac{x}{r}\right). \quad \blacksquare$$

Ejercicio 9.5.1.- Sabiendo que para una función $f = \sum c_\alpha x^\alpha$ analítica en 0, es $D^\beta(\sum c_\alpha x^\alpha) = \sum D^\beta(c_\alpha x^\alpha)$, demostrar que existen constantes $M, r > 0$ tales que

$$|D^\alpha f(0)| \leq |\alpha|! M r^{-|\alpha|}.$$

Solución. $f = \sum c_\alpha x^\alpha$ es absolutamente convergente en un entorno U de 0 y por la hipótesis y el ejercicio (8.2.2) del tema VIII, $D^\alpha f(0) = \alpha! c_\alpha$, por tanto tomando $x_i = r$, con r suficientemente pequeño tendremos $x \in U$ y $\sum |c_\alpha| r^{|\alpha|} < \infty$, por tanto para todos los α salvo para los de un conjunto A finito tendremos $|c_\alpha| r^{|\alpha|} \leq 1$, ahora basta considerar $\max\{1, |c_\alpha| r^{|\alpha|} : \alpha \in A\} = M$ y como $\alpha! \leq |\alpha|!$,

$$|D^\alpha f(0)| = \alpha! |c_\alpha| \leq |\alpha|! M r^{-|\alpha|}.$$

Ejercicio 9.9.3.- Calcular la función de Riemann–Green del ODL

$$Q(z) = z_{xy} + \frac{z_x + z_y}{x+y}.$$

Solución. Consideremos el ODL $P(z) = z_{xy}$ y la función

$$\phi(x,y) = x + y,$$

cuyo ODL asociado Q es el del enunciado, por tanto como la función de Riemann–Green asociada a P es constante $R_P = 1$, tendremos que la de Q es

$$R_Q(x,y;x_1,y_1) = \frac{x+y}{x_1+y_1}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 9.9.4.- Demostrar que la función de Riemann–Green del ODL

$$P(z) = z_{xy} - \frac{2}{(x+y)^2} z$$

es

$$R(x,y;x_1,y_1)=\frac{(x+y_1)(x_1+y)+(x-x_1)(y-y_1)}{(x+y)(x_1+y_1)},$$

y demostrar utilizando el método de Riemann que la solución de $P(z)=0$, que satisface $z=0$ y $z_x=x^2$ en la recta $y=x$ es

$$z(x,y)=\frac{1}{4}(x-y)(x+y)^2.$$

Solución. Lo primero es evidente pues por una parte $R=1$ en $x=x_1$ y en $y=y_1$, y por otra $P^*(R)=P(R)=0$. Ahora bien

$$0=z(x,x)\quad\Rightarrow\quad z_x(x,x)+z_y(x,x)=0,$$

lo cual implica que $p=x^2$ y $q=-x^2$ y por ser la curva de datos iniciales creciente tendremos que

$$\begin{aligned}
z(x_1,y_1)&=\int_{C_1}\frac{1}{2}Rq\,dy-\frac{1}{2}Rp\,dx\\
&=\int_{y_1}^{x_1}R(x,x,x_1,y_1)x^2dx\\
&=\int_{y_1}^{x_1}\frac{(x+y_1)(x_1+x)+(x-x_1)(x-y_1)}{2x(x_1+y_1)}x^2\,dx\\
&=\int_{y_1}^{x_1}\frac{(x^2+y_1x_1)x}{(x_1+y_1)}dx\\
&=\frac{1}{x_1+y_1}\left[\frac{x_1^4}{4}-\frac{y_1^4}{4}+y_1x_1(\frac{x_1^2}{2}-\frac{y_1^2}{2})\right]\\
&=\frac{1}{4(x_1+y_1)}[x_1^4-y_1^4+2y_1x_1(x_1^2-y_1^2)]\\
&=\frac{1}{4(x_1+y_1)}(x_1^2-y_1^2)(x_1+y_1)^2\\
&=\frac{1}{4}(x_1-y_1)(x_1+y_1)^2.\quad\blacksquare
\end{aligned}$$

Ejercicio 9.9.5.- Encontrar la función de Riemann–Green del ODL

$$Q(z)=z_{xy}+\frac{2(z_x+z_y)}{(x+y)},$$

y demostrar, utilizando el método de Riemann, que la solución de $Q(z)=0$, que satisface $z=0$ y $z_x=3x^2$ en la recta $y=x$ es

$$z(x,y)=2x^3-3x^2y+3xy^2-y^3.$$

Solución. Utilizando el último resultado vemos que para el operador P del ejercicio anterior y para $\phi=(x+y)^2$ se tiene que $\phi\circ Q=P\circ\phi$, pues para

$P(z) = z_{xy} + ez_x + fz_y + gz$, tenemos que

$$\begin{aligned} e = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\phi_y}{\phi} + e = \frac{2}{x+y}, \\ f = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\phi_x}{\phi} + f = \frac{2}{x+y}, \\ g = -\frac{2}{(x+y)^2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\phi_{xy}}{\phi} + \frac{\phi_y}{\phi} f + \frac{\phi_x}{\phi} e + g = 0, \end{aligned}$$

por tanto la función de Riemann–Green de Q es

$$\begin{aligned} R(x, y; x_1, y_1) &= \frac{\phi(x, y)}{\phi(x_1, y_1)} \frac{(x + y_1)(x_1 + y) + (x - x_1)(y - y_1)}{(x + y)(x_1 + y_1)} \\ &= \frac{(x + y)}{(x_1 + y_1)^3} [(x + y_1)(x_1 + y) + (x - x_1)(y - y_1)]. \end{aligned}$$

Ahora $p = 3x^2$ y $q = -3x^2$ y por ser la curva de datos iniciales creciente tendremos que

$$\begin{aligned} z(x_1, y_1) &= \int_{C_1} \frac{1}{2} Rq\, dy - \frac{1}{2} Rp\, dx \\ &= \int_{y_1}^{x_1} R(x, x, x_1, y_1) 3x^2 dx \\ &= \int_{y_1}^{x_1} \frac{2x}{(x_1 + y_1)^3} [(x + y_1)(x + x_1) + (x - x_1)(x - y_1)] 3x^2\, dx \\ &= \frac{6}{(x_1 + y_1)^3} \int_{y_1}^{x_1} x^3 (2x^2 + 2x_1 y_1) dx \\ &= \frac{12}{(x_1 + y_1)^3} \left(\frac{x_1^6}{6} - \frac{y_1^6}{6} + x_1 y_1 \left(\frac{x_1^4}{4} - \frac{y_1^4}{4} \right) \right) \\ &= 2x_1^3 - 3x_1^2 y_1 + 3x_1 y_1^2 - 2y_1^3. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

9.11. Bibliografía y comentarios

CARTAN, H.: "*Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas*". Ed. Selecciones Científicas, 1968.

COPSON, E.T.: "*Partial Differential Equations*". Ed. Cambridge Univ. Press, 1975.

COURANT, R. AND HILBERT, D.: "*Methods of Mathematical Phisics*". Vol.II, J. Willey, 1962.

GARABEDIAN, P.R.: "*Partial Differential Equations*". Chelsea, 1986.

JOHN, F. : "*Partial Differential Equations*". Springer–Verlag, 1982.

MUÑOZ, J.: "*Funciones analíticas de una variable*". (Apuntes de sus clases).

SPIVAK, M.: "*Differential Geometry*". Vol. V, Ed. Publish or Perish Inc., 1975.

VLADIMIROV, V.S.: "*Equations of Mathematical Phisics*". Marcel Dekker, 1971.

ZACHMANOGLOU, E.C. AND THOE, DALE W.: "*Introduction to Partial Differential Equations with Applications*". Dover, 1986.

La versión inicial del *Teorema de Cauchy–Kowalewski*, se debe al francés AUGUSTIN–LOUIS CAUCHY (*1789–1857*), el cual inició la teoría moderna de las ecuaciones en derivadas parciales. La rusa SOPHIE KOWALEWSKI (*1850–1891*), bajo la guía de KARL WEIERSTRASS (*1815–1897*), dió una demostración de tipo general en su Tesis doctoral.

En este teorema se demuestra que sólo hay una solución analítica para un problema de Cauchy analítico, aunque nada se dice sobre otro tipo de soluciones. El **Teorema de Holmgren** niega esta posibilidad (ver *Courant–Hilbert*, p.237 y el *Garabedian*, p.185). Por otro lado en la p. 67 del libro de *Spivak*, se habla del ejemplo, debido a PERRON, de sistema de dos EDP de primer orden

$$\begin{aligned} u_{1x} &= u_{1y} + u_{2y} \\ u_{2x} &= a u_{1y} + u_{2y} + f(x,y), \end{aligned}$$

el cual, si la constante a es negativa, no tiene solución a menos que f sea analítica (observemos que los autovalores de la matriz asociada satisfacen $(1-\lambda)^2 = a$). Además también hay ejemplos, con coeficientes analíticos, en los que las condiciones iniciales deben ser analíticas, si no no hay solución. Por lo tanto el *Teorema de Cauchy–Kowalewski*, en general es un resultado inmejorable, en el sentido de que no se puede debilitar.

Las definiciones que se dan de *operador adjunto* de un ODL P, en libros como el *Copson*, p.77 ó en el *Garabedian*, p.128, inducen a confusión, pues definen P^* como aquel para el que

$$vP(z) - zP^*(v),$$

es la divergencia de un campo D, siendo así que toda función es una divergencia, además de una infinidad de formas. Da la sensación de que estos autores han tenido como referencia el libro de *Courant–Hilbert*, que en su p.235 da, aparentemente, esta misma definición, pero no es igual, pues en este libro se especifica, en primer lugar, qué proceso se debe seguir para la obtención de esa divergencia —una integración por partes—, y en segundo lugar se describe cómo el campo D debe depender de u y v. Esto hace que su definición sí sea rigurosa.

La teoría moderna de las ecuaciones en derivadas parciales de tipo hiperbólico, fue iniciada por el alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann (*1826–1866*), con la representación de la solución de un problema de valor inicial para una EDP de segundo orden. Esta representación que ahora llamamos el método de Riemann aparece (ver *Courant–Hilbert*, p.449 ó *Copson*, p.78), como apéndice en su memoria de *1860*,

Riemann, G.F.B.: "*Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*". Abhandl. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, Vol. 8 (1860). Reimpreso en la Ed. Dover "Gesammelte Mathematische Werke", New York, 1953, pp. 156–178.

en el que, según leemos en la p.449 del *Courant–Hilbert*, no da una demostración general de existencia, sino una construcción de la solución de ejemplos explícitos que resuelve. Su fórmula puede entenderse como un caso especial de un principio mas fundamental, según el cual la solución z, de $P(z) = f$, se concibe como un *funcional* que depende continua y linealmente de f y por tanto, según demostró el húngaro Frigyes Riesz (*1880–1956*), se puede representar, en condiciones apropiadas, de la forma general

$$z(p) = \int_D A(q,p) f(q) dq.$$

Fin del Tema 9

Tema 10

La Ecuación de Laplace

10.1. Funciones armónicas

Definición. El *operador de LaPlace* ó *Laplaciano* en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ se define como el ODL de segundo orden

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Las ecuaciones de **ondas** (ver Tema 11, pág.873) y del **calor** (ver Tema 13, pág.943) se expresan en términos del operador de LAPLACE, respectivamente de la forma

$$a^2 \Delta u = u_{tt}, \qquad K \Delta u = u_t.$$

Definición. Llamamos **Ecuación de LaPlace** a

$$\Delta u = 0,$$

y *funciones armónicas* a las funciones $u \in \mathcal{C}^2(U)$, que son solución de la ecuación de LAPLACE.

Observemos que en el caso de la recta una función es armónica si y sólo si es afín

$$u'' = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad u(x) = ax + b,$$

lo cual implica que el valor de u en el punto medio de cualquier intervalo (α, β), es el valor medio de u en los extremos del intervalo

$$u\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{u(\alpha)+u(\beta)}{2},$$

esta es una propiedad general, que demostró GAUSS, de las funciones armónicas: "*El valor de una función armónica en el centro de una esfera es igual al promedio de sus valores en la superficie de la esfera*", que veremos en (10.45), pág.818.

Ejercicio 10.1.1 Dadas dos funciones armónicas f y g demostrar que fg es armónica sii $\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g = 0$.

Nota 10.1 Recordemos que si tenemos la métrica $g = \sum dx_i \otimes dx_i$, entonces $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ es la n–forma de volumen, la *divergencia* de un campo D es la función que satisface

$$(\operatorname{div} D)\omega = D^L\omega = d(i_D\omega),$$

y el *gradiente* de una función f es el campo que corresponde a la 1–forma df por el isomorfismo

$$\mathcal{D}(U) \longrightarrow \Omega(U), \qquad D \longrightarrow i_D g, \qquad i_D g(E) = D \cdot E.$$

Ejercicio 10.1.2 Demostrar que $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

Ejercicio 10.1.3 Demostrar que son armónicas las funciones de $\mathbb{R}^n$

$$a + \sum a_j x_j, \quad (\text{y para } i \neq j), \quad x_i x_j, \quad x_i^2 - x_j^2,$$

y caracterizar los polinomios homogéneos de segundo orden del plano que sean funciones armónicas.

Ejercicio 10.1.4 Demostrar que son armónicas las funciones de $\mathbb{R}^n - \{0\}$

$$\log[x_i^2 + x_j^2], \quad (\text{para } i \neq j),$$
$$\frac{1}{r^{n-2}}, \qquad \text{para } r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Ejemplo 10.1.1 Veamos en $\mathbb{R}^n$ qué funciones $u = f(r)$, dependientes sólo de la distancia $r = \sqrt{\sum x_i^2}$ al origen, son armónicas. Para ello consideremos un sistema de coordenadas $(r, \varphi_i, \ldots)$, en el que

$$\Delta = a\frac{\partial^2}{\partial r^2} + b\frac{\partial}{\partial r} + P = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + P,$$

siendo P un operador diferencial de segundo orden en el que todos los términos tienen derivadas parciales respecto de alguna coordenada φ_i, y la segunda igualdad se tiene porque

$$b = \Delta(r) = \frac{n-1}{r}, \qquad \Delta(r^2) = \sum \Delta(x_i^2) = 2n,$$
$$n = \Delta(r^2/2) = a + br = a + n - 1,$$

por tanto $a = 1$ y como $Pu = 0$, tendremos que

$$\Delta u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'' + \frac{n-1}{r}f' = 0,$$

y esto equivale a que para $n \geq 1$

$$f(r) = \begin{cases} Ar + B, & \text{si } n = 1, \\ A\log r + B, & \text{si } n = 2, \\ A/r^{n-2} + B, & \text{si } n \neq 2. \end{cases}$$

10.2. Funciones armónicas en el plano

10.2.1. Funciones armónicas en variables separadas.

Se demuestra fácilmente que en el plano xy, en el sistema de coordenadas polares (ρ, θ),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

y las funciones de la forma $u = f(\rho)g(\theta)$ son armónicas si y sólo si

$$f''g + \frac{1}{\rho}f'g + \frac{1}{\rho^2}fg'' = 0,$$

lo cual implica que existe una constante a para la que

$$\left.\begin{aligned}\rho^2\frac{f''}{f} + \rho\frac{f'}{f} &= a\\ -\frac{g''}{g} &= a\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned}\rho^2 f'' + \rho f' - af &= 0,\\ g'' + ag &= 0,\end{aligned}\right\}$$

la primera de las cuales es la ecuación de EULER —para resolverla hágase el cambio $\rho = \exp\{t\}$—, y tiene soluciones para $\alpha > 0$

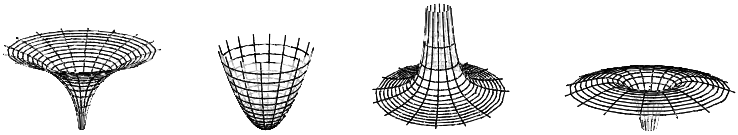


Figura 10.1. $\log\rho$, ρ^2, ρ^{-2}, $\cos(\log\rho)$.

$$f(\rho) = \begin{cases} 1, \log\rho, & \text{si } a = 0,\\ \rho^\alpha, \rho^{-\alpha}, & \text{si } a = \alpha^2,\\ \cos(\alpha\log\rho), \operatorname{sen}(\alpha\log\rho), & \text{si } a = -\alpha^2,\end{cases}$$

y sus combinaciones lineales, mientras que las soluciones de la segunda ecuación son para $\alpha > 0$

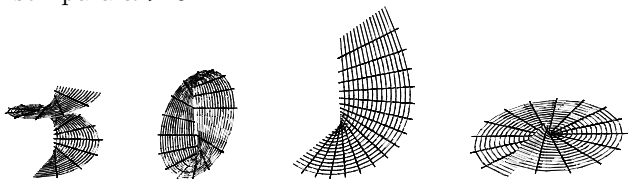


Figura 10.2. θ, $\operatorname{sen}\theta$, e^{θ}, $\mathrm{e}^{-\theta}$.

$$g(\theta) = \begin{cases} 1, \theta, & \text{si } \ a = 0, \\ \cos \alpha\theta, \operatorname{sen} \alpha\theta, & \text{si } \ a = \alpha^2, \\ \mathrm{e}^{\alpha\theta}, \mathrm{e}^{-\alpha\theta}, & \text{si } \ a = -\alpha^2, \end{cases}$$

y sus combinaciones lineales.

Ejercicio 10.2.1 Encontrar las funciones armónicas en el plano que sean de la forma $f(x)g(y)$.

10.2.2. Funciones armónicas y funciones analíticas.

Las funciones armónicas del plano están íntimamente relacionadas con las funciones analíticas de variable compleja. Recordemos la identificación $z = x+iy \in \mathbb{C} \to (x, y) \in \mathbb{R}^2$, y que a través de esta identificación identificamos aplicaciones entre abiertos $U, V \subset \mathbb{R}^2$

$$F = (u, v) \colon U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset \mathbb{R}^2,$$

con funciones de variable compleja

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) : U \subset \mathbb{C} \to V \subset \mathbb{C},$$

la cual es analítica en $\mathbb{C}$, si y sólo si u y v son de clase 1 y se satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x, \end{aligned}$$

ahora bien $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$ también es analítica y por tanto u y v son de clase 2, lo cual implica que u y v son armónicas, pues

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

Definición. Un par de funciones armónicas, como u y v, que sean la parte real e imaginaria de una función analítica en $\mathbb{C}$ se llaman *conjugadas armónicas*.

Ejemplo 10.2.1 Por ejemplo consideremos la función

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y,$$

que es analítica en $\mathbb{C}$, por tanto

$$u(x,y) = e^x \cos y, \qquad v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y,$$

son armónicas en el plano.

Ejemplo 10.2.2 La *función exponencial* e^z, de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, es sobre pero no es inyectiva, pues es constante en $z + 2k\pi i$, sin embargo si lo es en $\mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ y tiene inversa que llamamos *logaritmo* $\log z$. Veamos quien es su parte real y su parte imaginaria: $\log z = u + iv$, por tanto $z = \mathrm{e}^{u+iv} = \mathrm{e}^u(\cos v + i \operatorname{sen} v)$, de donde $x = \mathrm{e}^u \cos v$, $y = \mathrm{e}^u \operatorname{sen} v$, por lo que $x^2 + y^2 = \mathrm{e}^{2u}$ y $u = \log \sqrt{x^2 + y^2}$. Por otra parte $\tan v = y/x$ y $v = \theta$ siendo ambas funciones armónicas en el plano que hemos estudiado en el epígrafe 10.2.1.

Teorema 10.2 *Una función u en un abierto U simplemente conexo ("sin agujeros") del plano es armónica si y sólo si es la parte real (ó imaginaria) de una función analítica del abierto entendido en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Falta demostrar la implicación "⇒". Sea u armónica, entonces por el **Teorema de Stokes**, (14.12), pág.988 tendremos que para cualquier curva cerrada ∂V, borde de un abierto $V \subset U$,

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} u_x dy - u_y dx &= \int_V d(u_x dy - u_y dx) \\ &= \int_V u_{xx} dx \wedge dy + u_{yy} dx \wedge dy = 0,\end{aligned}$$

lo cual implica que fijado cualquier $(x_0, y_0) \in U$, se tiene que para todo (x, y) y toda curva que una (x_0, y_0) con (x, y), la función

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} u_x dy - u_y dx,$$

no depende de la curva elegida y se tiene que

$$\begin{aligned} v_x(x,y) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\epsilon,y)} (u_x dy - u_y dx) - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (u_x dy - u_y dx)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_x^{x+\epsilon} -u_y dx}{\epsilon} = -u_y(x,y), \\ v_y(x,y) &= u_x(x,y), \end{aligned}$$

y por tanto v es la conjugada armónica de u y $u + iv$ es analítica. ∎

Corolario 10.3 *Toda función armónica en un abierto U del plano es localmente la parte real (ó imaginaria) de una función analítica de variable compleja.*

Nota 10.4 Hemos definido las funciones armónicas como funciones de clase 2 que satisfacen la ECUACIÓN DE LAPLACE pues, como pone de manifiesto el siguiente ejercicio, el hecho de satisfacerse la ECUACIÓN DE LAPLACE en un abierto ni siquiera implica que la función deba ser continua en él.

Ejercicio 10.2.2 Demostrar que la función, para $z = x + iy$

$$u(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \\ \operatorname{Re} \mathrm{e}^{-1/z^4}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \end{cases}$$

satisface la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^2$, pero no es continua en el origen.

No obstante, se verifica —como demostraremos en (10.53), pág.824— que toda función armónica es analítica real (para $n = 1$ es evidente pues es afín), de hecho se tiene el siguiente resultado que no demostraremos.

Teorema 10.5 *Toda solución continua, de la ecuación de Laplace en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, es analítica en U.*

10.2.3. Transformaciones conformes.

Definición. Dados dos abiertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$, diremos que una aplicación diferenciable

$$F\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n,$$

es una *transformación conforme*, si conserva la orientación y los ángulos.

Lema 10.6 *Si $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, lineal es conforme, entonces (entendida como matriz) sus dos columnas a_i son ortogonales y del mismo módulo.*

Demostración. Las dos columnas de A, $a_i = Ae_i$ son ortogonales pues lo son $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$ y tienen el mismo módulo pues por un lado $\cos(e_1, e_1 - e_2) = \cos(e_2, e_2 - e_1)$, ya que

$$\frac{e_1 \cdot (e_1 - e_2)}{|e_1 - e_2|} = \frac{1}{|e_1 - e_2|} = \frac{e_2 \cdot (e_2 - e_1)}{|e_1 - e_2|},$$

y como $\cos(a,b) = \cos(Aa, Ab)$,

$$\begin{aligned} |a_1|^2 &= a_1 \cdot (a_1 - a_2) = |a_1||a_1 - a_2| \cos(a_1, z_1 - z_2) \\ &= |a_1||a_1 - a_2| \cos(e_1, e_1 - e_2) \quad \Rightarrow \\ |a_1| &= |a_1 - a_2| \cos(e_1, e_1 - e_2) = |a_2 - a_1| \cos(e_2, e_2 - e_1) = |a_2|. \end{aligned}$$ ∎

Ahora siguiendo con el corolario (10.3), tenemos aun más: si

$$F = (u, v) : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^2,$$

es un difeomorfismo entre los abiertos U y V del plano y define una función analítica de variable compleja, entonces este difeomorfismo lleva funciones armónicas en funciones armónicas.

Proposición 10.7 *$F : U \to V$ es una transformación conforme en el plano sii es difeomorfismo y está definida por una función analítica de variable compleja. En cuyo caso F lleva funciones armónicas en funciones armónicas.*

Demostración. "⇒"Si F_* conserva ángulos y la orientación, por 10.6, sus columnas (u_x, v_x) y (u_y, v_y) son ortogonales, bien orientadas y del mismo módulo, por tanto $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ por lo que F es analítica.

"⇐"Por una parte la matriz de la aplicación lineal tangente F_* es

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

para $R = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$, $u_x = R\cos\theta$ y $u_y = -R\operatorname{sen}\theta$, lo cual implica que cada vector se multiplica por un factor R y se gira un ángulo θ. Por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned} F^*[dx \wedge dy] &= du \wedge dv = (u_x dx + u_y dy) \wedge (v_x dx + v_y dy) \\ &= (u_x v_y - u_y v_x) dx \wedge dy \\ &= (u_x^2 + u_y^2) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Veamos que conserva las funciones armónicas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= u_x \frac{\partial}{\partial u} + v_x \frac{\partial}{\partial v}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= u_y \frac{\partial}{\partial u} + v_y \frac{\partial}{\partial v}, \end{aligned}$$

y por tanto[1] tendremos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= u_{xx}\frac{\partial}{\partial u} + u_x\left(\frac{\partial}{\partial x}\circ\frac{\partial}{\partial u}\right) + v_{xx}\frac{\partial}{\partial v} + v_x\left(\frac{\partial}{\partial x}\circ\frac{\partial}{\partial v}\right) = \\ &= u_{xx}\frac{\partial}{\partial u} + u_x\left(u_x\frac{\partial^2}{\partial u^2} + v_x\frac{\partial^2}{\partial v\partial u}\right) + \\ &\quad + v_{xx}\frac{\partial}{\partial v} + v_x\left(u_x\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + v_x\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= u_{yy}\frac{\partial}{\partial u} + u_y\left(\frac{\partial}{\partial y}\circ\frac{\partial}{\partial u}\right) + v_{yy}\frac{\partial}{\partial v} + v_y\left(\frac{\partial}{\partial y}\circ\frac{\partial}{\partial v}\right) = \\ &= u_{yy}\frac{\partial}{\partial u} + u_y\left(u_y\frac{\partial^2}{\partial u^2} + v_y\frac{\partial^2}{\partial v\partial u}\right) + \\ &\quad + v_{yy}\frac{\partial}{\partial v} + v_y\left(u_y\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + v_y\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right),\end{aligned}$$

y de aquí se sigue aplicando las Ecuaciones de Cauchy–Riemann, que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = (u_x^2 + u_y^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right).$$

lo cual implica que F lleva funciones armónicas en funciones armónicas. ∎

Este resultado puede ser útil a la hora de resolver el problema de Dirichlet en el plano, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.2.3 Encontrar una función continua f en

$$\{x^2 + y^2 \leq 1\} - \{(-1,0),(1,0)\},$$

solución de

$$\begin{aligned}\Delta f &= 0, \qquad \text{para } \ x^2 + y^2 < 1, \\ f(x,y) &= \begin{cases} 1, & \text{si } x^2 + y^2 = 1,\ y > 0, \\ -1, & \text{si } x^2 + y^2 = 1,\ y < 0, \end{cases}\end{aligned}$$

[1] Observemos que el determinante de F_* es $u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2$, por tanto para que sea difeomorfismo local en un punto basta que alguna de las u_x, u_y, v_x ó v_y sea no nula en ese punto.

Solución.- La función

$$F(z)=\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{(1-z)(\overline{1-z})}=\frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}+i\frac{2y}{(1-x)^2+y^2}=u+iv,$$

es analítica en el plano pinchado $D=\mathbb{C}\backslash\{1\}=\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$ y define un sistema de coordenadas (u,v) en D para el que

$$\begin{aligned}\{x^2+y^2<1\}&=\{u>0\},\\ \{x^2+y^2=1,\ y>0\}&=\{u=0,v>0\},\\ \{x^2+y^2=1,\ y<0\}&=\{u=0,v<0\},\end{aligned}$$

por tanto en este sistema de coordenadas tenemos que resolver

$$\Delta f=0,\quad \text{para}\quad u>0,\qquad f(0,v)=\begin{cases}1, & \text{si } v>0,\\ -1, & \text{si } v<0.\end{cases}$$

Ahora bien hemos visto que en coordenadas polares la función θ es armónica en el plano (u,v) (quitamos la semirrecta formada por los puntos $\{(u,0),u<0\}$) y por tanto en coordenadas cartesianas (u,v) también es armónica la función

$$\arctan\frac{v}{u}\colon(0,\infty)\times(-\infty,\infty)\to(-\pi/2,\pi/2).$$

Por tanto la solución a nuestro problema es $f=\frac{2}{\pi}\arctan\frac{v}{u}$, pues

$$\begin{aligned}f(u,v)&\to 1, && \text{cuando } v>0 \text{ y } u\to 0,\\ f(u,v)&\to -1, && \text{cuando } v<0 \text{ y } u\to 0,\end{aligned}$$

y en las coordenadas iniciales la solución es la función

$$\frac{2}{\pi}\arctan\frac{2y}{1-x^2-y^2}.\quad \blacksquare$$

10.3. Transformaciones en $\mathbb{R}^n$.

En las lecciones anteriores hemos encontrado algunos ejemplos de funciones armónicas, obviamente sus combinaciones lineales también lo son. Ahora veremos otros procesos con los que generar más funciones armónicas, para ello consideraremos difeomorfismos

$$F = (u_1, \dots, u_n) \colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n,$$

para los que $g \in \mathcal{C}^2(V)$ sea armónica si y sólo si lo es $f = F^* g \in \mathcal{C}^2(U)$.

10.3.1. Traslaciones, giros y homotecias.

La traslación por un vector $a = (a_i) \in \mathbb{R}^n$

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n),$$

obviamente conserva las funciones armónicas, por ejemplo (ver el ejercicio (10.1.4)) como

$$\frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2},$$

es armónica en $\mathbb{R}^4 - \{0\}$, entonces también lo es en $\mathbb{R}^4 - \{a\}$, para $a = (a_i)$, la función

$$\frac{1}{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 + (x_4 - a_4)^2}.$$

Los giros en el plano (ó en el espacio respecto de un eje) también dejan invariantes las funciones armónicas, por ejemplo para el giro

$$\begin{aligned} u &= x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha, \\ v &= x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha, \end{aligned}$$

se tiene que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2},$$

observemos que para $F = u + iv$, corresponde a $F(z) = z\, \mathrm{e}^{i\alpha}$, que es una transformación conforme.

Las homotecias $F(x) = kx$, para $k \neq 0$, también conservan las funciones armónicas.

10.3.2. Transformaciones lineales.

Hemos visto ejemplos de transformaciones lineales que conservan las funciones armónicas, sin embargo no toda transformación lineal lo hace. En el siguiente resultado se prueba que son las semejanzas.

Teorema 10.8 *Para una transformación afín $F(x) = \mathbf{A}x + \mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$, son equivalentes:*

(i) F^* lleva funciones armónicas en funciones armónicas.
(ii) Las columnas de $\mathbf{A}$ son ortogonales y del mismo módulo.
(iii) A es una semejanza.
(iv) F es conforme.

Demostración. (i)⇒(ii) Sabemos que x_ix_j y $x_i^2 - x_j^2$ son armónicas, por tanto para $u_i = F^*x_i = \sum a_{ij}x_j + b_i$, lo son u_iu_j y $u_i^2 - u_j^2$, es decir como $\partial_k u_i = a_{ik}$, $\partial_k(u_iu_j) = a_{ik}u_j + a_{jk}u_i$ y $\partial_k(u_i^2 - u_j^2) = 2u_ia_{ik} - 2u_ja_{jk}$, por lo tanto

$$0 = \sum_k \partial_{kk}(u_iu_j) = \sum_k 2a_{ik}a_{jk},$$
$$0 = \sum_k \partial_{kk}(u_i^2 - u_j^2) = 2\sum(a_{ik}^2 - a_{jk}^2),$$

es decir las columnas de A son ortogonales y del mismo módulo $r = \sqrt{\sum a_{ik}^2}$.

(ii)⇔(iii) Sea sigue que $A = rB$, para r el módulo de las columnas y B una matriz ortogonal $B^tB = I$, por tanto A es composición de una homotecia y una rotación es decir es una semejanza.

(iii)⇒(iv) $F_* = A = rB$ la cual conserva ángulos pues $A^tA = r^2I$ y

$$\cos((Ax),(Ay)) = \frac{Ax \cdot Ay}{|Ax||Ay|} = \frac{x^tA^tAy}{\sqrt{x^tA^tAx}\sqrt{y^tA^tAy}} = \frac{x \cdot y}{|x||y|} = \cos(x,y).$$

(iv)⇒(ii) Las columnas $z_i = Ae_i$ son ortogonales pues lo son las e_i y tienen el mismo módulo pues $\cos(x,y) = \cos(Ax,Ay)$, por tanto

$$\cos(e_i, e_i - e_j) = \frac{e_i \cdot (e_i - e_j)}{|e_i - e_j|} = \frac{1}{|e_i - e_j|} = \frac{e_j \cdot (e_j - e_i)}{|e_i - e_j|} = \cos(e_j, e_j - e_i)$$
$$|z_i|^2 = z_i \cdot (z_i - z_j) = |z_i||z_i - z_j|\cos(z_i, z_i - z_j)$$
$$= |z_i||z_i - z_j|\cos(e_i, e_i - e_j) \quad \Rightarrow$$
$$|z_i| = |z_i - z_j|\cos(e_i, e_i - e_j) = |z_j - z_i|\cos(e_j, e_j - e_i) = |z_j|.$$

(ii)⇒(i) Sea g armónica y veamos que $u = F^*g$ también lo es

$$u_{x_i} = \sum g_{x_k}(F)\partial_i u_k = \sum_k g_{x_k}(F)a_{ki} \quad \Rightarrow$$
$$\sum_i u_{x_i x_i} = \sum_k \sum_j g_{x_k x_j}(F) \sum_i a_{ji}a_{ki} = r^2 \sum_j g_{x_j x_j}(F) = 0. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.3.1 Demostrar que las reflexiones

$$F(x) = x - 2 < x, a > a \quad \Rightarrow \quad u_i = x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_j a_j a_i,$$

respecto de un hiperplano $\{x : \sum x_i a_i = 0\}$, para $\sum a_i^2 = 1$, conservan las funciones armónicas.

10.3.3. Inversiones respecto de esferas.

Otro tipo de transformación importante en el estudio de las funciones armónicas es la *inversión respecto de una esfera* $S(0, r)$,

$$F = (u_i)\colon \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^n\backslash\{0\}, \qquad F(x) = \frac{r^2}{\|x\|^2}x \quad \Leftrightarrow \quad u_i = \frac{r^2 x_i}{\sum_{i=1}^n x_j^2},$$

es decir deja los puntos de la esfera invariantes, los puntos de dentro los lleva a puntos de fuera en la misma dirección (y los de fuera a dentro), de modo que es constante el producto

$$\|x\| \cdot \|F(x)\| = r^2.$$

Que la inversión en el plano pinchado $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, conserva las funciones armónicas se sigue de que en términos complejos

$$F(z) = \frac{r^2 z}{z\overline{z}} = \frac{r^2}{\overline{z}},$$

es composición de la transformación conforme $G(z) = r^2/z$ y de la conjugación $z \to \overline{z}$ (que es la reflexión $(x, y) \to (x, -y)$).

Ejercicio 10.3.2 Demostrar que las inversiones en el plano pinchado $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, conservan las funciones armónicas, expresando las funciones y el operador de LaPlace en coordenadas polares.

Por lo tanto si g es armónica en el abierto $V = F(U)$, también lo es en el abierto U

$$f(x) = g\left(\frac{r^2 x}{\|x\|^2}\right),$$

por ejemplo la función

$$g(x) = g(x_1, x_2) = \log\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} = \log\|x - a\|,$$

es armónica en $\mathbb{R}^2 - \{a\}$, por lo tanto haciendo una inversión respecto de la esfera $S(0, r)$ también lo es

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= g\left(\frac{r^2 x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{r^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right) = \log\left\|\frac{r^2 x}{\|x\|^2} - a\right\| \\ &= \log\frac{r}{\|x\|} \cdot \left\|\frac{rx}{\|x\|} - \frac{\|x\| a}{r}\right\| \\ &= \log\frac{r}{\|x\|} + \log\left\|\frac{rx}{\|x\|} - \frac{\|x\| a}{r}\right\|, \end{aligned}$$

en el plano sin dos puntos $\mathbb{R}^2 - \{0, F(a)\}$.

Las inversiones en el espacio también sirven para construir funciones armónicas, pues si g es armónica en V abierto de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, entonces la función

$$f(x) = \frac{r}{\|x\|} g\left(\frac{r^2 x}{\|x\|^2}\right),$$

es armónica en el abierto U correspondiente por la inversión espacial respecto de la esfera centrada en el origen y radio r. Para verlo consideraremos en $\mathbb{R}^3$ las coordenadas esféricas que estudiamos a continuación.

Coordenadas esféricas. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ las coordenadas esféricas (ver la figura (7.11), pág.501)

$$x = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad z = \rho\cos\theta, \tag{10.1}$$

en cuyos términos se tiene

$$
\begin{aligned}
dx &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi d\rho + \rho\cos\theta\cos\varphi d\theta - \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi d\varphi,\\
dy &= \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi d\rho + \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi d\theta + \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi d\varphi,\\
dz &= \cos\theta d\rho - \rho\operatorname{sen}\theta d\theta\\
\partial_\rho &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\partial_x + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\partial_y + \cos\theta\partial_z \qquad (10.2)\\
&= \frac{x}{\rho}\partial_x + \frac{y}{\rho}\partial_y + \frac{z}{\rho}\partial_z\\
\partial_\theta &= \rho\cos\theta\cos\varphi\partial_x + \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\partial_y - \rho\operatorname{sen}\theta\partial_z\\
\partial_\varphi &= -\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\partial_x + \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\partial_y = -y\partial_x + x\partial_y
\end{aligned}
$$

lo cual implica que el jacobiano (el determinante de la matriz) es $\rho^2\operatorname{sen}\theta$ y por lo tanto la forma de volumen vale

$$dx\wedge dy\wedge dz = \rho^2\operatorname{sen}\theta d\rho\wedge d\theta\wedge d\varphi, \qquad (10.3)$$

y por otra parte calculando la matriz inversa se tiene que

$$
\begin{aligned}
\partial_x &= \frac{x}{\rho}\partial_\rho + \frac{xz}{\rho^3\operatorname{sen}\theta}\partial_\theta - \left(\frac{y}{\rho^2} + \frac{z\operatorname{sen}\varphi\cos\theta}{\rho^2\operatorname{sen}\theta}\right)\partial_\varphi\\
\partial_y &= \frac{y}{\rho}\partial_\rho + \frac{yz}{\rho^3\operatorname{sen}\theta}\partial_\theta + \left(\frac{x}{\rho^2} + \frac{z\cos\varphi\cos\theta}{\rho^2\operatorname{sen}\theta}\right)\partial_\varphi\\
\partial_z &= \frac{z}{\rho}\partial_\rho - \frac{x^2+y^2}{\rho^3\operatorname{sen}\theta}\partial_\theta + \left(\frac{xz\operatorname{sen}\varphi - yz\cos\varphi}{\rho^3\operatorname{sen}\theta}\right)\partial_\varphi
\end{aligned}
$$

y el campo normal unitario exterior $N = H/|H|$, para $H = \sum x_i\partial_{x_i}$ el campo de las homotecias, es en estas coordenadas por (10.2)

$$N = \frac{x}{\rho}\partial_x + \frac{y}{\rho}\partial_y + \frac{z}{\rho}\partial_z = \partial_\rho,$$

por lo que la dos–forma de area en las esferas centradas en el origen es

$$ds = i_N dx\wedge dy\wedge dz = i_{\partial_\rho}\rho^2\operatorname{sen}\theta d\rho\wedge d\theta\wedge d\varphi = \rho^2\operatorname{sen}\theta d\theta\wedge d\varphi. \qquad (10.4)$$

Ahora se demuestra que el laplaciano vale —demuéstrelo el lector—

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \qquad (10.5)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}P_2,
\end{aligned}
$$

donde P_2 es un operador en las variables angulares, pues por ejemplo

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \partial_x\left(\frac{x}{\rho}\partial_\rho + \frac{xz}{\rho^3\,\mathrm{sen}\,\theta}\partial_\theta - \left(\frac{y}{\rho^2} + \frac{z\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta}{\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\right)\partial_\varphi\right)\\ &= \partial_x\left(\frac{x}{\rho}\right)\partial_\rho + \frac{x}{\rho}\partial_x\partial_\rho + \partial_x\left(\frac{xz}{\rho^3\,\mathrm{sen}\,\theta}\right)\partial_\theta +\\ &+ \frac{xz}{\rho^3\,\mathrm{sen}\,\theta}\partial_x\partial_\theta - \partial_x\left(\frac{y}{\rho^2} + \frac{z\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta}{\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\right)\partial_\varphi -\\ &- \left(\frac{y}{\rho^2} + \frac{z\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta}{\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\right)\partial_x\partial_\varphi\end{aligned}$$

Ejercicio 10.3.3 Expresando las funciones y el operador de LaPlace en coordenadas esféricas, demostrar que si g es armónica en un abierto $V \subset \mathbb{R}^3 - \{0\}$, entonces la función

$$f(x) = \frac{r}{\|x\|}g\left(\frac{r^2 x}{\|x\|^2}\right),$$

es armónica en el abierto U correspondiente por la inversión espacial respecto de la esfera centrada en el origen y radio r.

Ejercicio 10.3.4 Aplicar el resultado anterior para encontrar la función f correspondiente a la función armónica en $\mathbb{R}^3 - \{(a,b,c)\}$

$$g(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Ejercicio 10.3.5 Demostrar que la proyección estereográfica desde el polo de la esfera al plano del ecuador conserva ángulos y transforma circunferencias en circunferencias o rectas.

Ejercicio 10.3.6 Demostrar que la aplicación $\tau = \pi_Q \circ \pi_P^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, composición de la inversa de la proyección estereográfica desde un polo P, con la proyección estereográfica desde el otro polo Q, es la inversion respecto de la circunferencia del ecuador.

Ejercicio 10.3.7 Demostrar que la inversion respecto de una circunferencia conserva ángulos y lleva circunferencias que no pasan por el centro en circunferencias y las que pasan por el centro en rectas.

10.3.4. Transformaciones en general.

A continuación caracterizamos los difeomorfismos

$$F = (u_1, \ldots, u_n) \colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n,$$

que conservan las funciones armónicas.

Lema 10.9 *Dado el difeomorfismo $F = (u_i)$, tal que su matriz Jacobiana $F_* = (u_{ix_j})$ sea múltiplo de una ortogonal λB, se tiene que (para $n \neq 2$)*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} = \frac{2-n}{2} \operatorname{grad} f^{-1} + f^{-1} \Delta.$$

Demostración. Sea $f(x) = \lambda^2(x)$ y consideremos en U por una parte su métrica euclídea $T = \sum_{i=1}^n dx_i \otimes dx_i$ y por otra la métrica euclídea de V traída por F, entonces como las columnas de $F_* = (u_{ix_j})$ son ortogonales y del mismo módulo λ

$$\begin{aligned} T' = \sum_{i=1}^{n} du_i \otimes du_i &= \sum_{i=1}^{n} (\sum u_{ix_j} dx_j) \otimes (\sum u_{ix_j} dx_j) \\ &= f(x) \sum_{i=1}^{n} dx_i \otimes dx_i, \end{aligned}$$

y por tanto en las coordenadas x_i los coeficientes de T' son $g_{ij}(x) = f(x)\delta_{ij}$ y por tanto $g = f^n$ y $g^{ij} = f^{-1}\delta_{ij}$. Ahora bien en (14.5), pág.1007, veremos que el operador de Laplace asociado a una métrica T' en las coordenadas x_i vale

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = f^{-n/2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f^{\frac{n-2}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= f^{-\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^{\frac{n-2}{2}}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + f^{-\frac{n}{2}} f^{\frac{n-2}{2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \\ &= \frac{2-n}{2} \operatorname{grad} f^{-1} + f^{-1} \Delta, \end{aligned}$$

Proposición 10.10 *La función inversión respecto de la esfera unidad, $F = (u_i) \colon \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $F(x) = x/\|x\|^2$, tiene matriz Jacobiana, $F_* = \lambda B$, múltiplo de una ortogonal, con $\lambda = 1/\|x\|^2$ y se tiene*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} = \rho^{2+n} \circ \Delta \circ \rho^{2-n}$$

Demostración. Como $u_i = x_i/\sum x_j^2$, se demuestra fácilmente que

$$\sum u_{ix_j}u_{kx_j} = 0, \qquad f = \sum u_{ix_j}^2 = \frac{1}{\rho^4},$$

y por el lema tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial u_i^2} &= \frac{2-n}{2}\operatorname{grad}\rho^4 + \rho^4\Delta\\ &= \frac{2-n}{2}4\rho^3\operatorname{grad}\rho + \rho^4\Delta\\ &= 2\rho^3\rho^{n-1}\operatorname{grad}\rho^{2-n} + \rho^4\Delta\\ &= \rho^{2+n}(\Delta\circ\rho^{2-n} - \rho^{2-n}\circ\Delta) + \rho^4\Delta\\ &= \rho^{2+n}\circ\Delta\circ\rho^{2-n},\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se sigue de que para cualquier función g

$$[\Delta, g] = \Delta\circ g - g\circ\Delta = \Delta g + 2\operatorname{grad} g,$$

y por tanto si g es armónica, $\Delta g = 0$, entonces

$$\Delta\circ g - g\circ\Delta = 2\operatorname{grad} g,$$

en particular para $g = \rho^{2-n}$

$$\Delta\circ\rho^{2-n} - \rho^{2-n}\circ\Delta = 2\operatorname{grad}\rho^{2-n}. \quad \blacksquare$$

En particular se siguen los resultados sobre inversiones que hemos visto para el plano y el espacio.

Teorema 10.11 *Los siguientes apartados son equivalentes:*

i.- *F conserva las funciones armónicas.*

ii.- *Las funciones u_i son armónicas y la matriz jacobiana de F en cada punto x, es múltiplo de una matriz $\mathbf{B}(x)$ ortogonal*

$$F_* = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right) = \lambda(x)\mathbf{B}(x).$$

iii.-
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \lambda^2(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial u_i^2}.$$

iv.- *Para $n = 2$, F es una transformación conforme ó una transformación conforme compuesta con una reflexión respecto del eje x. Para $n \neq 2$, F es una semejanza.*

Demostración. "(i)⇔(ii) ⇔(iii)". Es fácil demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} u_{jx_ix_i} \right) \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{j,k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} u_{jx_i} u_{kx_i} \right) \frac{\partial^2}{\partial u_k \partial u_j},$$

y el resultado se sigue fácilmente (hágalo el lector) considerando las funciones armónicas $x_i x_j$ y $x_i^2 - x_j^2$.

"(iv)⇒(i)". Para $n = 2$ por (10.7) y para $n \neq 2$ por (10.8).

"(ii)⇒(iv)". Para $n = 2$ la matriz

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

es múltiplo de una ortogonal, lo cual implica una de dos, o bien u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann, ó u y $-v$. En cualquier caso u y v son armónicas.

Para $n \neq 2$, se sigue del Lema (10.9) que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} = \frac{2-n}{2} \operatorname{grad} f^{-1} + f^{-1} \Delta = f^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

donde la segunda igualdad se sigue de (iii). Por tanto

$$\operatorname{grad} f^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = k^2 = cte,$$

lo cual implica (en los términos del Lema) que $T' = k^2 T$, y esto vamos a ver que implica que F localmente es una afinidad, lo cual a su vez implica que F es la restricción a U de una afinidad[2].

Para ello consideremos un punto $x \in U$. Con sendas traslaciones podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x = 0$ y que $F(x) = 0$. Ahora consideremos la homotecia $G(x) = k^{-1}x$, basta demostrar que la aplicación $H = G \circ F = (v_i)$ es lineal, para ello observemos que al ser $v_i = k^{-1} u_i$, H conserva la métrica ya que

$$\sum_{i=1}^{n} dv_i \otimes dv_i = k^{-2} \sum_{i=1}^{n} du_i \otimes du_i = \sum_{i=1}^{n} dx_i \otimes dx_i,$$

por tanto es una isometría y en los cursos de geometría se demuestra que H es una transformación ortogonal. ∎

[2]Dos afinidades que coinciden en un abierto coinciden en todo el espacio.

10.4. Potenciales gravitatorio y eléctrico.

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la métrica estándar (ver la lección 5.5.3, pág.294)

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz,$$

y sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto.

Definición. Llamamos *trabajo de un campo tangente* $F \in \mathcal{D}(U)$ a lo largo de una curva $\gamma \subset U$, que une dos puntos $a, b \in U$, a la integral a lo largo de la curva, de la 1–forma

$$\omega = i_F g \ , \qquad \omega E = F \cdot E,$$

es decir si parametrizamos la curva con el parámetro longitud de arco,

$$\sigma\colon [0, L] \to U \ , \quad \sigma[0, L] = C, \quad \sigma(0) = a \ , \ \sigma(L) = b,$$

y denotamos con $T = \sigma_*(\partial/\partial t)$, el vector tangente a la curva C —que es unitario—, a la integral

$$\int_C \omega = \int_0^L F_{\sigma(s)} \cdot T_{\sigma(s)} \, ds,$$

de la componente tangencial del campo F.

Definición. Llamaremos *fuerza conservativa* a todo campo $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ con la propiedad de que el trabajo realizado a lo largo de una curva que une dos puntos, no depende de la curva.

En el ejercicio 5.5.3, pág.295, hemos visto que toda fuerza conservativa es de la forma $F = -\operatorname{grad} u$, donde llamamos a u el *potencial* asociado a F, en cuyo caso el trabajo a lo largo de cualquier $\sigma\colon [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$, entre los puntos $\sigma(0) = x$ y $\sigma(t)$ vale

$$\int_0^t F \cdot T \, dt = -\int_0^t \operatorname{grad} u \cdot T \, dt = -\int_0^t du(T) \, dt = -\int_0^t T(u) \, dt$$
$$= -\int_0^t (u \circ \sigma)' dt = u(x) - u(\sigma(t)),$$

por lo tanto si u se anula hacia el infinito, el potencial también puede definirse, en cada punto $x \in \mathbb{R}^3$, como:

"*El trabajo que se realiza al desplazar una masa unitaria desde el punto x al infinito*".

10.4.1. Potencial Newtoniano.

En la mecánica gravitacional de NEWTON de una masa puntual M (localizada en el origen de coordenadas), la función

$$u(x_1, x_2, x_3) = -\frac{GM}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{GM}{r},$$

representa el potencial[3] debido a la masa M, sobre cada punto $x = (x_i)$ a distancia r de M, pues

$$F_x = -\frac{M}{r^2}\left(\sum \frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \operatorname{grad}\frac{M}{\sqrt{\sum x_i^2}} = -\operatorname{grad} u$$

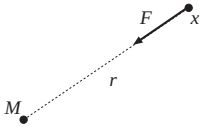


Figura 10.3. Fuerza gravitacional producida por una masa M

es la *fuerza de atracción gravitacional de* NEWTON *que la masa M produce en el punto x, por unidad de masa.*

Según hemos visto en el ejemplo 10.1.1, pág.755, fuera del origen se tiene que

$$\operatorname{div} F = -\operatorname{div}\operatorname{grad} u = -\Delta(u) = M\Delta(1/r) = 0,$$

por lo tanto "*fuera de la masa el potencial de Newton es una función armónica.*"

En general

$$u(x) = -\frac{m_1}{r_1} - \cdots - \frac{m_n}{r_n}, \qquad F_x = \sum m_i \frac{p_i - x}{r_i^3}$$

representa el potencial en el punto x debido a n masas m_i, en puntos p_i a distancia $r_i = \|p_i - x\|$ de x y la fuerza de atracción respectivamente;

[3] Para G la constante universal que a partir de ahora tomamos por comodidad como 1.

y se tiene que

$$\Delta u = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \backslash \{p_1, \ldots, p_n\},$$
$$\lim_{x \to p_i} u(x) = -\infty, \qquad \lim_{\|x\| \to \infty} u(x) = 0.$$

10.4.2. Potencial electrostático.

La *Ley de Coulomb* dice que dadas dos cargas q y q', en puntos p y p' se atraen (si son de distinto signo) ó repelen (si son del mismo signo), con una fuerza directamente proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. La fuerza con la que q actúa sobre q' es (tomando la constante de Coulomb como 1, lo cual significa elegir ciertas unidades)

$$F = \frac{qq'}{\|p - p'\|^2} \frac{p' - p}{\|p - p'\|}.$$

y sobre la unidad $q' = 1$, de carga positiva en p'

$$E = \frac{q}{|p - p'|^2} \frac{p' - p}{|p - p'|}.$$

Definición. A este campo E lo llamamos *campo electrostático* producido por esa carga puntual q sobre la unidad de carga positiva en x. Del mismo modo llamamos *potencial electrostático* producido por una carga q en el punto p a la función

$$u(x) = \frac{q}{r}, \qquad r(x) = \|p - x\|,$$

para la que se tiene $E = -\operatorname{grad} u$. Si consideramos un número finito de cargas fijas q_i, definimos el *campo electrostático* producido por esas cargas puntuales sobre la unidad de carga positiva en x como

$$E_x = \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{x - p_i}{r_i^3}, \tag{10.6}$$

es decir la suma de las fuerzas E_i producidas por las cargas q_i sobre la unidad de carga positiva en x y llamamos *potencial electrostático* producido por las cargas a

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i},$$

para el que también se tiene $E = -\operatorname{grad} u$.

Como antes fuera de las cargas el potencial es armónico, hacia ellas el potencial tiende a ∞ ó $-\infty$ según la carga sea positiva o negativa y hacia el infinito el potencial se anula. Recíprocamente se tiene el siguiente resultado que demostraremos en la página 825.

Teorema de Picard. *Si u es una función satisfaciendo las tres propiedades anteriores entonces es de la forma*

$$u(x) = \frac{q_1}{r_1} + \cdots + \frac{q_n}{r_n},$$

con las q_i positivas o negativas en función de que $\lim_{x\to p_i} u(x) = \infty$ ó $= -\infty$.

Nota 10.12 Debemos observar que el potencial de una masa m es $-m/r$, mientras que el de una carga q es q/r, esto se debe a que hemos mantenido el nombre del potencial de masas como el de la energía potencial. No hay problema en dar la misma definición para ambos, pero hay que tener en cuenta que la fuerza sobre la unidad de masa positiva (de una masa positiva) es atractiva mientras que la de una carga positiva sobre la unidad de carga positiva es repulsiva. Por tanto no definen el mismo vector. A partir de ahora supondremos que tenemos un problema electrostático y consideraremos cargas. Sin dificultad se puede reconstruir la teoría para masas en lugar de cargas.

Definición. Si en lugar de un número finito de cargas, lo que tenemos es una densidad de carga ρ en $\mathbb{R}^3$, con ciertas propiedades que analizaremos, entonces definimos el potencial y el campo electrostático como

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\,dy, \qquad E = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(y)\frac{x-y}{\|x-y\|^3}\,dy. \tag{10.7}$$

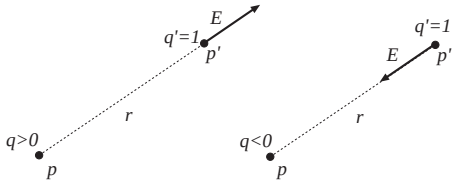


Figura 10.4. Fuerza electrostática producida por una carga q

Lema 10.13 *Si K es un cerrado y ρ es integrable en K, entonces*

$$w(x) = \int_K \frac{\rho}{\|x-y\|}\, dy$$

es de $\mathcal{C}^\infty(K^c)$ y podemos derivarla bajo el signo integral en el abierto K^c y en él w es armónica.

Demostración. Podemos derivar bajo el signo integral (ver Apuntes de Teoría de la Medida), porque las derivadas están uniformemente acotadas en un entorno de $x \in K^c$, $U_x = B(x, r/2) \subset B(x,r) \subset K^c$ por funciones integrables, pues para $x' \in U_x$, $r/2 \le d(x', K) \le \|x' - y\|$, para todo $y \in K$, por tanto $1/\|x' - y\| \le 2/r$.

$$\begin{aligned}
w_{x_i}(x) &= -\int_K \rho \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^3} dy \\
w_{x_1x_1} &= -\int_K \rho \frac{\|x-y\|^2 - 3(x_1-y_1)^2}{\|x-y\|^5} dy, \\
w_{x_2x_2} &= -\int_K \rho \frac{\|x-y\|^2 - 3(x_2-y_2)^2}{\|x-y\|^5} dy, \\
w_{x_3x_3} &= -\int_K \rho \frac{\|x-y\|^2 - 3(x_3-y_3)^2}{\|x-y\|^5} dy,
\end{aligned}$$

y se tiene $\sum w_{x_ix_i} = 0$ en K^c. ∎

Corolario 10.14 *Si $\rho \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^3)$, es decir es integrable, el potencial electrostático de densidad de carga ρ, $u \in \mathcal{C}^\infty(K^c)$, para $K = \operatorname{sop}\rho$; y en el abierto K^c*

$$u_{x_i}(x) = -\int_K \rho \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^3} dy, \qquad \Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = 0,$$

por lo tanto en este abierto K^c, $E = -\operatorname{grad} u$ y u es armónica. (Idem para el potencial Newtoniano).

Completaremos estos resultados en el epígrafe 10.4.3, de la pág.783.

Ejercicio 10.4.1 Dada una esfera de radio r centrada en O y una carga q en un punto p, demostrar que existe un único punto p' de la recta que une O y p (que es la imagen de p por la inversión respecto de la esfera) y en él una única carga q', tal que el potencial debido a las dos cargas es nulo en los puntos de la esfera.

Flujo de un campo electrostático a través de una superficie.

Consideremos una carga puntual q en un punto que podemos considerar como el origen y sea N el campo unitario normal exterior a las esferas centradas en la carga. Por tanto el campo electrostático definido por la carga en cada punto x es

$$E_x = \frac{q}{\|x\|^2} N,$$

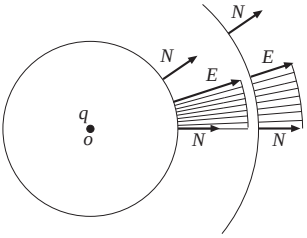


Figura 10.5. Flujo a través de una esfera.

y el flujo (ver pág.995) a través de la esfera de centro q y radio r no depende del radio, pues es

$$\int_{S_r} E \cdot \partial_n \, ds = \frac{q}{r^2} \text{Area}(S_r) = 4\pi q,$$

ya que $\partial_n = N = H/\mid H \mid$ en S_r.

Calculemos ahora el flujo a través de una superficie $S = \partial C$, que no contenga la carga (es decir $0 \notin S$) y sea borde de una variedad con borde C, para ello observemos que fuera del origen, $\operatorname{div} E = 0$; y tenemos dos casos:

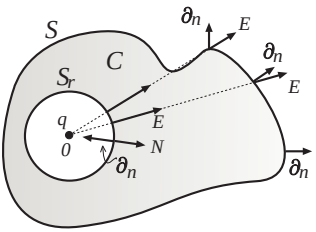


Figura 10.6. Flujo a través de una superficie.

i) $0 \in C$ y como no está en la frontera está en el interior y por tanto hay una bola $B = B[0,r] \subset C^\circ$ y el flujo a través del borde $\partial D = S \cup S_r$ de $D = C \backslash B$, es por el teorema de la divergencia (14.20) (ver pág.996) y ser $N = -\partial_n$ en S_r,

$$0 = \int_D \operatorname{div} E \, dx = \int_{\partial D} \partial_n \cdot E \, ds = \int_S \partial_n \cdot E \, ds - \int_{S_r} N \cdot E \, ds \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int_S \partial_n \cdot E \, ds = 4\pi q.$$

ii) $0 \notin C$ y el flujo es cero por el mismo teorema aplicado a C.

Si ahora tenemos un número finito de cargas puntuales $q_1, \ldots, q_n$ en puntos $p_1, \ldots, p_n$, el campo electrostático $E \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \backslash \{p_1, \ldots, p_n\})$ viene

dado por (10.6), siendo su divergencia $\operatorname{div} E = \sum \operatorname{div} E_i = 0$. Veamos cuanto vale su flujo a través de $S = \partial C$, para una variedad con borde C, para la que los $p_i \notin \partial C$, denotando $q(C)$ la carga de C

$$\int_S \partial_n \cdot E \; ds = \sum \int_S \partial_n \cdot E_i \; ds = 4\pi \sum_{i:p_i \in C} q_i = 4\pi \cdot q(C).$$

En el caso de una distribución continua de cargas ρ de soporte compacto, también se tiene el resultado: El flujo a través de S satisface la **Fórmula integral de Gauss**

$$\int_S \partial_n \cdot E \; ds = 4\pi \int_C \rho(x) \; dx, \tag{10.8}$$

la cual equivale —de nuevo por el teorema de la divergencia (14.20) (ver pág.996)—, a

$$\int_C \operatorname{div} E \; dx = 4\pi \int_C \rho(x) \; dx,$$

lo cual equivale a su variante infinitesimal, que es la **ecuación de Gauss**

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho,$$

que se obtiene[4] por continuidad considerando un punto x_0 y un entorno C pequeño en el que $\rho \sim \rho(x_0)$ y aplicando la fórmula integral

$$\operatorname{div} E(x_0) \operatorname{vol}(C) \sim \int_C \operatorname{div} E \; dx = 4\pi \int_C \rho(x) \; dx \sim 4\pi\rho(x_0) \operatorname{vol}(C).$$

La Ecuación de Gauss a su vez equivale, dado que $E = -\operatorname{grad} u$ (como veremos en (10.20), pág.785), a la **Ecuación de Poisson** que demostraremos en (10.21), pág.787,

$$\Delta u = -4\pi\rho.$$

Cálculo de un campo electrostático simétrico.

Utilicemos la Fórmula integral de Gauss (10.8), para hacer el cálculo del campo electrostático definido por una distribución de cargas que sea

[4] En Teoria de la medida se demuestra que si f y g son funciones medibles con integral tales que $\int_A f = \int_A g$ para todo Boreliano A (en $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue basta que se de para los rectángulos $A = \prod[a_i, b_i]$, productos de intervalos), entonces $f = g$ casi seguro (y si son continuas $f = g$).

función de la distancia al origen, $\rho(x) = \rho(\|x\|)$, es decir simétrica respecto de giros con centro en el origen. Además supondremos que ρ tiene soporte compacto dentro de una bola $B[0, R]$. En tal caso el campo electrostático E hereda esta simetría (recordemos que la medida e integral e Lebesgue son invariante por traslaciones) y es proporcional al campo unitario normal exterior a las esferas centradas en el origen

$$\partial_n = \sum \frac{x_i}{\|x\|} \partial x_i,$$

y la proporción es constante en cada esfera $S_r = \{x : \|x\| = r\}$, por tanto existe $\lambda(x) = \lambda(\|x\|) > 0$, tal que $E = \lambda \partial_n$. Veamos cuanto vale λ, para ello tenemos por la Fórmula integral de Gauss

$$\begin{aligned} \lambda(r) 4\pi r^2 &= \int_{S_r} \partial_n \cdot \lambda \partial_n \, ds = \int_{S_r} \partial_n \cdot E \, ds \\ &= \text{Flujo de } E \text{ a través de } S_r = 4\pi \int_{B_r} \rho(x) \, dx \\ &= 4\pi \cdot q(B_r) \quad \Rightarrow \quad \lambda(r) = \frac{q(B_r)}{r^2}, \end{aligned}$$

por lo tanto si $x \notin B[0, R]$, $E_x = (q/r^2)\partial_n$, para $q = \int \rho(x) \, dx$, la carga total de la distribución; y el vector E_x es el mismo que produce una carga puntual q en el origen, y para los puntos $x \in B[0, R]$ el campo es el mismo que el producido por una carga puntual en el origen con carga la de la bola de radio $r = \|x\|$, $q = \int_{B_r} \rho(x) \, dx$.

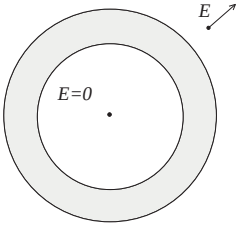


Figura 10.7.

En particular se tiene que el campo electrostático producido por una distribución de cargas $\rho = \rho(\|x\|)$ que sea nula en una bola $B[0, r]$ —por ejemplo si las cargas están entre dos esferas concéntricas—, es nulo en el interior de la bola de radio r. Lo mismo es cierto en términos gravitacionales ($\rho \geq 0$), si a una esfera rellena, con densidad de masa función de la distancia a su centro, le quitamos de su interior otra esfera rellena concéntrica, entonces en el interior no hay gravedad.

Potencial superficial simple.

El potencial de una carga de volumen, con densidad ρ viene dado por

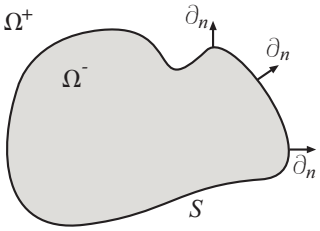
$$u(x) = \int \frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\, dy,$$

la cual satisface la Ecuación de Poisson $\Delta u = -4\pi\rho$.

Definición. Consideremos ahora una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ compacta y una densidad de carga $\rho \in \mathcal{C}(S)$. Llamamos *potencial superficial simple* de densidad de carga ρ en S a

$$u(x) = \int_S \frac{\rho(s)}{\|x-s\|}\, ds.$$

Se puede demostrar que $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$, $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \backslash S)$ y u es armónica en $\mathbb{R}^3 \backslash S$, $\Delta u = 0$.

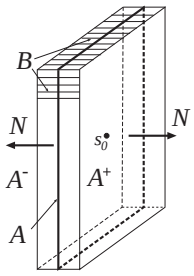


Supongamos que $\rho \in \mathcal{C}^1$ y que S es conexa borde de dos abiertos, uno acotado Ω^- (interior) y otro no acotado Ω^+ (exterior). Se tiene que las restricciones de u a Ω_- y Ω_+ se pueden extender respectivamente a dos funciones $u^-, u^+ \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ y que para ellas se tiene un resultado análogo a la Ecuación de Poisson en los puntos de S

$$\partial_n u^+ - \partial_n u^- = -4\pi\rho,$$

para ∂_n el vector unitario normal exterior a S.

Suponiendo que se verifica la fórmula integral de Gauss veamos una "justificación" poco precisa de esta fórmula:



Tomemos un $s_0 \in S$ y consideremos un entorno muy pequeño de él en el que S es casi plana con forma de cuadrado A de área A. Tomemos en un plano paralelo exterior al tangente en s_0 un cuadrado A^+, igual que el de la superficie y otro interiormente A^- a distancia pequeña y consideremos el paralelepípedo definido por A^+ y A^-. Llamemos B a las cuatro caras laterales de area mucho menor que A y sea N el vector unitario exterior normal

al paralelepípedo. Entonces aplicando la fórmula integral de Gauss al paralelepípedo y llamando q_P a la carga del mismo tendremos que

$$\begin{aligned}
4\pi\rho(s_0)A &\approx 4\pi \int_A \rho(s)\ ds = 4\pi q_P \\
&= \text{Flujo de } E \text{ a través del paralelepipedo} \\
&= \int_{A^+\cup B\cup A^-} N\cdot E\ ds \\
&= \int_{A^+} N\cdot E\ ds + \int_{A^-} N\cdot E\ ds + \int_B N\cdot E\ ds \\
&\approx -\int_{A^+} N\cdot \operatorname{grad} u\ ds - \int_{A^-} N\cdot \operatorname{grad} u\ ds \\
&= -\int_{A^+} N\cdot \operatorname{grad} u^+\ ds - \int_{A^-} N\cdot \operatorname{grad} u^-\ ds \\
&= -\int_{A^+} \partial_n u^+\ ds + \int_{A^-} \partial_n u^-\ ds \\
&\approx (-\partial_n u^+(s_0) + \partial_n u^-(s_0))A.
\end{aligned}$$

Conductores.

Consideremos un objeto tridimensional de un material conductor (metálico) Ω, con superficie $S = \partial\Omega$, y supongamos que está en presencia de un campo eléctrico E inducido por una distribución de cargas fijas en su exterior.

¿Qué efecto produce el campo eléctrico en Ω?

Un físico diría que lo que se observa es que los electrones de última capa de los átomos del objeto, que están unidos débilmente a su núcleo, se mueven en presencia del campo hasta un instante de tiempo en el que dejan de moverse, lo cual implica que las cargas se concentran en el borde del que no pueden salir y esta distribución de cargas en S, produce un campo eléctrico E' tal que el campo eléctrico resultante $E + E'$ es nulo en el interior de Ω, pues en caso contrario los electrones seguirían moviéndose, mientras que en los puntos de S es perpendicular y exterior a S, por lo mismo.

Potencial superficial de doble capa.

Consideremos ahora dos cargas puntuales iguales pero de tipo contrario: $-q$ en el origen y q en v y calculemos el potencial que inducen

en un punto x, lejano en comparación con la distancia $\|v\|$ entre ellas, de modo que $\|v\|^2/\|x\|^2 \sim 0$; en tal caso[5] (llamando $t = \|v\|/\|x\|$ y $x \cdot v = \|x\|\|v\| \cos\alpha$ y $p = qv$)

$$u(x) = \frac{q}{\|x-v\|} - \frac{q}{\|x\|} = \frac{q}{\|x\|}\left(\frac{\|x\|}{\sqrt{\|x\|^2+\|v\|^2-2\|x\|\|v\|\cos\alpha}} - 1\right)$$
$$= \frac{q}{\|x\|}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\cos\alpha}} - 1\right) \sim \frac{q}{\|x\|^3} v \cdot x = \frac{p\cdot x}{\|x\|^3}.$$

Esto justifica la siguiente definición.

Definición. Llamaremos *función potencial de un dipolo eléctrico de momento* p a

$$u(x) = \frac{p\cdot x}{\|x\|^3}.$$

Esta función definida en el espacio fuera del origen, es armónica y cuando $\|x\| \to \infty$ converge a 0 como $1/\|x\|^2$, además considerando el campo tangente $D = \sum p_i \partial_i$, para $p = (p_i)$, como $\operatorname{grad} 1/r = -H/r^3$, para H el campo de las homotecias y $r(x) = |x|$, tendremos que

$$u(x) = \frac{D\cdot H}{r^3} = -D \cdot \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -D\left(\frac{1}{r}\right).$$

Nota 10.15 Un cálculo similar al anterior prueba que para $x, y \in \mathbb{R}^3$, con x lejano de modo que $t^2 \cong 0$, para $t = \|y\|/\|x\|$ se tiene que

$$\frac{1}{\|x-y\|} \cong \frac{1}{\|x\|} + \frac{x\cdot y}{\|x\|^3},$$

de esto se sigue que lejos de una región Ω que contiene una carga de densidad ρ ($\operatorname{sop}\rho \subset \Omega$) con carga total nula, $0 = \int \rho = \int \rho^+ - \int \rho^- = q^+ - q^-$, el potencial eléctrico es aproximadamente el de un dipolo, pues

$$u(x) = \int \frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\, dy \cong \int \frac{\rho(y)}{\|x\|}\, dy + \frac{x}{|x|^3}\cdot \int \rho(y) y dy = \frac{x\cdot p}{\|x\|^3},$$

[5] Pues modulo t^2 se tiene

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2ta}} \sim 1 + tf'(0) = 1 + ta.$$

para $p = \int \rho(y)y\,dy = \int \rho^+(y)y\,dy - \int \rho^-(y)y\,dy = q^+c^+ - q^-c^- = q^+v$, siendo

$$q^\pm = \int \rho^\pm\,dy, \quad c^\pm = \frac{1}{q^\pm}\int \rho^\pm(y)y\,dy,$$

es decir $c^\pm$ son los centros de masas de la carga positiva y negativa y $v = c^+ - c^-$ el vector que los une (observemos que por comodidad hemos tomado $q^\pm \geq 0$ y que la carga total negativa es $-q^-$).

Si ahora tenemos una colección de dipolos sobre una superficie S borde de una variedad con borde compacta, con momentos en la dirección de la normal unitaria exterior ∂_n, es natural dar la siguiente generalización del potencial.

Definición. Llamamos *potencial eléctrico* de una *distribución de doble capa* de momento $\rho\partial_n$ sobre S a

$$u(x) = -\int_S \rho(s)\partial_n\left(\frac{1}{|x-s|}\right)\,ds,$$

donde para cada s estamos derivando una función de x, con el s fijo, con un campo de coeficientes constantes que son los de $\rho(s)\partial_{ns}$

10.4.3. Ecuación de Poisson.

A continuación completaremos el estudio iniciado en 10.14, pág.776, viendo que si la densidad de carga ρ es integrable y acotada, el potencial u satisface la **Ecuación de Poisson**: $\Delta u = -4\pi\rho$ en los puntos en los que localmente ρ sea de clase 1.

Pero antes veamos unos resultados previos. (Los primeros unas cuestiones básicas de Teoría de la medida, consecuencia del Teorema de la convergencia dominada, que se pueden consultar en la pág.94 de los **Apuntes de Teoría de la medida**, http://matematicas.unex.es/~ricarfr/Tmedida/librotmed.pdf

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y

$$f\colon A \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que para cada $x \in A$ sea medible la función

$$f^x\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f^x(y) = f(x,y) = f^y(x).$$

Teorema 10.16 *(a) Si existe $h\colon \Omega \to \mathbb{R}$ integrable tal que para todo $x \in A$, $|f(x,y)| \leq h(y)$, y para cada $y \in \Omega$ la función $x \in A \to f(x,y) \in \mathbb{R}$ es continua, entonces la función $F(x) = \int f(x,y)\, d\mu$ es continua en A.*

(b) Si para $y \in \Omega$, las funciones $f^y \in \mathcal{C}^k(A)$ y para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, con $|\alpha| \leq k$ existe h_α integrable tal que para todo $x \in A$ y todo $y \in \Omega$, $|D^\alpha f(x,y)| \leq h_\alpha(y)$, entonces $F(x) = \int f(x,y)\, d\mu$ es de clase k y las derivadas parciales entran en la integral.

Lema 10.17 *Para $r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ y $B[0,L] = \{x : \|x\| \leq L\}$, se tiene que*

$$\int_{B[0,L]} \frac{1}{r^n} dx_1 dx_2 dx_3 = \begin{cases} 2\pi L^2, & si\ n = 1, \\ 4\pi L, & si\ n = 2, \\ \infty, & si\ n \geq 3. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el cambio de variable definido por las coordenadas esféricas

$$x_1 = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \quad x_2 = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad x_3 = r\cos\theta,$$

para las que el Jacobiano es $r^2 \operatorname{sen}\theta$, por tanto

$$\int_{B[0,L]} \frac{1}{r^n}\, dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{L} r^{2-n} \operatorname{sen}\theta\, dr d\theta d\varphi = 4\pi \int_0^L r^{2-n} dr. \quad \blacksquare$$

Nota 10.18 Observemos que si ρ es integrable y acotada en los compactos y $f(x,y)$ es cualquiera de las funciones

$$\frac{1}{\|x-y\|}, \quad \frac{1}{\|x-y\|^2}, \quad \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^3},$$

se tienen las siguientes propiedades:

1.- Para cada y fijo, $f(x,y)$ es continua en los $x \neq y$.

2.- Para todo x_0 y todo $r > 0$, existe una constante $c(r)$, tal que si $x \in B[x_0, r/2]$ e $y \in B[x_0, r]^c$, entonces $|f(x,y)| \leq c(r)$.

3.- Para todo x_0 y todo $\epsilon > 0$ existe un $r > 0$ tal que para todo $x \in B[x_0, r]$

$$\left| \int_{B[x_0,r]} f(x,y)\rho(y)\, dy \right| \leq \epsilon,$$

siendo esta última, consecuencia del Lema (10.17), pues para $n = 1, 2$, y $|\rho| \leq k$ en $B[x_0, 3r]$

$$|\int_{B[x_0,r]} f(x,y)\rho(y)\,dy| \leq \int_{B[x,2r]} \frac{|\rho(y)|}{\|x-y\|^n}\,dy \leq \begin{cases} 8k\pi r^2, & \text{si } n=1, \\ 8k\pi r, & \text{si } n=2. \end{cases}$$

y para este tipo de funciones se tiene el siguiente resultado.

Proposición 10.19 *Si ρ es integrable y acotada en los compactos y f es una función que satisface las 3 propiedades anteriores, entonces la función*

$$u(x) = \int f(x,y)\rho(y)\,dy.$$

es continua (el mismo resultado es cierto si en lugar de una integral de volumen, tenemos una de superficie o una de linea.)

Demostración. Veamos que es continua en $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Sea $\epsilon > 0$, entonces por (3) existe un $r > 0$ tal que si $x \in B[x_0, r]$, $| v(x) | \leq \epsilon/3$, para

$$v(x) = \int_{B[x_0,r]} f(x,y)\rho(y)\,dy.$$

Ahora bien, por (10.16), la función

$$w(x) = \int_{B[x_0,r]^c} f(x,y)\rho(y)\,dy,$$

es continua en $B(x_0, r/2)$, pues el integrado es continuo por (1), y por (2) está uniformemente acotado por $c(r)|\rho(y)|$, que es integrable. Por tanto existe $0 < \delta < r/2$ tal que si $\|x - x_0\| \leq \delta$, entonces $|w(x) - w(x_0)| \leq \epsilon/3$, y como $u = v + w$,

$$| u(x) - u(x_0) | \leq | v(x) | + | v(x_0) | + | w(x) - w(x_0) | \leq \epsilon. \quad \blacksquare$$

Proposición 10.20 *Si ρ es integrable y acotada en los compactos, la función potencial*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\,dy,$$

es de clase 1 y sus derivadas entran en la integral de modo que $E = -\operatorname{grad} u$.

Demostración. Por el resultado anterior sabemos que u y las componentes del campo electrostático E,

$$e_i(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(y) \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^3}\, dy = -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\right)_{x_i} dy.$$

son continuas, por lo tanto basta ver que existen las parciales de u y $u_{x_i} = -e_i$ (lo veremos para x_1, para las otras es análogo).

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $r > 0$ y consideremos las funciones $u = v + w$, $-e_i = f_i + g_i$, para

$$v(x) = \int_{B(x_0,r)} \frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\, dy, \quad w(x) = \int_{B(x_0,r)^c} \frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\, dy,$$
$$f_i(x) = \int_{B(x_0,r)} \left(\frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\right)_{x_i} dy, \quad g_i(x) = \int_{B(x_0,r)^c} \left(\frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\right)_{x_i} dy.$$

Por el Lema (10.13), pág.776, w se puede derivar bajo el signo integral en $B(x_0,r)$ (además es de clase ∞ y armónica en ese abierto), por tanto $w_{x_i} = g_i$. Ahora si $x_0 = (x_1,x_2,x_3)$, $x_t = (x_1+t,x_2,x_3) \in B(x_0,r)$ y llamamos $\|y-x_0\| = R$ y $\|y-x_t\| = R_t$, entonces $|R - R_t| \le |t|$ (pues son los lados de un triángulo) y como $2ab \le a^2+b^2$ tenemos

$$|f_1(x_0)| \le \int_{B[x_0,r]} \frac{|\rho|}{R^2}\, dy \le k\, 4\pi r \qquad (\text{para } \; k = \int_{B[x_0,r]} |\rho|\, dy)$$
$$\left|\frac{v(x_t)-v(x_0)}{t}\right| \le \frac{k}{|t|} \int_{B[x_0,r]} \frac{|R-R_t|}{RR_t}\, dy \le k \int_{B[x_0,r]} \frac{1}{RR_t}\, dy$$
$$\le \frac{k}{2} \int_{B[x_0,r]} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_t^2}\right) dy$$
$$\le \frac{k}{2} \left(4\pi r + \int_{B[x_t,2r]} \frac{1}{R_t^2}\, dy\right) \le k(2\pi r + 4\pi r)$$

y dado $\epsilon > 0$, podemos hacerlos menores que $\epsilon/3$ tomando r pequeño, por otra parte tomando t pequeño tendremos que

$$\left|\frac{w(x_t)-w(x_0)}{t} - g_1(x_0)\right| \le \epsilon/3,$$

por tanto $u_{x_1}(x_0) = -e_1(x_0)$ pues

$$\left|\frac{u(x_t)-u(x_0)}{t}+e_1(x_0)\right| \le \left|\frac{v(x_t)-v(x_0)}{t}-f_1(x_0)\right| + \\ + \left|\frac{w(x_t)-w(x_0)}{t}-g_1(x_0)\right| \le \epsilon \quad \blacksquare$$

Ecuación de Poisson 10.21 *Si ρ es integrable, acotada en los compactos y en un entorno es de clase 1, entonces en ese entorno u es de clase 2 y en él se tiene*

$$\Delta u = -4\pi\rho.$$

Demostración. Tomemos $B(x_0, r')$ un entorno en el que ρ sea de clase 1 y sea $r < r'$. Si $u = v + w$ como en el resultado anterior,

$$v(x) = \int_{B(x_0,r)} \frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\,dy, \quad w(x) = \int_{B(x_0,r)^c} \frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\,dy,$$

entonces como hemos visto en 10.13, pág.776, $w \in \mathcal{C}^\infty$ y armónica en el abierto $B(x_0, r)$, es decir $\Delta w = 0$ y por el resultado anterior $u_{x_i} = v_{x_i} + w_{x_i}$, por otra parte

$$\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)_{x_i} = -\frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^3} = -\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)_{y_i}, \tag{10.9}$$

y para $D = \partial_{y_i}$ y $\omega = dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3$, $D^L\omega = 0$ y para toda función f, $d(f\omega) = 0$ y por el Teorema de Stokes, (14.12), pág.988 tenemos que

$$\int_B (Df)\omega = \int_B D^L(f\omega) = \int_B d(i_D f\omega) = \int_S f i_D\omega = \int_S fD\cdot\partial_n\,ds$$

por lo tanto, para $\partial_n = \sum[(y_i - x_{0i})/\|y - x_0\|]\partial_{y_i}$, el vector unitario normal exterior a las esferas S centradas en x_0

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= \int_{B[x_0,r]} \rho\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)_{x_i} dy = -\int_{B[x_0,r]} \rho\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)_{y_i} dy \\ &= -\int_{B[x_0,r]} \left(\frac{\rho}{\|x-y\|}\right)_{y_i} dy + \int_{B[x_0,r]} \frac{\rho_{y_i}}{\|x-y\|}\,dy \\ &= -\int_{S[x_0,r]} \frac{\rho}{\|x-y\|}\partial_n\cdot\partial_{y_i}\,ds + \int_{B[x_0,r]} \frac{\rho_{y_i}}{\|x-y\|}\,dy. \end{aligned}$$

Ahora la primera integral, en esta última igualdad, es de clase ∞, por (10.16), pues el integrando lo es, ya que el denominador, $\|x-y\|>0$, si $x\in B(x_0,r)$ e $y\in S[x_0,r]$; y por (10.20) el segundo sumando es de clase 1 en un entorno de x_0, pues ρ_{y_i} es continua y por tanto acotada en los compactos. Además en ambas la derivada entra en la integral y derivando de nuevo tenemos que

$$\begin{aligned} v_{x_ix_j} &= -\int_{S[x_0,r]} \rho \left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)_{x_j} \partial_n\cdot\partial_{y_i}\,ds + \int_{B[x_0,r]} \rho_{y_i}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)_{x_j} dy \\ &= \int_{S[x_0,r]} \frac{\rho(y)\,(x_j-y_j)\partial_n\cdot\partial_{y_i}}{\|x-y\|^3}\,ds + \int_{B[x_0,r]} \frac{\rho_{y_i}(y)\,(y_j-x_j)}{\|x-y\|^3}\,dy \end{aligned}$$

siendo estas funciones continuas, por tanto v es de clase 2 en $B(x_0,r)$ y también u.

Para ver la ecuación, tomamos $j=i$ y sumamos en x_0

$$\Delta v(x_0) = -\int_{S[x_0,r]} \rho \sum \frac{y_i-x_{0i}}{\|x_0-y\|^3}\partial_n\cdot\partial_{y_i}\,ds + \int_{B[x_0,r]} \sum \frac{\rho_{y_i}(y_i-x_{0i})}{\|x_0-y\|^3}\,dy,$$

siendo el primer término de la suma anterior (cambiado de signo)

$$\int_{S[x_0,r]} \rho\frac{\partial_n\cdot\partial_n}{\|y-x_0\|^2}\,ds = \frac{1}{r^2}\int_{S[x_0,r]} \rho\,ds \;\to\; 4\pi\rho(x_0), \quad (r\to 0)$$

y el segundo, si en $B[x_0,r]$, $|\rho_{y_i}|\le k$, en módulo está acotado por

$$k\int_{B[x_0,r]} \frac{1}{\|y-x_0\|^2}\,dy = 4\pi kr \to 0,$$

cuando $r\to 0$. Por lo tanto en x_0 se tiene $\Delta u = -4\pi\rho$. ∎

Corolario 10.22 *Si $\rho\in\mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^3)$, $u\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ y en todo punto $\Delta u=-4\pi\rho$.*

Corolario 10.23 *Si $\rho\in\mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^3)$, $u\in\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^3)$ y*

$$u_{x_i} = \int \frac{\rho_{y_i}}{\|x-y\|}\,dy, \quad \Delta u = -4\pi\rho.$$

Demostración. Por (10.20), basta demostrar la primera igualdad, pues en ese caso u_{x_i} es el potencial de ρ_{y_i} y se repite el argumento. Como

ρ es de soporte compacto, existe $r > 0$, tal que $K \subset B(0,r)$ y siguiendo el razonamiento de (10.21)

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{B[0,r]} \frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\, dy, \\ u_{x_i}(x) &= -\int_{S[0,r]} \frac{\rho}{\|x-y\|} \partial_n \cdot \partial_{y_i}\, ds + \int_{B[0,r]} \frac{\rho_{y_i}}{\|x-y\|}\, dy \\ &= \int_{B[0,r]} \frac{\rho_{y_i}}{\|x-y\|}\, dy = \int \frac{\rho_{y_i}}{\|x-y\|}\, dy \end{aligned}$$

pues $\rho = 0$ en $S[0,r] \subset K^c$ y $\rho_{y_i} = 0$ en $B[0,r]^c$. ∎

Corolario 10.24 *Si $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ y es integrable, $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ y $\Delta u = -4\pi\rho$.*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y veamos que u es de clase infinito en un entorno de ese punto. Consideremos los abiertos $U_1 = B(x_0, 2r)$ y $U_2 = B[x_0, r]^c$ y una partición de la unidad $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, subordinada a ellos, por tanto con $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ y $\operatorname{sop} \varphi_i \subset U_i$, y consideremos $\rho_i = \varphi_i \rho$. Entonces para u_i el potencial de ρ_i, tendremos que $u = u_1 + u_2$ y como ρ_1 es de soporte compacto, $u_1 \in \mathcal{C}^\infty$, por el resultado anterior, y $u_2 \in \mathcal{C}^\infty$ en $B(x_0, r)$, por (10.13), por tanto u es de clase infinito en un entorno de x_0. ∎

Teorema 10.25 *Si ρ es integrable, acotada en los compactos y se anula en el infinito, el potencial u se anula en el infinito.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y veamos que existe una bola $B[0,R]$ fuera de la cual $u \le \epsilon$. Como ρ es integrable $\int_{B[0,n]} |\rho(y)|\, dy \uparrow \int |\rho(y)|\, dy = q < \infty$, y como además se anula en el infinito, podemos tomar n suficientemente grande como para que

$$\int_{B[0,n]^c} |\rho(y)|\, dy < \epsilon/3, \quad |\rho(y)| < \epsilon/6\pi, \quad y \in B[0,n]^c.$$

Ahora tomemos el radio $R = 1 + n + 3q/\epsilon$, un punto cualquiera $x_0 \in B[0,R]^c$, y la partición del espacio $B_1 = B[0,n]$, $B_2 = B[x_0, 1]$ y $B_3 = (B_1 \cup B_2)^c$, entonces

$$u(x_0) = \sum \int_{B_i} \frac{\rho(y)}{\|x_0 - y\|}, \quad |u(x_0)| \le \sum \int_{B_i} \frac{|\rho(y)|}{\|x_0 - y\|}.$$

Ahora bien si $y \in B_1$, $\|x_0 - y\| \geq \|x_0\| - \|y\| \geq R - n > 3q/\epsilon$, por tanto

$$\int_{B_1} \frac{|\rho(y)|}{\|x_0 - y\|} \leq \epsilon/3.$$

por (10.17),

$$\int_{B_2} \frac{|\rho(y)|}{\|x_0 - y\|} \leq \epsilon/3,$$

y si $y \in B_3 \subset B[0,n]^c$, $\|x_0 - y\| \geq 1$,

$$\int_{B_3} \frac{|\rho(y)|}{\|x_0 - y\|} \leq \int_{B[0,n]^c} |\rho(y)| \leq \epsilon/3. \quad \blacksquare$$

En (10.32), pág.796 veremos que estas dos propiedades del potencial Newtoniano–Electrostático, lo determinan totalmente, en el sentido de que es la única función que satisface la ecuación de Poisson y se anula en el infinito.

Por el resultado anterior, si la densidad ρ es acotada y de soporte compacto K (por tanto integrable), el potencial

$$u(x) = \int \frac{\rho(y)}{\|x - y\|}\, dy,$$

tiene la propiedad de converger a cero cuando el punto x tiende hacia el ∞, pero es más si denotamos con $q = \int_K \rho\, dy$ la carga total, se tiene que para $\|x\|$ grande, $u(x) \sim q/\|x\|$, es decir que en el infinito el potencial de una densidad de soporte compacto, es como si fuera el de una partícula con esa carga. Con más precisión se tiene el siguiente resultado.

Teorema 10.26 *Se verifica que*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|x\| \cdot u(x) = q.$$

Demostración. Como $u = u^+ - u^-$ y $\rho = \rho^+ - \rho^-$, siendo $u^\pm$ el potencial de $\rho^\pm$, basta demostrarlo para $\rho \geq 0$. Sea $q = \int_K \rho\ dy$ y consideremos un $L > 0$ tal que $K \subset B[0,L]$, en cuyo caso para cada $y \in K$ y $\|x\| > L$, se tiene $0 < \|x\| - L \leq \|x - y\| \leq \|x\| + L$, por lo tanto

$$\frac{\|x\|}{\|x\| + L} \leq \frac{\|x\|}{\|x - y\|} \leq \frac{\|x\|}{\|x\| - L},$$

de donde se sigue multiplicando por ρ e integrando que

$$\left(\frac{\|x\|}{\|x\|+L}\right) q \leq \|x\| \cdot u(x) \leq \left(\frac{\|x\|}{\|x\|-L}\right) q$$

y el resultado se sigue. ∎

Densidad dependiente del tiempo

Definición. Por último supongamos que $\rho = \rho(t, y)$, depende del tiempo $t \in \mathbb{R}$, además de $y \in \mathbb{R}^3$. Diremos que es *localmente uniformemente de soporte compacto*, si dado cualquier intervalo temporal cerrado $[a, b]$ existe un compacto K tal que para todo $t \in [a, b]$

$$\operatorname{sop} \rho^t = \overline{\{y \in \mathbb{R}^3 : \rho(t, y) \neq 0\}} \subset K.$$

Teorema 10.27 *Si $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$ y es localmente uniformemente de soporte compacto, entonces el potencial*

$$u(t, x) = \int \frac{\rho(t, y)}{\|x - y\|}\, dy,$$

es de clase ∞, para cada instante t, $\rho^t(x) = \rho(t, x)$ se anula en el infinito y $\Delta u = -4\pi\rho$.

Demostración. Falta ver que es de clase infinito, el resto de propiedades se siguen de (10.23) y (10.25).

Veamos en primer lugar que si ρ es de clase 1, su potencial u es continuo. Dado (t, x) en un entorno de (t_0, x_0), tenemos que

$$|u(t, x) - u(t_0, x_0)| \leq |u(t, x) - u(t_0, x)| + |u(t_0, x) - u(t_0, x_0)|,$$

siendo $|u(t_0, x) - u(t_0, x_0)| \leq \epsilon$, por la continuidad de $u_0(x)$ potencial de la función continua ρ^{t_0}. Ahora bien por el Teorema del valor medio $|\rho(t, y) - \rho(t_0, y)| \leq |t - t_0||\rho_t(s, y)| \leq |t - t_0|M$, para s entre t y t_0 y siendo M una cota de la función ρ_t de soporte compacto K en un entorno de t_0, por tanto

$$|u(t, x) - u(t_0, x)| \leq \int \frac{|\rho(t, y) - \rho(t_0, y)|}{\|x - y\|}\, dy \leq M|t - t_0| \int_K \frac{1}{\|x - y\|}\, dy.$$

Por otra parte $\partial_t^m u$ es el potencial de $\partial_t^m \rho$, para ello observemos que para todo $t \in (a, b) \subset [a, b]$, ρ y todas sus derivadas $\partial_t^m \rho$ se anulan

en $[a,b]\times K^c$ y por continuidad están acotadas en $[a,b]\times\mathbb{R}^3$, por una constante k_m, por tanto para $t\in(a,b)$

$$\int \frac{|\partial_t^m \rho(t,y)|}{\|x-y\|}\,dy \le k_m \int_K \frac{1}{\|x-y\|}\,dy < \infty,$$

y se sigue de (10.16) que

$$\partial_t^m u(t,x) = \int \frac{\partial_t^m \rho(t,y)}{\|x-y\|}\,dy,$$

ahora como para cada t, $\partial_t^m\rho(t,y)$ son de soporte compacto se sigue de lo anterior y de (10.23), que

$$\partial_t^m D^\alpha u(t,x) = \int \frac{\partial_t^m D^\alpha \rho(t,y)}{\|x-y\|}\,dy,$$

es el potencial de la función $\partial_t^m D^\alpha\rho(t,y)$, por tanto continuo según vimos al principio. ∎

10.4.4. Otros posibles potenciales.

Nos planteamos ahora el estudio en $\mathbb{R}^n$, de las soluciones de $\Delta^m u = 0$, para $u=u(r)$ y $m\in\mathbb{N}$, siendo $r=\sqrt{\sum x_i^2}$.

Teorema 10.28 *En $\mathbb{R}^n$, u es solución de $\Delta^m u = 0$, para $u=u(r)$, sii es combinación de las $2m$ funciones*

$r^{2(k-1)}$, *para* $1\le k\le m$,

$r^{2k-n}f(r)$, *para* $1\le k\le m$, *y* $f(r)=\begin{cases}\log r, & 2k-n\ge 0,\ n \text{ par},\\ 1, & \text{en otros casos.}\end{cases}$

Demostración. Llamemos u_m a tal función, por tanto si tomamos $u_0=0$, tendremos por inducción que $\Delta u_{m+1}=u_m$, lo cual equivale en coordenadas hiperesféricas a

$$u''_{m+1}+\frac{n-1}{r}u'_{m+1}=u_m.$$

Ahora bien si consideramos $u'=y$, basta resolver la ecuación diferencial $y'+fy=g$, para $f=(n-1)/r$ y $g=u_m$ —en cuyo caso $u=u_{m+1}$—, lo cual es inmediato tomando $y=zw$, pues $y'+fy=z'w+zw'+fzw=g$

y basta considerar w la solución de la homogénea $w' + fw = 0$ (en nuestro caso $w = r^{1-n}$), y z solución de $z'w = g$, es decir $z' = r^{n-1}g$. En definitiva, resolvemos $z' = r^{n-1}u_m$ y después $u' = zw = zr^{1-n}$.

Para $g = u_0 = 0$ tenemos que $z_1' = 0$ y $u_1' = z_1 w = k_0 r^{1-n}$, por tanto u_1 es combinación de

$$\begin{cases} 1, \\ r^{2-n}, \quad (\text{para } n = 2,\ \log r), \end{cases}$$

Para $g = u_1$, tenemos que $u_2' = z_2 r^{1-n}$, para

$$z_2' = r^{n-1}u_1 = \begin{cases} k_1 r^{n-1} + k_2 r, & \text{si } n \neq 2; \\ k_1 r + k_2 r \log r, & \text{si } n = 2; \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$z_2 = \begin{cases} k_0 + k_1 r^n + k_2 r^2, & \text{si } n \neq 2; \\ k_0 + k_1 r^2 + k_2 r^2 \log r, & \text{si } n = 2; \end{cases}$$

por lo tanto

$$u_2' = z_2 r^{1-n} = \begin{cases} k_0 r^{1-n} + k_1 r + k_2 r^{3-n}, & \text{si } n \neq 2; \\ k_0 r^{-1} + k_1 r + k_2 r \log r, & \text{si } n = 2; \end{cases}$$

y u_2 es combinación de

$$\begin{cases} 1, \\ r^2, \\ r^{2-n}, \quad (\text{para } n = 2,\ \log r), \\ r^{4-n}, \quad (\text{para } n = 4,\ \log r \text{ y para } n = 2,\ r^2 \log r). \end{cases}$$

Por inducción se tiene que u_m es combinación de las $2m$ funciones

$$r^{2(k-1)}, \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq m,$$

$$r^{2k-n} f(r), \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq m, \quad \text{y} \quad f(r) = \begin{cases} \log r, & 2k - n \geq 0,\ n \text{ par}, \\ 1, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Corolario 10.29 *En $\mathbb{R}^n$, las soluciones de $\Delta^k u = 0$, para $u = u(r)$ y $k \in \mathbb{N}$, cuyos gradientes tienden a cero hacia el infinito son para $n = 2k + 1$ sólo las potencias impares negativas:*

$$r^{-1}, \ldots, r^{-(2k-1)}.$$

y para $n = 2k$ el log *y las potencias pares negativas:*

$$\log r, r^{-2}, \ldots, r^{-2(k-1)}.$$

10.5. Los 3 Problemas.

Como decíamos al principio del Tema, las ecuaciones de **ondas** (ver pág.873) y del **calor** (ver pág.943) se expresan en términos del operador de LAPLACE, respectivamente de la forma

$$a^2 \Delta u = u_{tt}, \qquad K \Delta u = u_t,$$

por lo tanto si consideramos la solución de la ecuación del calor que corresponde a la temperatura u de un cuerpo $\overline{U} = U \cup \partial U$, que no varía con el tiempo ($u_t = 0$), entonces u es solución de la ecuación de LAPLACE. En el caso particular de una plancha de anchura constante con superficies planas aisladas, la temperatura de estado estacionario es una función de dos variables y satisface la ecuación de LAPLACE bidimensional. Pero esta ecuación tiene infinitas soluciones. Para encontrar la temperatura real de nuestro cuerpo, debemos imponer alguna condición a la ecuación —tipo frontera, pues inicial no tiene al no depender del tiempo—. Llamaremos:

1.- Problema de valor frontera de Dirichlet,
2.- Problema de valor frontera de Neumann,
3.- Problema de valor frontera mixto,

a cada uno de los problemas consistentes en encontrar la solución de la ecuación de LAPLACE satisfaciendo respectivamente, cada una de las tres **condiciones frontera**,

$$\begin{aligned}
&(1) && u(x) = f(x), && \text{para } x \in \partial U,\\
&(2) && \partial_n u(x) = f(x), && \text{para } x \in \partial U,\\
&(3) && [f_1 u + f_2 \partial_n u](x) = f(x), && \text{para } x \in \partial U,
\end{aligned}$$

para ∂_n el campo tangente a soporte de ∂U, unitario y ortogonal a ∂U.

Por ejemplo una membrana que esté fija a lo largo de una curva cerrada espacial definida por $z = f(x, y)$, para los puntos (x, y) de una curva plana ∂U, tendrá una forma invariante por el tiempo, dada por $z = u(x, y)$, donde u es solución del problema de DIRICHLET en el plano

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad u(x, y) = f(x, y), \qquad \text{para } (x, y) \in \partial U.$$

10.5.1. Principio del máximo. Unicidad.

A continuación veremos el principio del máximo que establece que una membrana tensa sin vibración ($u_t = 0$), a la que no se le aplica

ninguna fuerza externa, no puede estar abultada ni hacia arriba ni hacia abajo, ó que un objeto con una temperatura en cada punto invariable en el tiempo tiene las temperaturas extremas en su borde.

Principio del máximo 10.30 *Si U es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y u es una función continua en $\overline{U}$ y armónica en U, entonces*

$$M_1 \leq u \leq M_2, \quad \text{en } \partial U \quad \Rightarrow \quad M_1 \leq u \leq M_2, \quad \text{en } \overline{U}.$$

Demostración.- En primer lugar observamos que basta demostrar una de las desigualdades, pues la otra se obtiene considerando la solución $-u$. Daremos sólo la demostración correspondiente a $M = M_2$ y lo haremos en dos partes. En la primera consideremos v una función continua en $\overline{U}$ y de clase 2 en U tal que

$$\begin{aligned} \Delta v > 0, &\quad \text{para } x \in U, \\ v(x) \leq M, &\quad \text{para } x \in \partial U, \end{aligned}$$

y demostremos que $v \leq M$, en $\overline{U}$.

Consideremos el punto $p \in \overline{U}$ en el que v alcanza el máximo, entonces ó bien $p \in \partial U$, en cuyo caso el resultado se sigue, ó bien $p \in U$, en cuyo caso se tiene la siguiente contradicción

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_i}(p) = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(p) \leq 0, \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 0 < \Delta v(p) \leq 0.$$

En segundo lugar consideremos la función u del enunciado, un $\epsilon > 0$, un $r > 0$ tal que $U \subset B[0, r]$ y la función en $\overline{U}$

$$v(x) = u(x) + \epsilon \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

por tanto

$$\begin{aligned} \Delta v = 2n\epsilon > 0, &\quad \text{en } U, \\ v(x) \leq M + \epsilon r^2, &\quad \text{para } x \in \partial U, \end{aligned}$$

y se sigue de la demostración anterior que en $\overline{U}$

$$u(x) \leq v(x) \leq M + \epsilon r^2,$$

y como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, el resultado se concluye. ∎

Ejercicio 10.5.1 Demostrar que una función armónica en un abierto U alcanza el máximo y el mínimo, en cada compacto $K \subset U$, en ∂K.

Ejercicio 10.5.2 Demostrar que una función armónica u en $\mathbb{R}^n$ que se anule en el infinito (es decir que para todo $\epsilon > 0$ existe un compacto K, tal que fuera de K $|u| \leq \epsilon$), es nula $u = 0$.

Ejercicio 10.5.3 Demostrar el **Teorema de Helmholtz**: Un campo tangente en el espacio que se anule en el infinito está totalmente determinado por su rotacional y su divergencia.

Ejercicio 10.5.4 Demostrar el **Teorema de Helmholtz II**: Todo campo $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ que se anule en el infinito es suma de un campo con divergencia nula y otro con rotacional nulo.

Del Principio del máximo se sigue fácilmente la **unicidad** de solución u del problema de DIRICHLET. Mas generalmente se tiene el siguiente resultado.

Teorema de Unicidad 10.31 *Si existe es única la solución u continua en $\overline{U}$ y de clase 2 en el abierto de cierre compacto $U \subset \mathbb{R}^n$ del problema*

$$\begin{aligned} \Delta u &= F, \quad \text{para } x \in U, \\ u(x) &= f(x), \quad \text{para } x \in \partial U, \end{aligned}$$

para F una función en U y f en ∂U.

Demostración. Si u_1 y u_2 son soluciones entonces $u = u_1 - u_2$ es armónica y en la ∂U se anula, por tanto se sigue del principio que u se anula en todo punto. ∎

Volveremos sobre esta cuestión al final del tema.

Observemos que como consecuencia inmediata del principio del máximo tenemos la unicidad de solución de la ecuación de Poisson.

Teorema de Unicidad de solución de la Ec. de Poisson 10.32 *El potencial 10.7, de densidad de masa ó carga ρ de clase 1, integrable y que se anula en el infinito es la única función que satisface la ecuación de Poisson y se anula en el infinito.*

Demostración. Basta considerar la diferencia u de dos posibles soluciones, la cual es armónica y se anula en el infinito, por tanto para todo $\epsilon > 0$, $|u| \leq \epsilon$ fuera de una bola de radio r suficientemente grande, por tanto $|u| \leq \epsilon$ en la esfera de radio $r+1$ y por el principio del máximo $|u| \leq \epsilon$ en la bola de ese radio y por tanto en todo el espacio. ∎

Corolario 10.33 *Si $u \in \mathcal{C}_c^\infty$, entonces es el potencial de la densidad $\rho = -\Delta u/4\pi$.*

Demostración. Por ser $u \in \mathcal{C}_c^\infty$ de soporte compacto, también lo es $\rho = -\Delta u/4\pi \in \mathcal{C}_c^\infty$ y su potencial v satisface, como u, la Ecuación de Poisson. Por la unicidad $u = v$. ∎

También se sigue la **dependencia continua** de la solución del PROBLEMA DE DIRICHLET respecto de las condiciones frontera, pues si u_1 es la solución que corresponde a f_1 y u_2 a f_2, entonces $u_1 - u_2$ es la solución que corresponde a $f_1 - f_2$ y si

$$|f_1 - f_2| < \epsilon \qquad \text{en } \partial U \quad \Rightarrow \quad |u_1 - u_2| < \epsilon \qquad \text{en } U.$$

10.6. Problema de Dirichlet en el plano

10.6.1. Problema Dirichlet en un rectángulo

Consideremos una placa metálica rectangular de la que conozcamos el valor de su temperatura estacionaria, en el borde. Entonces tal temperatura es solución del problema de DIRICHLET del tipo

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \\ u(x,0) = f_1(x), \quad u(x,R) = f_2(x), &\qquad \text{si } \ 0 < x < L, \\ u(0,y) = f_3(x), \quad u(L,y) = f_4(x), &\qquad \text{si } \ 0 < y < R, \end{aligned}$$

problema que podemos dividir en cuatro problemas del tipo

$$\begin{aligned} u_{xx}+u_{yy}&=0,\\ u(x,0)=f_1(x),\quad u(x,R)&=0, \qquad \text{si}\ \ 0<x<L,\\ u(0,y)=0,\quad u(L,y)&=0, \qquad \text{si}\ \ 0<y<R, \end{aligned}$$

en que consideramos que la temperatura es nula sobre tres lados. Y la solución a nuestro problema inicial es la suma de las cuatro soluciones particulares. Resolvamos pues uno de estos últimos.

Supongamos que $u(x,y)=f(x)g(y)$ es solución, entonces

$$\begin{aligned} f''(x)+\lambda f(x)&=0, \qquad f(0)=f(L)=0,\\ g''(y)-\lambda g(y)&=0, \qquad g(R)=0, \end{aligned}$$

lo cual implica que las únicas soluciones corresponden a múltiplos (ver la pág.56) de

$$\begin{aligned} f(x)&=\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},\\ g(y)&=\frac{\mathrm{e}^{n\pi\frac{R-y}{L}}-\mathrm{e}^{n\pi\frac{y-R}{L}}}{2}=\operatorname{senh}(n\pi\frac{R-y}{L}), \end{aligned}$$

para cada $n\in\mathbb{N}$. Las sumas finitas de sus productos son soluciones u y si existe una suma infinita

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{senh}(n\pi\frac{R-y}{L})\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},$$

que satisfaga $u(x,0)=f_1(x)$, debería ser

$$f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{senh}(n\pi\frac{R}{L})\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},$$

por tanto debemos elegir (ver la pág.876)

$$c_n\operatorname{senh}(n\pi\frac{R}{L})=b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f_1(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx,$$

como los coeficientes de Fourier de la extensión impar de f_1 a $[-L,L]$. Y tenemos así una expresión formal para la solución de nuestro problema

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{\operatorname{senh}(n\pi\frac{R-y}{L})}{\operatorname{senh}(n\pi\frac{R}{L})}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},$$

ahora bien si f_1 es integrable

$$|b_n| \le c = \frac{2}{L}\int_0^L |f_1(x)|dx < \infty,$$

los términos de la serie están acotados por los términos

$$\begin{aligned} c\frac{\mathrm{e}^{n\pi\frac{R-y}{L}} - \mathrm{e}^{n\pi\frac{y-R}{L}}}{\mathrm{e}^{n\pi\frac{R}{L}} - \mathrm{e}^{-n\pi\frac{R}{L}}} &\le c\,\mathrm{e}^{-\frac{n\pi y}{L}}\,\frac{1-\mathrm{e}^{2n\pi\frac{y-R}{L}}}{1-\mathrm{e}^{-2n\pi\frac{R}{L}}} \\ &\le \frac{c}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\frac{R}{L}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{n\pi y}{L}}, \end{aligned}$$

y estos definen una serie que converge para todo $y > 0$ y la convergencia es uniforme en los (x, y) con $y \ge y_0$, para cualquier $y_0 > 0$. De donde se sigue que nuestra serie converge a una función u continua en $[0, \infty) \times (0, \infty)$, que satisface las tres condiciones frontera

$$u(x, R) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(L, y) = 0,$$

por otra parte las series cuyos términos son las derivadas parciales —respecto de x, y, xx e yy—, de los términos de nuestra serie, también convergen en $[0, \infty) \times (0, \infty)$ y uniformemente en $[0, \infty) \times [y_0, \infty)$, para cualquier $y_0 > 0$, por tanto u es de clase 2 y podemos derivarla derivando término a término la serie y satisface la ecuación de Laplace, pues cada término de la serie la satisface.

Por último falta demostrar que u es continua en $y = 0$, para ello supondremos que f_1 es de clase 1, por lo tanto (ver (11.2), pág.877) su serie de Fourier

$$s_n(x, 0) \to f_1(x),$$

converge uniformemente en $[0, L]$, donde estamos considerando

$$s_m(x, y) = \sum_{n=1}^{m} b_n \frac{\operatorname{senh}(n\pi\frac{R-y}{L})}{\operatorname{senh}(n\pi\frac{R}{L})} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},$$

por tanto dado un $\epsilon > 0$ existe un N, tal que para $m, n \ge N$ se tiene

$$|s_n(x, 0) - s_m(x, 0)| \le \epsilon,$$

pero $v = s_n - s_m$ es solución de la ecuación de Laplace y satisface las tres condiciones frontera

$$v(0, y) = v(L, y) = v(x, R) = 0,$$

para todo $0 \leq y \leq R$ y $0 \leq x \leq L$, por tanto se sigue del principio del máximo para la ecuación de LAPLACE que

$$|s_n(x,y) - s_m(x,y)| \leq \epsilon,$$

para todo $(x,y) \in [0,L] \times [0,R]$, por tanto s_n converge uniformemente a u en $[0,L] \times [0,R]$, u es continua en ese conjunto y obviamente satisface la cuarta condición de contorno.

En el desarrollo anterior hemos supuesto que f_1 se anula en 0 y L, por lo que este desarrollo sólo justifica la existencia de solución, del problema general, cuando en el borde del rectángulo consideramos una función que se anula en los cuatro vértices. Esta exigencia es ficticia como puede ver el lector en la pág. 118 del WEINBERGER, donde se demuestra la validez del resultado en general.

10.6.2. Problema de Dirichlet en un disco

Consideremos ahora el problema de encontrar la temperatura estacionaria de una placa circular de radio R —centrada en el origen—, conociéndola en el borde. Tal temperatura es solución del problema de DIRICHLET del tipo

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ &u(x,y) = f(x,y), \qquad \text{para} \quad x^2 + y^2 = R^2, \end{aligned}$$

ahora bien por las características del problema, lo planteamos en coordenadas polares

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \\ &u(R,\theta) = f(\theta), \end{aligned}$$

Consideremos las soluciones encontradas en (10.2.1), pág.755, de la forma $u = f(\rho)g(\theta)$, entonces como $g(0) = g(2\pi)$, tendremos que las únicas soluciones que verifican esto corresponden al valor $a = n^2$ y como buscamos soluciones que sean continuas en 0, nos quedan las de la forma

$$\rho^n (c_1 \cos n\theta + c_2 \operatorname{sen} n\theta),$$

y sus combinaciones finitas. Nos preguntamos entonces si habrá alguna combinación infinita

$$u(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta), \tag{10.10}$$

tal que para $\rho = R$ coincida con

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta),$$

para ello basta elegir los coeficientes de FOURIER de f en $[-\pi, \pi]$.

Ahora bien para $\rho < R$ basta que $\int |f| < \infty$ para que la serie (10.10) y las de las derivadas primeras y segundas (de sus términos) converjan en el disco abierto y uniformemente en un disco $\rho \leq r$, para cualquier $0 < r < R$, de donde se sigue que la serie define una función u de clase 2 en el disco abierto de radio R y es solución de la ecuación de LAPLACE pues cada término de la serie lo es.

Si ahora suponemos que f es continua, periódica y tiene derivada continua salvo en un conjunto finito de puntos en los que tiene derivadas laterales finitas, entonces como vimos en el caso anterior se demuestra, utilizando el principio del máximo, que la convergencia

$$s_m(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) \;\to\; u(\rho, \theta),$$

es uniforme en el disco cerrado de radio R y por tanto u es continua y satisface las condiciones del problema.

En particular obtenemos que la temperatura en el centro del disco $x = 0$, $y = 0$, que corresponde a $\rho = 0$, vale

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

es decir que la temperatura en el centro del disco es el promedio de la temperatura en el borde. Propiedad a la que aludimos al principio del Tema. Observemos que de aquí se sigue el

Teorema del valor medio 10.34 *El valor de una función armónica en el centro de un círculo del plano es el promedio de sus valores en la circunferencia.*

Para lo cual basta hacer una traslación del punto al origen.

10.6.3. Fórmula integral de Poisson.

Ahora bien si sólo sabemos que $\int |f| < \infty$, tendremos que $s_m \to u$ en el disco abierto y si calculamos los valores de a_n y b_n, tendremos

$$\begin{aligned} s_m(\rho,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum_{n=1}^{m} \frac{\rho^n}{R^n}\left(\frac{\cos n\theta}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}\frac{\rho^n}{R^n}(\cos n\theta\cos nx + \operatorname{sen} n\theta\operatorname{sen} nx)\right]dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}\frac{\rho^n}{R^n}\cos n(\theta - x)\right]dx, \end{aligned}$$

y para cualquier $\rho < R$ la serie de la derecha converge uniformemente en x, por lo que tomando límites

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos n(\theta - x)\right]dx.$$

Ahora bien tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos n(\theta - x) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{\mathrm{e}^{in(\theta-x)} + \mathrm{e}^{-in(\theta-x)}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(\rho/R)\,\mathrm{e}^{i(\theta-x)}]^n + [(\rho/R)\,\mathrm{e}^{-i(\theta-x)}]^n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{(\rho/R)\,\mathrm{e}^{i(\theta-x)}}{1-(\rho/R)\,\mathrm{e}^{i(\theta-x)}} + \frac{(\rho/R)\,\mathrm{e}^{-i(\theta-x)}}{1-(\rho/R)\,\mathrm{e}^{-i(\theta-x)}}\right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{R\rho\cos(\theta-x) - \rho^2}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\theta-x) + R^2} \\ &= \frac{R^2-\rho^2}{2[\rho^2 + R^2 - 2R\rho\cos(\theta-x)]}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-\rho^2}{\rho^2 + R^2 - 2R\rho\cos(\theta-x)} f(x)\,dx.$$

Esta ecuación llamada **Fórmula integral de Poisson** es válida para los $\rho < R$ y nos dice que la temperatura en todo punto del disco puede obtenerse integrando la temperatura en el borde de una determinada manera. A menudo calcular esta integral es preferible y nos da un resultado mas exacto que si calculamos la serie (10.10).

Nota 10.35 Realmente esta ecuación es una consecuencia del teorema del valor medio (10.34) por lo siguiente: En la lección 10.2.3 vimos que un difeomorfismo entre dos abiertos del plano, definido por una aplicación holomorfa conserva las funciones armónicas, por ejemplo para $R = 1$ y $a = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}$, con $|a| = \rho < 1$, la aplicación

$$\phi(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z - 1},$$

lleva $\phi(a) = 0$, $\phi(0) = a$, el disco unidad en el disco unidad, la circunferencia en la circunferencia y $\phi = \phi^{-1}$, pues $\phi[\phi(z)] = z$. Ahora en términos del difeomorfismo $G\colon [0, 2\pi) \to S_1$, $G(\alpha) = \mathrm{e}^{i\alpha}$, que lleva la medida de Lebesgue m, en la medida de ángulos, tenemos el difeomorfismo $F\colon [0, 2\pi) \to [0, 2\pi)$, que hace el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} [0,2\pi) & \xrightarrow{F} & [0,2\pi) \\ {\scriptstyle \mathrm{G}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{G}} \\ S_1 & \xrightarrow{\phi} & S_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \alpha & \longrightarrow & F(\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{e}^{i\alpha} & \longrightarrow & \phi(\mathrm{e}^{i\alpha}), \end{array}$$

y tendremos que

$$\mathrm{e}^{iF(\alpha)} = \frac{\mathrm{e}^{i\alpha} - a}{\bar{a}\,\mathrm{e}^{i\alpha} - 1}$$

y F transforma la medida de Lebesgue en la medida $\mu(A) = m[F^{-1}(A)] =$

$$= m[F(A)] = \int_A F'(\alpha)d\alpha = \int_A \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha,$$

pues

$$iF'\,\mathrm{e}^{iF(\alpha)} = \frac{i\,\mathrm{e}^{i\alpha}(\bar{a}\,\mathrm{e}^{i\alpha} - 1) - (\mathrm{e}^{i\alpha} - a)\bar{a}i\,\mathrm{e}^{i\alpha}}{(\bar{a}\,\mathrm{e}^{i\alpha} - 1)^2} \quad \Rightarrow$$

$$F'\frac{\mathrm{e}^{i\alpha} - a}{\bar{a}\,\mathrm{e}^{i\alpha} - 1} = \mathrm{e}^{i\alpha}\,\frac{(\bar{a}\,\mathrm{e}^{i\alpha} - 1) - (\mathrm{e}^{i\alpha} - a)\bar{a}}{(\bar{a}\,\mathrm{e}^{i\alpha} - 1)^2} = \mathrm{e}^{i\alpha}\,\frac{\rho^2 - 1}{(\bar{a}\,\mathrm{e}^{i\alpha} - 1)^2} \quad \Rightarrow$$

$$F'(\alpha) = \frac{\rho^2 - 1}{(1 - a\,\mathrm{e}^{-i\alpha})(\bar{a}\,\mathrm{e}^{i\alpha} - 1)} = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\theta - \alpha)}.$$

Ahora si $f = \phi^* g$ es armónica en el disco unidad, también lo es g y para $\overline{g}(\alpha) = g(\mathrm{e}^{i\alpha})$ y $\overline{f}(\alpha) = f(\mathrm{e}^{i\alpha})$, $\overline{f} = F^*\overline{g}$ y aplicando (10.34) a la función g, tenemos que

$$f(a) = g[\phi(a)] = g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{g}(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(x)F'(x)\,dx.$$

Para el resultado en el disco de radio R se considera para $a = \rho\,\mathrm{e}^{i\alpha}$, con $\rho < R$, la medida anterior con $\rho/R < 1$ en lugar de ρ.

Por último para $\rho < R$ podemos derivar indefinidamente los términos de la serie (10.10) y las series de estas derivadas convergen en el disco unidad abierto y uniformemente en un disco $\rho \le r$, para cualquier $0 < r < R$, de donde se sigue que la serie define una función u de clase infinita en el disco unidad abierto. Pero es más, se sigue de la proposición (10.37), que u es una suma infinita en n, de polinomios homogéneos de grado n, en (x, y), por tanto u es analítica en el origen y (10.10) es su serie de Taylor en el origen. Del mismo modo toda función u armónica en un abierto del plano es analítica en ese abierto. Para verlo basta considerar un punto del abierto (x_0, y_0) y un disco en el abierto, de centro el punto. Los argumentos anteriores muestran que u es igual —en el círculo abierto— a su serie de Taylor en (x_0, y_0).

Teorema de Liouville 10.36 *Una función armónica en $\mathbb{R}^n$ no puede estar acotada superiormente (ni inferiormente) a menos que sea constante.*

Demostración. Lo veremos para $n = 2$. El caso general lo veremos en (10.47), pág.818. Basta demostrar una de las dos afirmaciones pues la otra se obtiene considerando la función cambiada de signo. Sin perdida de generalidad podemos suponer que nuestra función armónica está acotada inferiormente por 0, es decir que $u \ge 0$, en tal caso consideremos un punto cualquiera x y un radio R tal que $x \in B(0, R)$, en tal caso la fórmula de Poisson nos permite expresar

$$u(x) = u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{\rho^2 + R^2 - 2R\rho\cos(\theta - \xi)} u(R, \xi)d\xi,$$

y como se tiene que para todo $0 \le \rho < R$

$$\frac{R - \rho}{R + \rho} \le \frac{R^2 - \rho^2}{\rho^2 + R^2 - 2R\rho\cos(\theta - \xi)} \le \frac{R + \rho}{R - \rho},$$

y que $u \geq 0$, tendremos que

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}u(R,\xi) \leq \frac{R^2-\rho^2}{\rho^2+R^2-2R\rho\cos(\theta-\xi)}u(R,\xi) \leq \frac{R+\rho}{R-\rho}u(R,\xi),$$

e integrando

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(R,\xi)d\xi \leq u(x) \leq \frac{R+\rho}{R-\rho}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(R,\xi)d\xi,$$

y por el teorema del valor medio para funciones armónicas

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}u(0) \leq u(x) \leq \frac{R+\rho}{R-\rho}u(0),$$

y haciendo $R \to \infty$, $u(x) = u(0)$ y el resultado se sigue. ∎

10.6.4. Polinomios de Tchebycheff.

Finalizamos analizando las funciones encontradas en esta lección.

Proposición 10.37 *Se tiene que $\rho^n \cos n\theta$ y $\rho^n \operatorname{sen} n\theta$, son polinomios armónicos homogéneos en (x,y), de grado n.*

Demostración. Basta considerar la parte real y la imaginaria de

$$\rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) = (\rho\, e^{i\theta})^n = (x+iy)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^{n-m}(iy)^m. \quad ∎$$

Proposición 10.38 *Para cada n existe un polinomio T_n de grado n, llamado polinomio de Tchebycheff, tal que $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ y tienen las siguientes propiedades:*

i) $T_n \circ T_m = T_{nm}$

ii) T_n es solución de la ecuación diferencial

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

iii) $T_0/\sqrt{2}$, T_1, T_2,..., son ortonormales para el producto interior

$$< f, g >= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

iv) Satisfacen la regla de recurrencia

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}.$$

v) $T_{2n}(x) = T_n(2x^2 - 1)$.
vi)

$$\frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n.$$

vii) $T_n(\cosh x) = \cosh nx$.

Demostración. Tomando en el resultado anterior para $\rho = 1$, los términos pares $m = 2k$ y siendo $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$

$$\begin{aligned} T_n(\cos\theta) = \cos n\theta &= \sum_{2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k} y^{2k} \\ &= \sum_{2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k}(1-x^2)^k = T_n(x). \end{aligned}$$

i) $T_n[T_m(\cos\theta)] = T_n[\cos m\theta] = \cos nm\theta = T_{nm}(\cos\theta)$.

ii) Para $|x| \le 1$ se sigue fácilmente derivando dos veces $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$, pues

$$\begin{aligned} -T_n'(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta &= -n\operatorname{sen} n\theta, \\ T_n''(\cos\theta)\operatorname{sen}^2\theta - T_n'(\cos\theta)\cos\theta &= -n^2\cos n\theta. \end{aligned}$$

y para el resto de x se sigue porque $(1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n$ es un polinomio de grado n que se anula en todo $[-1,1]$ por tanto en todo $\mathbb{R}$.

iii) Es fácil ver que $< T_0, T_0 >= 2$ y para el resto $< T_m, T_n >= \delta_{nm}$, pues haciendo el cambio de coordenadas $x = \cos\theta$, tenemos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi} f(\cos\theta)\,d\theta,$$

y para $f_m(\theta) = \cos m\theta = P_m(\cos\theta)$ y para $n \ne m$ no nulos

$$\begin{aligned} < T_0/\sqrt{2}, T_n > &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi} \cos n\theta\,d\theta = \frac{\sqrt{2}}{n\pi}\int_0^{n\pi} \cos\theta\,d\theta = 0, \\ < T_n, T_m > &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos n\theta\cos m\theta\,d\theta = 0, \end{aligned}$$

pues $f_k'(\pi) = f_k'(0) = 0$ para cada f_k que además es solución de $y'' + m^2 y = 0$, por tanto

$$(m^2 - n^2) f_m f_n = f_n'' f_m - f_m'' f_n = (f_n' f_m - f_m' f_n)',$$

esto prueba la ortogonalidad de T_n y T_m para $n \neq m$. Ahora para calcular $< T_n, T_n >$ basta observar que

$$\int_0^{\pi} \cos^2 n\theta \, d\theta = (1/n) \int_0^{n\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = (1/n) \int_0^{n\pi} \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta,$$

y se tiene que $< T_n, T_n >= 1$, pues la suma de las integrales anteriores que son iguales es

$$(1/n) \int_0^{n\pi} 1 \, d\theta = \pi,$$

y su semisuma que es $\int_0^{\pi} \cos^2 n\theta \, d\theta = \pi/2$.

iv) Se tiene que

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & \cos(n\theta + \theta) + \cos(n\theta - \theta) = 2 \cos\theta \cos n\theta, \end{aligned}$$

por lo tanto tomando $x = \cos\theta$

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}.$$

v) Para $x = \cos\theta$

$$T_{2n}(\cos\theta) = \cos 2n\theta = T_n(\cos 2\theta) = T_n(2\cos^2\theta - 1).$$

vi) Utilizando la fórmula de recurrencia

$$t^{n+1} T_{n+1} - 2xtt^n T_n - t^2 t^{n-1} T_{n-1} = 0,$$

y sumando tenemos

$$(1 - 2tx + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n = 1 - tx.$$

vii) Por inducción y la fórmula de recurrencia pues para $T_0 = 1$ y $T_1 = x$ se verifica y si hasta n se verifica $T_n(\cosh x) = \cosh nx$, para $n+1$ también pues

$$\begin{aligned} T_{n+1}\left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) &= 2\left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{nx} - \mathrm{e}^{-nx}}{2}\right) - \left(\frac{\mathrm{e}^{(n-1)x} - \mathrm{e}^{-(n-1)x}}{2}\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{(n+1)x} - \mathrm{e}^{-(n+1)x}}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 10.39 *Para cada n, $\rho^n T_n(\cos\theta)$ son polinomios homogéneos armónicos de grado n en x, y.*

Veremos propiedades muy parecidas en el análisis del problema de Dirichlet en la esfera (ver 10.6.6, pág.809)

Ejercicio 10.6.1 Resolver la ecuación $\Delta u = 0$, considerando las condiciones:
1) $u(1,\theta) = \cos^2\theta$,
2) $u(1,\theta) = \operatorname{sen}^3\theta$.

10.6.5. Problema de Dirichlet en la esfera

Consideremos la temperatura estacionaria en una esfera de radio 1 con una temperatura determinada en su superficie, es decir consideremos el problema de DIRICHLET

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \\ &u(x,y,z) = F(x,y,z), \qquad \text{para } \ x^2+y^2+z^2 = 1. \end{aligned}$$

Dadas las características del problema planteamos el problema en coordenadas esféricas

$$x = \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \quad z = \rho\cos\theta,$$

en las que el laplaciano hemos visto que vale (ver pág.767)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

Vamos a considerar el caso en que F es constante en φ, es decir que es una función $F(\theta)$. Por tanto empezamos buscando soluciones de la forma

$$u(\rho,\theta,\varphi) = f(\rho)g(\theta),$$

en cuyo caso f y g deben satisfacer la ecuación

$$\begin{aligned} \rho^2\frac{f''}{f} + 2\rho\frac{f'}{f} = -\frac{g''}{g} - \frac{g'}{g\tan\theta} \quad &\Rightarrow \\ \rho^2 f'' + 2\rho f' - \lambda f = 0, \\ g'' + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}g' + \lambda g = 0, \end{aligned}$$

la primera de las cuales es una ecuación de EULER y la segunda es

$$(g' \operatorname{sen}\theta)' + \lambda g \operatorname{sen}\theta = 0,$$

y si hacemos el cambio de coordenadas $x = \cos\theta$ y llamamos $y(x) = g(\theta)$, esta ecuación se transforma en la ECUACIÓN DE LEGENDRE

$$(10.11) \qquad (y'(1-x^2))' + \lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0,$$

10.6.6. La Ecuación de Legendre.

Si buscamos una solución de esta ecuación por el método de las potencias tendremos

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \\
y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}, \quad -2xy'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n n x^n, \\
y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}, \quad -x^2 y''(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) x^n,
\end{aligned}$$

y al sustituir en la ecuación e igualar a 0, tendremos que los coeficientes de la serie son todos nulos, es decir

$$\lambda c_n - 2nc_n + (n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n = 0,$$

y de aquí obtenemos la fórmula de recurrencia

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} c_n,$$

de la que obtenemos todos los términos pares a partir de c_0 por

$$c_{2(n+1)} = a_n c_{2n} = a_n a_{n-1} c_{2(n-1)} = \cdots = \prod_{i=0}^{n} a_i c_0,$$

siendo

$$a_n = \frac{2n(2n+1) - \lambda}{(2n+1)(2n+2)},$$

y por tanto

$$c_{2(n+1)} = \prod_{i=0}^{n} \frac{2i(2i+1)-\lambda}{(2i+1)(2i+2)} c_0 = \prod_{i=0}^{n} [2i(2i+1)-\lambda] \frac{c_0}{(2n+2)!},$$

y de un modo similar obtendríamos los términos impares, a partir de c_1.

Observamos que si

$$\lambda = n(n+1),$$

para algún n par, entonces hay un polinomio solución, que se llama **Polinomio de Legendre** de orden n, que denotamos con P_n (el único que satisface $P_n(1) = 1$), y que sólo tiene términos pares, pues los coeficientes pares se anulan a partir del $n+1$ y todos los coeficientes impares se anulan si tomamos $c_1 = 0$. Y lo mismo si n es impar, tomando $c_0 = 0$. Esta solución polinómica P_n está definida en todo $\mathbb{R}$, en particular en el $x = 1$ —recordemos que $x = 1$ corresponde a $\theta = 0$—.

Si por el contrario λ no es de esa forma, todos los coeficientes pares son no nulos a menos que $c_0 = 0$ y los coeficientes impares también son no nulos a menos que $c_1 = 0$. En cuyo caso la serie converge para $|x| < 1$, para lo cual basta aplicar por separado el criterio del cociente a las series formadas por los términos impares y por los pares. En cualquier caso las series no convergen en $x = 1$. Por tanto sólo nos interesa el valor de $\lambda = n(n+1)$ para el que la ecuación de Legendre correspondiente tiene solución P_n.

Estos polinomios P_n tienen las siguientes propiedades:

Fórmula de recurrencia.

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x),$$

Fórmula de Rodrigues.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n,$$

y además son ortogonales para el producto interior de $L_2[-1,1]$, es decir

$$P_n \cdot P_m = \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{para } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{para } n = m. \end{cases}$$

(remitimos al lector interesado en estas propiedades a las página 243 y 493 del libro de Derrick–Grossman). La ortogonalidad se sigue fácilmente considerando que son solución, para $\lambda_n = n(n+1)$, de la ecuación

de Legendre (10.11) $(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' = -\lambda_n P_n$ y desarrollando

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int P_n P_m = \int [(1-x^2)P_m'' - 2xP_m']P_n - [(1-x^2)P_n'' - 2xP_n']P_m$$
$$= \int_{-1}^{1} [(1-x^2)(P_m' P_n - P_m P_n')]' = 0.$$

Por otra parte que su norma al cuadrado es $2/2n+1$ se sigue de que es cierto para $P_0 = 1$ y por inducción utilizando la fórmula de recurrencia

$$P_{n+1}^2 = \frac{2n+1}{n+1} x P_n P_{n+1} - \frac{n}{n+1} P_{n-1} P_{n+1},$$
$$P_{n+2} P_n = \frac{2n+2}{n+2} x P_{n+1} P_n - \frac{n+1}{n+2} P_n^2(x),$$

y el que son ortogonales. Observemos que estos polinomios se pueden definir recurrentemente del siguiente modo, P_n es el único polinomio de grado n que satisface:

— Tiene la misma L_2–norma y el mismo valor en 1 que el polinomio mónico x^n $(P_n(1) = 1^n = 1)$ y es ortogonal al espacio generado por los polinomios anteriores

$$E_{n-1} =< 1, x, x^2, \ldots, x^{n-1} >=< 1, P_1, \cdots, P_{n-1} > .$$

Las series de Fourier–Legendre, es decir del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

son muy importantes para aproximaciones numéricas, pues en primer lugar si $h = Q_n$ es un polinomio de grado n existe una representación única

$$Q_n = \sum_{m=0}^{n} a_m P_m(x),$$

donde dadas las propiedades de ortogonalidad de los P_m, los coeficientes son necesariamente

$$a_m = \frac{Q_n \cdot P_m}{P_m \cdot P_m},$$

y si h es una función de L_2 (en particular si es continua) y elegimos los mismos coeficientes

$$a_m = \frac{h \cdot P_m}{P_m \cdot P_m},$$

que llamamos coeficientes de FOURIER–LEGENDRE relativos a h, tendremos que para cada n el polinomio

$$p_n(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m P_m(x),$$

es de grado n y $h - p_n$ es ortogonal al espacio E_n generado por los polinomios de grado $\leq n$, pues

$$(h - p_n) \cdot P_i = (h - \sum_{m=0}^{n} a_m P_m(x)) \cdot P_i = h \cdot P_i - a_i P_i \cdot P_i = 0,$$

y por lo tanto p_n es la aproximación óptima (por mínimos cuadrados) de h entre los polinomios $p \in E_n$, de grado $\leq n$, pues por lo anterior $(h - p_n) \cdot p = 0$, por lo tanto $h \cdot p = p_n \cdot p$ y

$$\begin{aligned}(h-p)\cdot(h-p) &= h\cdot h - 2h\cdot p + p\cdot p\\ &= h\cdot h - 2p_n\cdot p + p\cdot p\\ &= h\cdot h - p_n\cdot p_n + (p_n - p)\cdot(p_n - p),\end{aligned}$$

y la expresión alcanza el valor mínimo cuando $p = p_n$.

Volviendo a nuestro problema inicial, consideremos el caso en que $\lambda = n(n+1)$, para el que tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}\rho^2 f'' + 2\rho f' - n(n+1)f &= 0,\\ (g' \operatorname{sen}\theta)' + n(n+1) g \operatorname{sen}\theta &= 0,\end{aligned}$$

las cuales tienen solución —aplicando también en la primera el método de las potencias—

$$f(\rho) = \rho^n, \qquad g(\theta) = P_n(\cos\theta),$$

y las combinaciones finitas de

$$\rho^n P_n(\cos\theta),$$

son soluciones. Ahora es de esperar que eligiendo convenientemente coeficientes c_i, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n P_n(\cos\theta),$$

converja a una solución que para $\rho = 1$ coincida con $F(\theta)$. Y esto es así, si F es continua, eligiendo los c_n como los coeficientes de FOURIER–LEGENDRE de $h(x) = F(\theta)$. Remitimos al lector a la página 206 del WEINBERGER, para los detalles.

De modo similar a lo visto en (10.39), pág.808, se demuestra por inducción que cada $\rho^n P_n(\cos\theta)$ es un polinomio, pues por ejemplo para los tres primeros $P_0 = 1$, $P_1 = x$ y $P_2 = 3x^2/2 - 1/2$, se tiene

$$\rho^0 P_0 = 1, \quad \rho P_1(\cos\theta) = z, \quad \rho^2 P_2(\cos\theta) = \frac{3z^2}{2} - \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

Proposición 10.40 *Para cada n, $\rho^n P_n(\cos\theta)$ es un polinomio homogéneo armónico en x, y, z.*

Demostración. Por inducción utilizando la fórmula de recurrencia, pues si hasta n, $\rho^n P_n$ es polinomio de grado n también $\rho^{n+1} P_{n+1}$, pues

$$\rho^{n+1} P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}\cos\theta\,\rho^{n+1} P_n - \frac{n}{n+1}\rho^2\rho^{n-1} P_{n-1},$$
$$\rho^{n+1} P_n = \frac{2n-1}{n}\cos\theta\,\rho^2\rho^{n-1} P_{n-1} - \frac{n-1}{n}\rho^3\rho^{n-2} P_{n-2}. \quad \blacksquare$$

Por último es de señalar que (ver pág. 208 del WEINBERGER)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos\theta}},$$

fracción de la que hemos desarrollado algunos términos en la pág.781.

10.7. Teoremas fundamentales

Consideremos dos abiertos $U, \Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$ una variedad con borde, cuyo borde $S = \partial\Omega$ esté en las condiciones del **Teorema de Stokes**, (14.12), pág.988, por ejemplo que sea una variedad $(n-1)$–dimensional salvo en un conjunto de medida nula. Nuestro interés radica

en estudiar la unicidad de solución de los tres problemas enunciados en la pág.794, para la ecuación algo más general

$$\Delta u = P \cdot u,$$

para $P \geq 0$ una función de U no negativa.

10.7.1. Identidades de Green.

Recordemos que para cada función f y cada campo E,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fE) &= \operatorname{grad} f \cdot E + f \operatorname{div} E, \\ \Delta f &= \operatorname{div} \operatorname{grad} f, \end{aligned}$$

y que si T es un campo tangente y ∂_n es el campo unitario ortogonal exterior a S, entonces

$$i_T \omega_{|S} = (T \cdot \partial_n) i_{\partial_n} \omega,$$

pues eligiendo $D_1 = \partial_n, D_2, \ldots, D_n$ una base ortonormal de campos bien orientada, con $D_2, \ldots, D_n$ tangentes a S, tendremos $T = \sum (T \cdot D_i) D_i$ y si h es tal que en S, $i_T \omega = h i_{\partial_n} \omega$, entonces aplicando ambos lados a $D_2, \ldots, D_n$ tendremos

$$h = \omega(T, D_2, \ldots, D_n) = T \cdot D_1 = T \cdot \partial_n,$$

por lo que dadas dos funciones $u, v \in \mathcal{C}^1(U)$, tendremos por el **Teorema de Stokes**, (14.12), pág.988, llamando $D = \operatorname{grad} u$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} v\, \partial_n u \, ds &= \int_{\partial\Omega} v (D \cdot \partial_n)\, ds = \int_{\partial\Omega} (vD) \cdot \partial_n \, i_{\partial_n} \omega \\ &= \int_{\partial\Omega} i_{vD} \omega = \int_C d(i_{vD}\omega) = \int_\Omega \operatorname{div}(vD)\, \omega \\ &= \int_\Omega (\operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u + v \Delta u)\, \omega. \end{aligned}$$

En definitiva tenemos la **Primera identidad de Green**,

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u + v \Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} v (\partial_n u)\, ds, \tag{10.12}$$

de donde se sigue la **Segunda identidad de Green**

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,dx = \int_{\partial\Omega} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)]\,ds, \tag{10.13}$$

(donde recordemos que ∂_n debe ser ortonormal y exterior a Ω) y por lo tanto si u y v son armónicas tendremos que

$$\int_{\partial\Omega} v(\partial_n u)\,ds = \int_{\partial\Omega} u(\partial_n v)\,ds. \tag{10.14}$$

Corolario 10.41 *Sea $u \in \mathcal{C}^1(U)$ y armónica en $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$, entonces*

$$\begin{aligned} u = 0 \quad &\text{en } S = \partial\Omega \quad \Rightarrow \quad u = 0 \quad \text{en } \Omega \\ \partial_n u = 0 \quad &\text{en } S = \partial\Omega \quad \Rightarrow \quad u = cte \quad \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

Demostración. Tomando $u = v$ en la identidad de Green. ∎

10.7.2. Unicidad de solución en PVF

Tras estos preliminares vamos a estudiar en que casos podemos asegurar la unicidad de solución del PVF[6]

$$\Delta u = P \cdot u, \tag{10.15}$$

satisfaciendo una de las tres condiciones frontera

$$\begin{aligned} u &= f, && \text{en } \partial\Omega, \\ \partial_n u &= f, && \text{en } \partial\Omega, \\ \partial_n u + \alpha u &= f, && \text{en } \partial\Omega, \text{ para } \alpha > 0, \end{aligned}$$

(de existir). (En 10.7.5, pág.819 veremos que la unicidad en el primero se da en condiciones generales para el borde, sin que sea variedad.)

Supongamos que hay dos soluciones u_1 y u_2, entonces $u = u_1 - u_2$ satisface la misma ecuación $\Delta u = Pu$, con la correspondiente condición frontera para $f = 0$. Entonces en cualquiera de las tres condiciones frontera tendremos que

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} u + Pu^2)\omega = \int_{\partial\Omega} u(\partial_n u)\, i_{\partial_n}\omega,$$

[6] PVF=problema con valores frontera

y para la primera y segunda condiciones tendremos que, por ser $P \geq 0$

$$\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + Pu^2 \right] \omega = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + Pu^2 = 0,$$

lo cual implica que u es constante y si en un punto $x \in \Omega$ es $P(x) > 0$, entonces $u(x) = 0$ y por ser constante $u = 0$, por tanto la solución es única, mientras que en el caso $P = 0$ tendremos que u es constante pues tiene todas las derivadas nulas, por lo tanto $u = 0$ para la primera condición frontera y es constante para la segunda, es decir que dos soluciones del problema de Newmann difieren en una constante. Para la tercera condición frontera tenemos que

$$\partial_n u = -\alpha u \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + Pu^2 \right] \omega + \int_{\partial\Omega} \alpha u^2 i_{\partial_n} \omega = 0,$$

y tenemos que $u = 0$ en $\partial\Omega$ y como por otra parte u es constante, tendremos que $u = 0$ y la solución es única.

Ejercicio 10.7.1 (1) La solución u para la ecuación 10.15, con $P > 0$, no puede alcanzar un máximo positivo ni un mínimo negativo en el abierto acotado Ω. (2) Como consecuencia demostrar la siguiente versión del principio del máximo: si $M_1 \leq u \leq M_2$ en $\partial\Omega$, con $M_1 < 0$ y $M_2 > 0$, entonces $M_1 \leq u \leq M_2$ en Ω. (3) Comprobar que para $M_1 < M_2$ arbitrarias en general no es cierto el resultado. (4) Demostrar que (de existir) la solución u, es continua respecto de su valor f en la frontera.

10.7.3. Teorema de Gauss

En los términos de la lección anterior tenemos que para $v = 1$ en 10.12, se tiene

$$\int_{\partial\Omega} \partial_n u \; ds = \int_\Omega \Delta u \; dx,$$

lo cual también es consecuencia del **Teorema de la divergencia** (14.20), pág.996, e implica el siguiente resultado.

Teorema de Gauss 10.42 *Si $u \in \mathcal{C}^1(U)$ es armónica en Ω, con $\overline{\Omega} \subset U$, entonces*

$$\int_{\partial\Omega} \partial_n u \; ds = 0.$$

Ejercicio 10.7.2 Demostrar que si denotamos con ∂_n el campo unitario normal exterior a las esferas centradas en el origen, entonces

$$\mathrm{vol}[S(0,r)] = \int_{S(0,r)} i_{\partial_n}\omega = r^{n-1}\int_{S(0,1)} i_{\partial_n}\omega = r^{n-1}\,\mathrm{vol}[S(0,1)].$$

Fórmula de representación de Green 10.43 *Sea u una función armónica en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, entonces para cada $x \in U$ y cada variedad con borde $C \subset U$, con $x \in V = \overset{\circ}{C}$ se tiene: para $n \geq 3$ y $v(x,y) = 1/\|x-y\|^{n-2}$*

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)\,\mathrm{vol}[S(0,1)]}\int_{\partial C}[v(\partial_n u) - u(\partial_n v)]\; ds,$$

y para $n = 2$ y $v = \log(1/\|x-y\|)$,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial C}[v(\partial_n u) - u(\partial_n v)]\; ds.$$

Demostración. (Haremos la demostración para $n \neq 2$). Sea $x \in U$ y $r > 0$ tal que $B[x,r] \subset V$ y consideremos una variedad con borde $\Omega = C\backslash B(x,r)$, con borde $\partial C \cup S(x,r)$. Ahora si ∂_n es el campo unitario y ortogonal exterior al borde, que en $S(x,r)$ apunta hacia el interior de la esfera y por tanto es $-H$, para

$$H = \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i - x_i}{\|x-y\|}\frac{\partial}{\partial y_i} \quad \left(\Rightarrow \quad Hv = \frac{2-n}{\|x-y\|^{n-1}}\right),$$

se sigue del Teorema de Gauss y de (10.14), por ser v armónica fuera de x, que

$$\begin{aligned}\int_{\partial C}[v(\partial_n u) - u(\partial_n v)]\,ds &= \int_{S(x,r)}[v(Hu) - u(Hv)]\,ds = \\ &= \frac{n-2}{r^{n-1}}\int_{S(x,r)} u\; ds \quad \Rightarrow \\ \frac{1}{(n-2)\,\mathrm{vol}[S(0,1)]}\int_{\partial C}[v(\partial_n u) - u(\partial_n v)]\,ds &= \\ &= \frac{1}{r^{n-1}\,\mathrm{vol}[S(0,1)]}\int_{S(x,r)} u\; ds \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}[S(x,r)]}\int_{S(x,r)} u\; ds \longrightarrow u(x),\end{aligned}$$

cuando $r \to 0$. ∎

Nota 10.44 Observemos que el resultado anterior dice que en dimension $n = 3$ toda función armónica u es

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial C} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)]\, ds,$$

suma de un potencial de capa simple en ∂C, de densidad $\partial_n u/4\pi$ y de un potencial de capa doble de momento $-u/4\pi$.

10.7.4. Teoremas del valor medio

Teorema del valor medio I 10.45 *El valor de una función armónica de un abierto U, en un punto, es el valor medio de la función sobre la superficie de una bola centrada en el punto que esté dentro de U.*

Demostración. Por el resultado anterior pues la primera expresión no depende de r, por tanto la última es constante en r. ∎

Teorema del valor medio II 10.46 *El valor de una función armónica de un abierto U, en un punto, es el valor medio de la función en una bola centrada en el punto, que esté dentro de U.*

Demostración. Es una simple consecuencia del resultado anterior unido a que para cualquier función f

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{B(x,r)} f\, \omega = \int_{S(x,r)} f\, i_{\partial_n} \omega.$$

demostrado en el ejercicio (11.4.1), pág.904, pues se tiene que

$$\begin{aligned} u(x) \frac{\partial}{\partial r} \int_{B(x,r)} \omega &= u(x) \int_{S(x,r)} i_{\partial_n} \omega \\ &= \int_{S(x,r)} u\, i_{\partial_n} \omega = \frac{\partial}{\partial r} \int_{B(x,r)} u\, \omega, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue integrando. ∎

Corolario. Teorema de Liouville 10.47 *Toda función armónica en $\mathbb{R}^n$ no negativa es constante.*

Demostración. Si m es la medida de Lebesgue y $m(B)$ la medida de la bola unidad, $m(B[x,r]) = r^n m(B)$ y por el resultado anterior se tiene

$$u(x) = \frac{1}{r^n m(B)} \int_{B(x,r)} u\, dm,$$

por tanto para $x \neq y$, $z = (x+y)/2$ y $A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &= \frac{1}{r^n m(B)} \Big| \int_{B(x,r)} u\, dm - \int_{B(y,r)} u\, dm \Big| \\
&= \frac{1}{r^n m(B)} \Big| \int_{B(x,r)\cap B(y,r)^c} u\, dm - \int_{B(y,r)\cap B(x,r)^c} u\, dm \Big| \\
&\leq \frac{1}{r^n m(B)} \int_{B(x,r)\Delta B(y,r)^c} u\, dm \\
&\leq \frac{1}{r^n m(B)} \int_{B(z,r+\|x-y\|)\setminus B(z,r-\|x-y\|)} u\, dm \\
&= \frac{u(z) m(B)((r+\|x-y\|)^n - (r-\|x-y\|)^n}{r^n m(B)}
\end{aligned}$$

$$= u(z) \left(\left(1 + \frac{\|x-y\|}{r}\right)^n - \left(1 - \frac{\|x-y\|}{r}\right)^n \right) \to 0 \quad \text{si } r \to \infty,$$

lo cual implica que $u(x) = u(y)$. ∎

Ejercicio 10.7.3 Principio del máximo. Demostrar como consecuencia del teorema del valor medio que si u es armónica en un abierto conexo U: (i) Si alcanza un máximo (ó mínimo) en U, entonces es constante. (ii) Que si U es acotado y $u \in \mathcal{C}(\overline{U})$, entonces u alcanza el máximo y el mínimo en ∂U (sin condiciones de regularidad).

Ejercicio 10.7.4 Demostrar que si U es un abierto acotado y $u \in \mathcal{C}(\overline{U})$, entonces para $S = \partial U$ arbitrario

$$\Delta u = 0, \quad \text{en } U, \quad u_{|S} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0.$$

Ejercicio 10.7.5 Problema de Dirichlet. (i) **Unicidad.** Demostrar que dada una función $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, para U abierto conexo acotado, si existe es única la función armónica en U, $u \in \mathcal{C}(\overline{U})$, que satisface $u = f$ en ∂U (sin condiciones de regularidad). (ii) **Dependencia continua.** Demostrar que si existe la solución u_i del Problema de Dirichlet para $f = f_i$ $(i = 1, 2)$, entonces para la norma infinito (del supremo) respectivamente en U y en $S = \partial U$, se tiene que

$$\|u_1 - u_2\|_{\infty,U} \leq \|f_1 - f_2\|_{\infty,S}.$$

Ejercicio 10.7.6 Demostrar que toda función armónica en $\mathbb{R}^n$ integrable es nula.

Ejercicio 10.7.7 Demostrar que si u es el potencial de una densidad de cargas $\rho \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^3)$ y $q = \int \rho$, es la carga total, entonces el valor medio de u en cualquier esfera de radio r que contenga toda la carga es q/r.

10.7.5. Recíproco del Teorema del valor medio

A continuación veremos que las funciones armónicas son las únicas que tienen la propiedad del valor medio, pero antes veremos unos resultados previos.

Si consideramos en $\mathbb{R}^n$ el campo de las homotecias $H = \sum x_i \partial_{x_i}$ y en el abierto denso A_n complementario del cerrado $C = \{x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$, las coordenadas hiperesféricas

$$\begin{aligned} F = (\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})\colon A_n \subset \mathbb{R}^n &\to (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi)^{n-2} \\ x_n &= \rho \cos\theta_{n-1}, \\ x_{n-1} &= \rho \cos\theta_{n-2} \operatorname{sen}\theta_{n-1}, \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ x_2 &= \rho \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cdots \operatorname{sen}\theta_{n-1}, \\ x_1 &= \rho \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cdots \operatorname{sen}\theta_{n-1}, \end{aligned}$$

para $\rho = \sqrt{\sum x_i^2}$, entonces $H\rho = \rho$ y $H\theta_i = 0$ (pues $Hx_n = x_n$, $H\rho = \rho$, por lo que $H\theta_{n-1} = 0$ y por inducción sabiendo que $Hx_i = x_i$). Por tanto $H = \rho\partial_\rho$ y $N = \partial_\rho = H/\rho$ es el campo unitario ortogonal exterior a las esferas centradas en el origen.

Denotaremos por $\phi = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})\colon S' = A_n \cap S_{n-1} \to (0,2\pi) \times (0,\pi)^{n-2}$ el difeomorfismo que nos da los ángulos correspondientes a los puntos de la esfera unidad. En cuyo caso $F(x) = (\rho, \phi(x/\rho))$

Proposición 10.48 *En los términos anteriores existe una única $n-1$–forma,*

$$\Theta_{n-1} = f(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_{n-1},$$

que sólo depende de las variables angulares θ_i, tal que para $\omega_n = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$,

$$i_N \omega_n = \rho^{n-1} \Theta_{n-1}, \qquad \omega_n = \rho^{n-1} d\rho \wedge \Theta_{n-1}.$$

Demostración. Definimos $\Theta_{n-1} = \rho^{1-n} i_N \omega_n$ (por la primera igualdad) y para ver que no depende de ρ basta demostrar que

$$i_N \Theta_{n-1} = 0, \qquad N^L \Theta_{n-1} = 0.$$

Lo primero es obvio y lo segundo, tomando $D = \rho^{1-n} N$ para el que $\operatorname{div} D = \sum (x_i/\rho^n)_{x_i} = 0$, se sigue pues

$$\begin{aligned} N^L \Theta_{n-1} &= N^L (i_D \omega_n) = i_N d(i_D \omega_n) + d(i_N (i_D \omega_n)) \\ &= i_N d(i_D \omega_n) = i_N (D^L \omega_n) = (\operatorname{div} D) i_N \omega_n = 0. \end{aligned}$$

La segunda igualdad del enunciado se sigue de que $d\rho \wedge \omega_n = 0$, por tanto

$$0 = i_N (d\rho \wedge \omega_n) = \omega_n - d\rho \wedge i_N \omega_n. \quad \blacksquare$$

En estos términos se tiene que en la esfera unidad $S_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, la medida estándar está dada por esta $n-1$–forma,

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \int_A i_N \omega_n = \int_A \rho^{n-1} \Theta_{n-1} = \int_A \Theta_{n-1} \\ &= \int_{\phi(A)} f(\theta) d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}, \end{aligned} \tag{10.16}$$

Corolario 10.49 *Para toda función g diferenciable*[7] *e integrable en $\mathbb{R}^n$,*

$$\int g(x) dx_1 \cdots dx_n = \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} g(\rho y) \rho^{n-1} \, d\sigma dr.$$

Demostración. Por el resultado anterior (10.48), tenemos para $g = F^*(\tilde{g})$, que

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &= \int_{A_n} g \omega_n = \int_{A_n} g \rho^{n-1} d\rho \wedge \Theta_{n-1} \\ &= \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)^{n-2}} \tilde{g} \rho^{n-1} f(\theta) d\rho d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} \\ &= \int_0^\infty \int_{S'} \tilde{g} \rho^{n-1} d\sigma \, d\rho. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

[7] Remitimos al lector interesado en este resultado en el contexto de Teoría de la Medida, a nuestros Apuntes de Teoría de la Medida.

Lema 10.50 *Toda función $u \in \mathcal{C}(\Omega)$, continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, que satisfaga la propiedad del valor medio en todo punto $x \in \Omega$, es decir que para todo $r > 0$, tal que $B[x,r] \subset \Omega$, satisfaga*

$$u(x) = \frac{1}{m_{n-1}[S(x,r)]} \int_{S(x,r)} u(y)\, dy,$$

es de clase ∞.

Demostración. Consideremos una función no negativa $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, con $\operatorname{sop} f \subset (-1,1)$ y $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(|x|)$, tal que $\int \varphi(x)\, dx = 1$ (esa integral sería un número positivo a y bastaría considerar f/a). Entonces $\operatorname{sop}\varphi \subset B[0,1]$ y para las funciones $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\varphi(\epsilon^{-1}x)$ de soporte $\operatorname{sop}\varphi_\epsilon \subset B[0,\epsilon]$ y por lo tanto la función en y, $\varphi_\epsilon(x-y)$ tiene el soporte en la bola $B[x,\epsilon]$, por lo tanto si consideramos $r > 0$ tal que $B[x,r] \subset \Omega$ y $\epsilon = r/2$, entonces para todo $p \in B(x,\epsilon)$, la función en y, $\varphi_\epsilon(p-y)$ tiene el soporte en la bola $B[p,\epsilon] \subset B[x,r]$, además

$$\begin{aligned}
u(p) &= u(p)\int \varphi(x)\, dx = u(p)\int_0^1 \left(\int_{S[0,1]} \varphi(ry) r^{n-1}\, dy\right) dr \\
&= u(p)\int_0^1 f(r) r^{n-1} m_{n-1}[S(0,1)]dr = \int_0^1 u(p) f(r) m_{n-1}[S(0,r)]\, dr \\
&= \int_0^1 u(p) f(r) \epsilon^{1-n} m_{n-1}[S(0,\epsilon r)]\, dr \\
&= \int_0^1 \left(\int_{S(0,\epsilon r)} \epsilon^{1-n} u(p-y)\, dy\right) f(r)\, dr \\
&= \int_0^1 \int_{S(0,1)} u(p-\epsilon r y) r^{n-1} f(r)\, dy dr = \int_{B(0,1)} u(p-\epsilon x)\varphi(x)\, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{B(0,\epsilon)} u(p-x)\varphi(\epsilon^{-1}x)\epsilon^{-n}\, dx = \int u(p-x)\varphi_\epsilon(x)\, dx \\
&= \int u(x)\varphi_\epsilon(p-x)\, dx,
\end{aligned}$$

y se puede derivar bajo el signo integral cuantas veces queramos pues $\varphi_\epsilon \in \mathcal{C}_c^\infty$ y el resultado es una función continua, por tanto u es de clase ∞. ∎

Teorema 10.51 *En los términos del Lema anterior toda función u continua que satisfaga la propiedad del valor medio en todo punto de su dominio abierto Ω, es armónica en él.*

Demostración. Por el resultado anterior u es de clase 2, por tanto basta demostrar que $\Delta u = 0$. Sea $p \in \Omega$ y $r' > 0$ tal que $B[p, r'] \subset \Omega$, entonces para $r \leq r'$ la propiedad del valor medio implica que

$$\int_{S[0,1]} u(p + ry)\, dy = r^{1-n} \int_{S[0,r]} u(p + y)\, dy = u(p) m_{n-1}(S[0, 1]),$$

por lo que se tiene para N el campo unitario exterior normal a las esferas centradas en p

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dr} \int_{S[0,1]} u(p + ry)\, dy = \int_{S[0,1]} \frac{\partial}{\partial r} u(p + ry)\, dy \\ &= \int_{S[0,1]} \sum y_i u_{x_i}(p + ry)\, dy = \int_{S[0,r]} \sum r^{-1} y_i u_{x_i}(p + y) r^{1-n}\, dy \\ &= r^{1-n} \int_{S[p,r]} Nu(y)\, dy = r^{1-n} \int_{B[p,r]} \Delta u(x)\, dx, \end{aligned}$$

y como esto es cierto para todo punto p y toda bola tendremos $\Delta u = 0$. ∎

10.7.6. Regularidad de las funciones armónicas

A continuación demostraremos que toda función armónica es analítica real.

Lema 10.52 *Si u es armónica en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ en el que está acotada $|u(x)| \leq C$, entonces para cada $x \in U$*

$$|D^\alpha u(x)| \leq C \left(\frac{n}{\delta}\right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|},$$

para $\delta = \min\{\|x - y\| : y \in \partial U\} = d(x, U^c)$.

Demostración. Lo haremos por inducción en $|\alpha|$. Para $|\alpha| = 1$ sea $r < \delta$ y apliquemos el teorema del valor medio a la función armónica u_{x_i}

$$\begin{aligned} u_{x_i}(x) &= \frac{1}{\operatorname{vol}[B(x,r)]} \int_{B(x,r)} u_{x_i}\omega \\ &= \frac{1}{r^n \operatorname{vol}[B(0,1)]} \int_{B(x,r)} \frac{\partial}{\partial x_i}^{L} (u\omega) \\ &= \frac{1}{r^n \operatorname{vol}[B(0,1)]} \int_{S(x,r)} i_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(u\omega) \\ &= \frac{1}{r^n \operatorname{vol}[B(0,1)]} \int_{S(x,r)} u < \frac{\partial}{\partial x_i}, \partial_n > i_{\partial_n}\omega, \end{aligned}$$

ahora por el ejercicio (11.4.1), pág.904, tenemos que

$$\begin{aligned} |u_{x_i}(x)| &\leq \frac{1}{r^n \operatorname{vol}[B(0,1)]} \int_{S(x,r)} |u| i_{\partial_n}\omega \\ &\leq \frac{C}{r^n \operatorname{vol}[B(0,1)]} n r^{n-1} \operatorname{vol}[B(0,1)] = C\left(\frac{n}{r}\right), \end{aligned}$$

y como esto es cierto para todo $r < \delta$ el resultado se sigue.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para todo $|\beta| = k-1$, con $k \geq 2$ y demostrémoslo para $|\beta| = k$, para ello consideremos $r < \delta = d(x, U^c)$, un $|\beta| = k-1$ y un $y \in B[x, r/k]$, entonces la distancia $\delta_y = d(y, U^c) \geq r - r/k$ y por la hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned} |D^\beta u(y)| &\leq C\left(\frac{n}{\delta_y}\right)^{|\beta|} |\beta|^{|\beta|} \\ &\leq C\left(\frac{nk}{(k-1)r}\right)^{k-1} (k-1)^{k-1} = C\left(\frac{nk}{r}\right)^{k-1}, \end{aligned}$$

y aplicando de nuevo el teorema del valor medio como en la primera parte, en la $B[x, r/k]$, tendremos que

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} D^\beta u(x)\right| \leq C\left(\frac{nk}{r}\right)^{k-1} \left(\frac{n}{r/k}\right) = C\left(\frac{n}{r}\right)^k k^k,$$

y como esto es cierto para todo $r < \delta$ el resultado se sigue. ∎

Teorema 10.53 *Si u es una función armónica en un abierto U, entonces $u \in \mathcal{C}^\omega(U)$.*

Demostración. Por nuestro teorema de caracterización de las funciones analíticas, basta demostrar que para cada compacto $K \subset U$ existen constantes $M, r > 0$ tales que para todo multiíndice α y $x \in K$

$$|D^\alpha u(x)| \leq M r^{-|\alpha|} |\alpha|!.$$

Ahora bien se sigue de la FÓRMULA DE STIRLING que existe una constante $k > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$m^m \leq k\, \mathrm{e}^m\, m!,$$

por lo tanto se sigue del lema anterior que tomando

$$M = Ck, \qquad r = \frac{d(K, U^c)}{\mathrm{e} \cdot n},$$

se tiene en K que

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x)| &\leq C \left(\frac{n}{d(K, U^c)} \right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|} \\ &\leq C \left(\frac{n}{d(K, U^c)} \right)^{|\alpha|} k\, \mathrm{e}^{|\alpha|}\, |\alpha|! \\ &= M r^{-|\alpha|} |\alpha|!. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

10.7.7. Teorema de Picard

Como consecuencia de (10.43) también podemos demostrar el siguiente resultado sobre potenciales Newtonianos–Electrostáticos.

Teorema de Picard 10.54 *Si u es una función armónica en un abierto $U = \mathbb{R}^3 \backslash \{p_1, \ldots, p_n\}$ satisfaciendo*

$$\lim_{\|x - p_i\| \to 0} u(x) = \infty, \quad \acute{o} = -\infty,$$

y que existe un $\lambda_0 > 0$, tal que para cada $p \in \mathbb{R}^3$, con $\|p\| = 1$, la función $u(p_i + \lambda^{-1} p)$ es estrictamente creciente (ó decreciente) en $\lambda \geq \lambda_0$. Entonces en U

$$u(x) = \frac{q_1}{r_1} + \cdots + \frac{q_n}{r_n} + v(x),$$

con v armónica en $\mathbb{R}^3$ las $q_i \in \mathbb{R}$ y $r_i(x) = \|x - p_i\|$.

Demostración. De la hipótesis se sigue que para todo $M > 0$, existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$\|y - p_i\| \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad u(y) \geq M, \quad \text{ó} \quad u(y) \leq -M,$$

y diremos que el punto p_i es "*positivo*" en el primer caso y "*negativo*" en el segundo.

Sea $x \in U$ y consideremos un $r > \|x\|$ y un $\delta < \|x - p_i\|$ tales que

$$B = \cup_{i=1}^n B(p_i, \delta) \subset \cup_{i=1}^n B[p_i, \delta] \subset B(0, r),$$

ahora consideremos el máximo M_r de $|u|$ en $B[0, r] \backslash B$ (el cual se alcanza en el borde) y para $M > M_r$ consideremos las n superficies

$$S_i = \{y \in B[p_i, \delta] \colon \ u(y) = M\},$$

(si p_i es positivo y $\ldots u(y) = -M$ si es negativo). Tales superficies son el borde de $\{y \in B[p_i, \delta] \colon u(y) \geq M\}$, que contiene a p_i en su interior. Consideremos el dominio C limitado por las superficies $S(0, r)$ y las S_i, en cuyo interior está x y apliquemos el teorema (10.43), tendremos por tanto que

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial C} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] \, ds \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S(0,r)} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] \, ds + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \int_{S_i} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] \, ds, \end{aligned}$$

donde $v(y) = 1/\|x - y\|$. Ahora derivando el primer sumando

$$\bar{u}(x) = \int_{S(0,r)} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] \, ds,$$

respecto de las x_i y observando que en el integrando ni u ni $\partial_n u$ dependen de x, vemos que es una función armónica en $\{\|x\| \neq r\}$, además que no depende de r por la segunda identidad de Green (10.13) ya que $\Delta u = \Delta v = 0$ en $\{r \leq \|x\| \leq r'\}$, por tanto $\bar{u}$ es armónica en $\mathbb{R}^3$. El otro sumando, por ser $u = cte$ y el teorema de Gauss es

$$\int_{S_i} [v(\partial_n u) - u(\partial_n v)] \, ds = \int_{S_i} v(\partial_n u) \, ds,$$

ahora como $S_i \to \{p_i\}$ cuando $M \to \infty$ y por el teorema de Gauss la $\int_{S_i} \partial_n u \; ds = k_i$ no depende de M, pues u es armónica entre dos superficies S_i del punto p_i, correspondientes a dos valores de M, tendremos que

$$\lim_{M\to\infty} \int_{S_i} v(\partial_n u) \; ds = v(p_i)k_i = \frac{k_i}{\|x - p_i\|},$$

y para $q_i = k_i/4\pi$ se sigue el resultado. ∎

Corolario 10.55 *En las condiciones anteriores si además u se anula en el infinito, es decir $\lim_{\|x\|\to\infty} u(x) = 0$, entonces $v = 0$ y*

$$u(x) = \frac{q_1}{r_1} + \cdots + \frac{q_n}{r_n}.$$

Demostración. Es un simple ejercicio. ∎

10.8. Armónicos esféricos

Veamos de donde salen los polinomios homogéneos armónicos que hemos visto en (10.39), pág.808 y en (10.40), pág.813.

Sea $\mathcal{P}_k$ el espacio de los polinomios homogéneos de grado k en $\mathbb{R}^n$ y sea

$$\mathcal{H}_k = \{u \in \mathcal{P}_k : \Delta u = 0\}, \qquad H_k = \{u_{|S} : u \in \mathcal{H}_k\}$$

es decir los polinomios homogéneos armónicos y su restricción a la esfera unidad. A estos últimos los llamamos *armónicos esféricos* de grado k. La aplicación restricción de $\mathcal{H}_k \to H_k$ es isomorfismo pues tiene inversa que es

$$\overline{u} \to u(x) = |x|^k \overline{u}\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Ahora para $r^2 = \sum x_i^2 \in \mathcal{P}_2$ se tiene el siguiente resultado.

Proposición 10.56 $\mathcal{P}_k = \mathcal{H}_k \oplus r^2\mathcal{P}_{k-2}$.

Demostración. Consideremos el siguiente producto escalar en $\mathcal{P}_k$, para $P, Q \in \mathcal{P}_k$, $P = \sum c_\alpha x^\alpha$ y $D_P = \sum c_\alpha D^\alpha$

$$< P, Q >= D_P(Q) \in \mathbb{R},$$

obviamente es lineal en cada componente, y para $P = x^\alpha$, $Q = x^\beta$, se tiene (ver el ejercicio (8.2.2), pág.620)

$$< x^\alpha, x^\beta >= D^\alpha x^\beta = \begin{cases} \alpha!, & \text{si } \beta = \alpha \\ 0, & \text{si } \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

por tanto en general,

$$< \sum c_\alpha x^\alpha, \sum d_\alpha x^\alpha >= \sum \alpha! c_\alpha d_\alpha,$$

y es un producto interior. Por último se tiene que si $P \in \mathcal{P}_{k-2}$ y $Q \in \mathcal{H}_k$, entonces

$$< r^2 P, Q >=< P, \Delta Q >,$$

y Q es ortogonal a todos los $r^2 P$ sii es armónica, lo cual significa que $r^2 \mathcal{P}_{k-2}$ tiene como complemento ortogonal a $\mathcal{H}_k$, ahora basta considerar para cada elemento de $\mathcal{P}_k$ su proyección ortogonal en $r^2 \mathcal{P}_{k-2}$ y su diferencia está en $\mathcal{H}_k$. ∎

Corolario 10.57

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{H}_k \oplus r^2 \mathcal{H}_{k-2} \oplus r^4 \mathcal{H}_{k-4} \oplus \cdots$$

Corolario 10.58 *La restricción a la esfera unidad de un polinomio homogéneo de grado k es una suma de polinomios homogéneos armónicos de grados $k - 2i$.*

Lema de Euler 10.59 *Para $H \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ el campo de las homotecias y $f \in \mathcal{P}_k$, $Hf = kf$.*

Demostración. Basta derivar respecto de t, en $t = 1$, en la igualdad $f(tx) = t^k f(x)$. ∎

Teorema 10.60 *Sea S la esfera unidad de $\mathbb{R}^n$, entonces $L_2(S) = \oplus_{k=0}^{\infty} H_k$, donde la suma directa es ortogonal respecto del producto escalar de $L_2(S)$.*

Demostración. Por (10.58) y el Teorema de aproximación de Weierstrass (ver FOLLAND), el subespacio generado por los armónicos esféricos es denso en $L_2(S)$. Basta demostrar que si $f_j \in H_j$ y $f_k \in H_k$, entonces $< f_j, f_k >_{L_2(S)}= 0$. Sean $F_j \in \mathcal{H}_j$ y $F_k \in \mathcal{H}_k$ respectivamente sus extensiones armónicas, entonces por la segunda identidad de Green, el Lema

de Euler y para B la bola unidad centrada en el origen y S la esfera, como $H = \partial_n$ para la esfera

$$0 = \int_B (F_j\,\Delta F_k - F_k\,\Delta F_j) = \int_S (F_j(HF_k) - F_k(HF_j)$$
$$= (j-k)\int_S f_k f_j. \quad \blacksquare$$

10.9. Principio de Dirichlet

En los términos de la lección 10.7.2, se tiene.

Definición. Llamamos *integral de Dirichlet* en Ω de una función u a

$$I(u) = \int_\Omega < \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u > \omega.$$

El siguiente resultado establece que si entre todas las funciones v definidas en un abierto Ω, que coinciden en $\partial\Omega$, hay alguna armónica, esta alcanza el mínimo de las integrales de DIRICHLET, $I(v)$.

Principio de Dirichlet 10.61 *Si $\Delta u = 0$ y $u = v$ en $\partial\Omega$, entonces*

$$I(u) \le I(v).$$

Demostración. En primer lugar tenemos como consecuencia de la ecuación (10.12), pág.814, que si u es armónica y $u - v = 0$ en $\partial\Omega$, entonces

$$\int_U < \operatorname{grad}(u-v), \operatorname{grad} u > \omega = 0,$$

lo cual implica que $I(u) = \int_U < \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u > \omega$ y por tanto

$$0 \le I(u-v) = I(u) - 2\int_U < \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u > \omega + I(v)$$
$$= I(v) - I(u). \quad \blacksquare$$

Por otra parte observemos que nuestro funcional $I(u)$ corresponde al problema variacional definido por la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n) = \sum z_i^2,$$

pues queremos minimizar

$$I(u) = \int_\Omega < \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u > \omega = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right] \omega = \int_U \mathcal{L}(x_i; u_{x_i}) \omega$$

y la Ecuación de Euler–Lagrange correspondiente es precisamente la Ecuación de LaPlace,

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L}_{z_i}(x_i, u_{x_i}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum u_{x_i x_i} = 0.$$

por tanto si el mínimo se alcanza en una función u, esta satisface la ecuación de Euler-Lagrange, por tanto la de LaPlace y u es armónica.

Por otra parte observemos que entre las funciones de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ podemos definir un producto interior

$$u \cdot v = \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v,$$

si identificamos funciones que difieran en una constante, pues

$$0 = u \cdot u = \int |\operatorname{grad} u|^2 \quad \Rightarrow \quad u_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = cte.$$

En estos términos nuestro problema original consistente en encontrar (para $S = \partial\Omega$), la solución de

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \qquad u_{|S} = f,$$

para una función dada $f \in \mathcal{C}^1(S)$, se reduce a considerar el subespacio afín

$$\mathbb{A} = \{\overline{u} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) : \overline{u}_{|S} = f\},$$

y el subespacio (dirección del anterior)

$$\mathcal{V} = \{\overline{u} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) : \overline{u}_{|S} = 0\},$$

para los que $\mathbb{A} = \overline{u}_0 + \mathcal{V}$, para cualquier $\overline{u}_0 \in \mathbb{A}$; y para ellos encontrar el $u \in \mathbb{A}$ de mínima norma

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 \, dx.$$

Si nuestro espacio prehilbertiano, en el que hemos definido el producto interior, fuese completo y nuestro subespacio cerrado, el problema estaría resuelto. Pero no es así y el problema debemos afrontarlo de otro modo.

10.10. Introducción a las distribuciones

Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y consideremos el espacio de las funciones en U de clase infinito y soporte compacto

$$\mathcal{C}_c^\infty(U) = \{f \colon U \to \mathbb{R} : \ f \in \mathcal{C}^\infty(U), \ \operatorname{sop} f \text{ compacto}\},$$

el cual tiene una estructura topológica natural, pues si consideramos para cada compacto $K \subset U$,

$$\mathcal{C}_0^\infty(K) = \{f \in \mathcal{C}_c^\infty(U), \ \operatorname{sop} f \subset K\},$$

en el que consideramos la topología de la convergencia uniforme de las funciones y de todas sus derivadas (ver pág.8), en cuyos términos

$$\mathcal{C}_c^\infty(U) = \cup_{K \subset U} \mathcal{C}_0^\infty(K) = \varinjlim \mathcal{C}_0^\infty(K),$$

con la topología límite inductivo.

Definición. Llamamos *distribución* (en el sentido de Analisis Funcional) a todo funcional lineal y continuo en este espacio

$$\Phi \colon \mathcal{C}_c^\infty(U) \to \mathbb{R}.$$

Denotamos con $\mathcal{D}(U)$ el espacio de las distribuciones.

Ejemplo 10.10.1 Sea $h \in \mathcal{C}(U)$ ó $h \in \mathcal{L}^1(U)$, entonces

$$h\colon \mathcal{C}_c^\infty(U) \to \mathbb{R}, \qquad h(\rho) = \int_U \rho \cdot h \, dx,$$

es una distribución. Esto nos induce a dar la siguiente definición.

Definición. Dada una distribución $\Phi \in \mathcal{D}(U)$, para cada $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ denotaremos

$$\Phi(\rho) = \int_U \rho \cdot \Phi \, dx.$$

Ejemplo 10.10.2 Con esta notación tendremos que la *medida de Dirac en y* δ_y, que es la distribución $\delta_y(\rho) = \rho(y)$, satisface

$$\rho(y) = \int_U \rho \cdot \delta_y \, dx.$$

Ejemplo 10.10.3 Del mismo modo para $r(x) = \|x - y\|$, e $y \in U$, no está definida $1/r$ en U como función, pero si como distribución siendo

$$\int_U \rho \cdot \frac{1}{r} \, dx = u(y),$$

para u la función potencial de densidad de carga ρ.

Ahora si f ó $g \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ entonces

$$\int_U f g_{x_i} \, dx = -\int_U f_{x_i} g \, dx,$$

esto justifica la siguiente definición.

Definición. Dada una distribución Φ definimos su *derivada parcial* respecto de x_i como la distribución que sobre cada $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ vale

$$\Phi_{x_i}(\rho) = \int_U \rho \Phi_{x_i} \, dx = -\int_U \rho_{x_i} \Phi \, dx = -\Phi(\rho_{x_i}).$$

Por tanto una distribución es infinitamente diferenciable y para todo operador diferencial lineal P de orden m

$$P(\Phi)(\rho) = \int_U \rho P(\Phi) \, dx = (-1)^m \int_U P(\rho)\Phi \, dx = (-1)^m \Phi[P(\rho)],$$

en particular para el operador de Laplace

$$\Delta(\Phi)(\rho) = \int_U \rho \Delta(\Phi) \, dx = \int_U \Delta(\rho)\Phi \, dx = \Phi[\Delta(\rho)].$$

Lema 10.62 *Para $y \in U$ y $r(x) = \|x - y\|$, como distribución se tiene*

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta_y.$$

Demostración. Es consecuencia de (10.33) y de (10.10.2) pues si $u \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ tendremos que u es el potencial de $\rho = -\Delta u/4\pi$ y

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{1}{r}\right)(u) &= \int_U u \cdot \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dx = \int_U \frac{\Delta u}{r}\, dx \\ &= -4\pi u(y) = -4\pi\delta_y(u). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Esta propiedad es útil para comprobar ciertas igualdades, como la fórmula integral de Green, pues si utilizamos la segunda igualdad de Green (ver pág.815), que es válida para distribuciones, tendremos que para $v = 1/r$

$$\int_\Omega \left(\frac{\Delta u}{r} - u\Delta\frac{1}{r}\right) dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial_n u}{r} - u\partial_n\frac{1}{r}\right) ds,$$

lo cual implica

$$4\pi u(y) + \int_\Omega \frac{\Delta u}{r} = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial_n u}{r} - u\partial_n\frac{1}{r}\right) ds,$$

10.10.1. Método de la función de Green

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado con $S = \partial\Omega$ una superficie diferenciable de clase 1 y consideremos un punto $y \in \Omega$.

Definición. Llamamos *Función de Green* relativa al punto y a una función $g_y \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}\backslash\{y\})$, que cumple

1.- $g_y(x) = \frac{1}{\|x-y\|} + v$, para $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ una función armónica en Ω.
2.- $g_{y|S} = 0$.

La cuestión es si tal función existe y si existe si es única.

Unicidad de la función de Green. Observemos que su existencia equivale a la existencia de la función v solución del problema de Dirichlet particular

$$\Delta v = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \qquad v_{|S} = -\frac{1}{\|x - y\|},$$

la cual ya sabemos que de existir es única, lo cual prueba la unicidad de la función de Green.

Existencia de la función de Green (punto de vista Físico). Ahora la existencia de tal función, Green la obtuvo con los siguientes argumentos de naturaleza Física:

Consideremos el exterior de Ω como un conductor y en el punto y consideremos una carga $q = 1$. El campo electrostático producido por la carga mueve los electrones del conductor hasta un momento en el que se quedan quietos y se produce una distribución de cargas en el borde S, que junto con la carga en y produce un campo $E = -\operatorname{grad} u$, que en el conductor es nulo, por lo tanto el potencial es constante y es nulo pues las cargas están acotadas, por tanto el potencial se anula en el infinito. El potencial está producido por una carga puntual y por una distribución de carga en S de capa simple, es decir

$$u = \frac{1}{r} + v,$$

para v el potencial de capa simple, el cual es armónico fuera de S, en particular en Ω y u se anula en Ω^c, en particular en S. Por lo tanto este potencial $u = g_y$ es la función de Green.

Esto no es una demostración (matemática) pero si es una justificación que nos convence de la veracidad del teorema de existencia.

Observemos que de existir tal función de Green verifica en términos de distribuciones que

$$\Delta g_y = \Delta \frac{1}{r} + \Delta v = -4\pi\delta_y,$$

además de existir esta solución particular del Problema de Dirichlet, lo podemos resolver en general, pues:

1.- **Problema de Dirichlet. Caso homogéneo.-** Dada $f \in \mathcal{C}(S)$, buscamos $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, tal que

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \qquad u_{|S} = -4\pi f.$$

Si u existe tendremos por la segunda identidad de Green (ver pág.815),

para $v = g_y$ que

$$\int_\Omega (g_y \Delta u - u \Delta g_y)\, dx = \int_S (g_y \partial_n u - u \partial_n g_y)\, ds,$$

$$-\int_\Omega u \Delta g_y\, dx = 4\pi \int_S f \partial_n g_y\, ds,$$

$$u(y) = \int_S f \partial_n g_y\, ds, \tag{10.17}$$

que es la **Fórmula integral de Poisson**.

2.- **Problema de Dirichlet. Caso no homogéneo.-** Dada $f \in \mathcal{C}(S)$ y $\rho \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, buscamos $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, tal que

$$\Delta u = -4\pi\rho \quad \text{en} \quad \Omega, \qquad u_{|S} = -4\pi f.$$

De nuevo si u existe tendremos por la segunda identidad de Green, para $v = g_y$ que

$$\int_\Omega (g_y(-4\pi\rho) - u \Delta g_y)\, dx = -\int_S u \partial_n g_y\, ds,$$

$$u(y) = \int_\Omega g_y \rho\, dx + \int_S f \partial_n g_y\, ds, \tag{10.18}$$

El método combinado de la función de Green y las distribuciones muestra su extraordinaria eficacia al ofrecernos una definición para la única candidata que resuelve el problema de Dirichlet (dada respectivamente por las ecuaciones (10.17) y (10.18)). La cuestión que resta es demostrar que esta función "señalada" realmente satisface las propiedades. La de que u es armónica en el caso homogéneo la veremos mas adelante, pero antes necesitamos demostrar que la función de Green es simétrica.

Proposición 10.63 *Sean $y, z \in \Omega$, entonces*

$$g_y(z) = g_z(y).$$

Demostración. (Por distribuciones) Usemos la segunda identidad de Green para $v = g_y$ y $u = g_z$

$$\int_\Omega (g_y \Delta g_z - g_z \Delta g_y)\, dx = \int_S (g_y \partial_n g_z - g_z \partial_n g_y)\, ds = 0$$

lo cual implica que $g_y(z) = g_z(y)$.

(Demostración clásica) Tomemos dos bolas B_y y B_z, centradas en y y z de radio pequeño ϵ y sean S_y y S_z sus esferas. Consideremos la región $\Omega' = \Omega \backslash (B_y \cup B_z)$ y apliquemos la segunda identidad de Green para $v = g_y$ y $u = g_z$

$$\int_{\Omega'} (g_y \Delta g_z - g_z \Delta g_y)\, dx = \int_{S'} (g_y \partial_n g_z - g_z \partial_n g_y)\, ds,$$

ahora como en Ω', $\Delta g_z = \Delta g_y = 0$ y en S, $g_y = g_z = 0$,

$$\int_{S_y \cup S_z} g_y \partial_n g_z \, ds = \int_{S_y \cup S_z} g_z \partial_n g_y) \, ds$$

y basta desarrollar uno de los dos lados. Si $g_y = 1/r_y + v$ tendremos que

$$\begin{aligned} \int_{S_y} g_y \partial_n g_z \, ds &= \int_{S_y} \left(\frac{1}{r_y} + v \right) \partial_n g_z \, ds \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_{S_y} \partial_n g_z \, ds + \int_{S_y} v \partial_n g_z \, ds \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_{B_y} \Delta g_z \, dx + \int_{S_y} v \partial_n g_z \, ds = 0 \end{aligned}$$

el primer sumando es nulo por ser g_z armónica en B_y y el segundo porque $v \sim v(y)$ en B_y y como antes

$$\int_{S_y} \partial_n g_z \, ds = \int_{B_y} \Delta g_z \, dx = 0$$

y desarrollando lo que falta como en S_z, $g_y \to g_y(z)$ cuando $\epsilon \to 0$, se tiene que

$$\int_{S_z} g_y \partial_n g_z \, ds = 4\pi g_y(z),$$

pues la integral $\int_{S_z} \partial_n g_z \, ds$ es constante en ϵ, (por el teorema de Gauss) pues entre dos esferas centradas en z de radios $\epsilon' < \epsilon$, la g_z es armónica y vale, para $g_z = 1/r_z + w$ y ∂_n el campo normal unitario interior de la esfera centrada en z, por tanto $\partial_n(1/r_z) = 1/r_z^2$ y

$$\int_{S_z} \partial_n \left(\frac{1}{r_z} + w \right) \, ds = \frac{1}{\epsilon^2} m_2[S_z] + \int_{S_z} \partial_n w \, ds = 4\pi,$$

pues w es armónica en B_z. ∎

Ahora como para cada $y \in \Omega$, $g_y \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}\backslash\{y\})$ y acabamos de ver que $g_y(z) = g_z(y)$, podemos definir g_y para todo $y \in \overline{\Omega}$ y en definitiva para la diagonal $D = \{(y,z) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} : y = z\}$, definimos la que también llamaremos *función de Green*

$$G\colon (\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})\backslash D \to \mathbb{R}, \qquad G(y,z) = g_y(z),$$

para la que fijado z, $g_y(z) = g_z(y) = (1/\|z-y\|) + v$ es armónica en $y \in \Omega\backslash\{z\}$ y se sigue el siguiente resultado.

Corolario 10.64 *La función de la Fórmula integral de Poisson*

$$u(y) = \int_S f \partial_n g_y \, ds,$$

encontrada en el primer problema de Dirichlet, es armónica.

Demostración. Se sigue de lo anterior y de que $\Delta_y \partial_n g_y = \partial_n(\Delta_y g_y) = 0$. ∎

En cuanto a la segunda condición, de que $u_{|S} = -4\pi f$, es mas difícil y la veremos en dos casos particulares: cuando Ω es el semiespacio y cuando es una bola de radio r.

Ejemplo 10.10.4 Problema de Dirichlet para el semiespacio. Consideremos en $\mathbb{R}^3$, $\Omega = \{x_3 > 0\}$ y $S = \partial\Omega = \{x_3 = 0\}$, aunque se sale fuera de los casos considerados pues Ω no es un abierto acotado (por ejemplo no hay unicidad en el problema

$$\Delta u = 0, \quad \text{en} \quad \Omega, \qquad u_{|S} = 0,$$

pues lo satisface tanto $u = 0$ como $u = x_3$).

No obstante busquemos la función de Green correspondiente, para cada $y \in \Omega$

$$g_y(x) = \frac{1}{\|x-y\|} + v(x),$$

para v armónica en Ω y $g_{y|S} = 0$. Para ello seguiremos el **método de las imágenes**, que consiste en considerar una carga $q = 1$ en el punto y cuyo potencial es $1/\|x-y\|$ y considerar otra carga en un lugar adecuado (fuera de Ω para que sea armónica en Ω), de modo que su potencial anule al anterior en los puntos de S. Para ello basta considerar

en $\overline{y} = (y_1, y_2, -y_3)$ otra carga igual y de signo contrario $q' = -1$, el potencial conjunto de ambas cargas es

$$g_y(x) = \frac{1}{\|x-y\|} - \frac{1}{\|x-\overline{y}\|}$$

pues obviamente $\|x-y\| = \|x-\overline{y}\|$ para todo $x \in S$ y $v(x) = 1/\|x-\overline{y}\|$ es armónica en Ω.

Ahora consideremos la solución sugerida por Green: Consideremos que Ω^c es un conductor, cuyos electrones, en presencia de la carga $q = 1$ en el punto y, comienzan a moverse hasta que dejan de moverse debido a que se acumulan en el borde definiendo una densidad de carga ρ en S que conjuntamente con q definen un potencial u que en Ω^c define una fuerza electrostática nula $E = -\operatorname{grad} u = 0$, por lo que $u = cte$ en Ω^c y como la carga está en el punto y y en S, cuando $x_3 \to \infty$ el potencial $u(x) \to 0$, por lo que la constante es 0. De este modo el potencial es suma del potencial debido a la carga q mas v, el potencial de capa simple definido por la densidad de carga ρ

$$u(x) = \frac{1}{\|x-y\|} + v(x) = \begin{cases} g_y, & \text{en } x_3 > 0 \\ 0, & \text{en } x_3 \leq 0 \end{cases}$$

Veamos cual es el valor de esa densidad de carga. Para ello apliquemos la fórmula,

$$\partial_n u^+ - \partial_n u^- = \partial_n v^+ - \partial v^- = -4\pi\rho,$$

lo cual implica, al ser $\partial_n = \partial_{x_3}$, $u^+ = g_y$ y $u^- = 0$, que

$$\partial_{x_3} g_y = \partial_{x_3} u^+ - \partial_{x_3} u^- = -4\pi\rho,$$

por tanto (como en los $x \in S$, $\|x-y\| = \|x-\overline{y}\|$)

$$-4\pi\rho(x) = \partial_{x_3}\left(\frac{1}{\|x-y\|} - \frac{1}{\|x-\overline{y}\|}\right) = \frac{2y_1}{\|x-y\|^3},$$

y la densidad de carga es

$$\rho(x) = -\frac{y_3}{2\pi\|x-y\|^3}.$$

Podemos calcular la carga total en el plano S, de coordenadas $x =$

(x_1, x_2)

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho(x)\, dx_1 dx_2 = \int \rho(x_1 + y_1, x_2 + y_2))\, dx_1 dx_2 = -\int \frac{y_3}{2\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_3^2}^3}$$
$$= -\frac{y_3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{r}{\sqrt{r^2 + y_3^2}^3}\, dr d\theta = -1,$$

pues la integral tiene la primitiva $-1/\sqrt{r^2 + a^2}$.

Por último veamos que la fórmula integral de Poisson para el semiespacio, que nos define la candidata a resolver el problema de Dirichlet, realmente es solución.

Proposición 10.65 *Dada una función acotada $f \in \mathcal{C}(S)$, la fórmula integral de Poisson para $y \in \Omega$, es decir $y_3 > 0$ y $\partial_n = -\partial_{x_3}$*

$$u(y) = \int_S f(y)\partial_n g_y\, ds = -2y_3 \int_S \frac{f(x)}{\|x - y\|^3}\, dx_1 dx_2,$$

es la solución continua en el semiespacio del problema de Dirichlet, $\Delta u = 0$ en $y_3 > 0$, $u_{|S} = -4\pi f$.

Demostración. La primera propiedad la hemos visto en (10.64). Para la segunda tenemos que demostrar que para cada $x_0 = (a, b, 0) \in S$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ con $y_3 > 0$

$$\lim_{y \to x_0} u(y) = -4\pi f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{y \to x_0} \int_S \frac{y_3 f(x)}{\|x - y\|^3}\, dx_1 dx_2 = 2\pi f(x_0),$$

para ello recordemos que acabamos de demostrar que

$$\int_S \frac{y_3}{\|x - y\|^3}\, dx_1 dx_2 = 2\pi,$$

y del mismo modo para cada bola del plano S, de centro $\overline{y} = (y_1, y_2)$ y radio δ,

$$\int_{B[\overline{y},\delta]^c} \frac{y_3}{\|x - y\|^3}\, dx_1 dx_2 = \int_{B[\overline{y},\delta]^c} \frac{y_3}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + y_3^2}^3}\, dx_1 dx_2$$
$$= y_3 \int_0^{2\pi}\int_{\delta}^{\infty} \frac{r}{\sqrt{r^2 + y_3^2}^3}\, dr d\theta = 2\pi \frac{y_3}{\sqrt{\delta^2 + y_3^2}},$$

la cual converge a 0 cuando $y_3 \to 0$ y por tanto cuando $y \to x_0$. Además por lo mismo como f es acotada tendremos que

$$\lim_{y\to x_0} \int_{B[\overline{y},\delta]^c} \frac{f(x)y_3}{\|x-y\|^3}\, dx_1 dx_2 = 0,$$

por lo tanto si consideramos una bola $B_\epsilon = B[x_0,\epsilon] \subset S$, un $y \in \Omega$ tal que $\|y - x_0\| < \epsilon/2$ y $\delta = \epsilon/2$ tal que en S, $B[\overline{y},\delta] \subset B[x_0,\epsilon]$, como

$$\begin{aligned}\int_S \frac{y_3 f(x)}{\|x-y\|^3}\, dx_1 dx_2 &= \int_{B_\epsilon} \frac{y_3 f(x)}{\|x-y\|^3}\, dx_1 dx_2 + \\ &\quad + \int_{B_\epsilon^c} \frac{y_3 f(x)}{\|x-y\|^3}\, dx_1 dx_2, \\ 2\pi f(x_0) = \int_S \frac{y_3 f(x_0)}{\|x-y\|^3}\, dx_1 dx_2 &= \int_{B_\epsilon} \frac{y_3 f(x_0)}{\|x-y\|^3}\, dx_1 dx_2 + \\ &\quad + \int_{B_\epsilon^c} \frac{y_3 f(x_0)}{\|x-y\|^3}\, dx_1 dx_2\end{aligned}$$

y como en la derecha, las segundas integrales convergen a cero cuando $y \to x_0$, pues $B[x_0,\epsilon]^c \subset B[\overline{y},\delta]^c$, basta ver que la diferencia entre las primeras converge a cero si hacemos tender $\epsilon \to 0$, por la continuidad de f. ∎

Ejemplo 10.10.5 Problema de Dirichlet para la bola. Consideremos ahora $\Omega = B(0,r) = \{\|x\| < r\}$ y $S = \{\|x = r\}$ y busquemos la función de Green correspondiente para cada $y \in \Omega$

$$g_y(x) = \frac{1}{\|x-y\|} + v(x),$$

para v armónica en Ω y $g_{y|S} = 0$. Para ello seguimos otra vez el **método de las imágenes**, que en este caso consiste en considerar una carga $q = 1$ en el punto y cuyo potencial es $1/\|x-y\|$ y considerar otra carga en un lugar adecuado (fuera de Ω para que sea armónica en Ω), de modo que su potencial anule al anterior en los puntos de S. Esto lo hemos visto en el ejercicio (10.4.1), pág.776 y el punto adecuado es

$$\overline{y} = \frac{r^2}{|y|^2} y,$$

la imagen de y por la inversión respecto de la esfera y la carga en ese punto que hay que considerar es $q' = -|\overline{y}|/r = -r/|y|$, por tanto la función de Green es

$$\begin{aligned} g_y(x) &= \frac{1}{|x-y|} - \frac{r}{|y||x-\overline{y}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|x|^2+|y|^2-2x\cdot y}} - \frac{r}{\sqrt{|y|^2|x|^2+r^4-2r^2x\cdot y}} \end{aligned}$$

pues para $y \in \Omega$, $v(x) = |\overline{y}|/r\|x-\overline{y}\|$ es armónica en Ω. Observemos que mientras la primera expresión de g_y aparentemente no estaba definida en $y = 0$ la última si, siendo

$$g_0(x) = \frac{1}{|x|} - \frac{1}{r},$$

además en la primera no es obvia la simetría $g_y(z) = g_z(y)$, mientras en la segunda si.

Ahora consideremos la solución sugerida por Green: Consideremos que $\Omega^c = \{|x| > r\}$ es un conductor, cuyos electrones, en presencia de la carga $q = 1$ en el punto y, comienzan a moverse hasta que dejan de moverse debido a que se acumulan en el borde definiendo una densidad de carga ρ en la esfera S que conjuntamente con q definen un potencial u que fuera de la esfera define una fuerza electrostática nula $E = -\operatorname{grad} u = 0$, por lo que $u = cte$ en Ω^c y como la carga está acotada (pues está concentrada en S y en el punto y) ocurre que el potencial $u(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, por lo que la constante es 0. De este modo el potencial es suma del potencial debido a la carga q mas v, el potencial de capa simple definido por la densidad de carga ρ

$$u(x) = \frac{1}{\|x-y\|} + v(x) = \begin{cases} g_y, & \text{en } |x| < r \\ 0, & \text{en } |x| >\geq r \end{cases}$$

Veamos cual es el valor de esa densidad de carga. Para ello apliquemos la fórmula, para ∂_n exterior a Ω', es decir $\partial_n = -\sum(x_i/|x|)\partial_{x_i}$, $u^+ = g_y$ y $u^- = 0$,

$$\partial_n u^+ - \partial_n u^- = \partial_n v^+ - \partial v^- = -4\pi\rho,$$

lo cual implica que

$$\partial_n g_y = \partial_n u^+ - \partial_n u^- = -4\pi\rho,$$

por tanto (como en los $x \in S$, $|x| = r$) y se tiene que

$$\begin{aligned}\partial_{x_j} g_y(x) &= \partial_{x_j}\left(\frac{1}{\sqrt{\sum x_i^2 + |y|^2 - 2\sum x_i y_i}} - \frac{r}{\sqrt{\sum x_i^2 |y|^2 + r^4 - 2r^2 \sum x_i y_i}}\right)\\ &= -\frac{x_j - y_j}{|x-y|^3} + r\frac{x_j|y|^2 - r^2 y_j}{\sqrt{r^2|y|^2 + r^4 - 2r^2\sum x_i y_i}^3}\\ \partial_n g_y(x) &= -\sum \frac{x_j}{r}\partial_{x_j} g_y(x) = \frac{r^2 - x\cdot y}{r|x-y|^3} - \frac{r^2|y|^2 - r^2 x\cdot y}{\sqrt{r^2|y|^2 + r^4 - 2r^2\sum x_i y_i}^3}\\ &= \frac{r^2 - |y|^2}{r|x-y|^3},\end{aligned}$$

de donde se sigue que la densidad de carga es

$$\rho(x) = \frac{|y|^2 - r^2}{4\pi r\|x-y\|^3}.$$

En el siguiente resultado veremos que la carga total es -1. En él veremos además que la fórmula integral de Poisson para la bola es la solución del problema de Dirichlet.

Proposición 10.66 *Dada una función acotada $f \in \mathcal{C}(S)$, la fórmula integral de Poisson para $y \in \Omega$,*

$$u(y) = \int_S f(y)\partial_n g_y \, ds = \frac{|y|^2 - r^2}{r}\int_S \frac{f(s)}{\|s-y\|^3}\, ds,$$

(ahora para ∂_n exterior a la esfera), es la solución continua en toda la bola, del problema de Dirichlet $\Delta u = 0$ en $|x| < r$, $u_{|S} = -4\pi f$.

Demostración. Lo primero ya la hemos visto en (10.64). Para lo segundo tenemos que demostrar que para cada x_0 de la esfera de radio r, e $y = (y_1, y_2, y_3)$ con $|y| < r$

$$\lim_{y\to x_0} u(y) = -4\pi f(x_0)$$

para ello observemos que para $f = 1$ el problema de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad |x| < r, \qquad u_{|S} = -4\pi,$$

tiene la solución obvia $u = -4\pi$, la cual verifica la fórmula integral de Poisson (10.17), pág.835

$$-4\pi = \frac{|y|^2 - r^2}{r} \int_S \frac{1}{\|s-y\|^3}\, ds$$

de donde en particular obtenemos la carga total en la esfera S, sin hacer cuentas, pues

$$\int_S \rho(s)\, ds = \frac{|y|^2 - r^2}{4\pi r} \int_S \frac{1}{|s-y|^3}\, ds = -1.$$

Por lo tanto si consideramos una bola $S_\epsilon = B[x_0, \epsilon] \cap S$

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{|y|^2 - r^2}{r} \int_S \frac{f(s)}{\|s-y\|^3}\, ds \\ &= \frac{|y|^2 - r^2}{r} \int_{S_\epsilon} \frac{f(s)}{\|s-y\|^3}\, ds + \frac{|y|^2 - r^2}{r} \int_{S_\epsilon^c} \frac{f(s)}{\|s-y\|^3}\, ds \\ -4\pi f(s_0) &= \frac{|y|^2 - r^2}{r} \int_{S_\epsilon} \frac{f(s_0)}{\|s-y\|^3}\, ds + \frac{|y|^2 - r^2}{r} \int_{S_\epsilon^c} \frac{f(s_0)}{\|s-y\|^3}\, ds \end{aligned}$$

y como en la derecha, las segundas integrales convergen a cero cuando $y \to x_0$, pues $|y| \to r$ y para $s \in S_\epsilon^c$, e y próximo a x_0, $|s-y| > \delta$; basta ver que la diferencia entre las primeras converge a cero si hacemos tender $\epsilon \to 0$, lo cual es obvio por la continuidad de f. ∎

En definitiva tenemos que si u es una función continua en la bola cerrada y es armónica en su interior, entonces para todo y en el interior de la bola se tiene la también llamada **Fórmula integral de Poisson**

$$u(y) = \frac{r^2 - |y|^2}{4\pi r} \int_S \frac{u(s)}{|s-y|^3}\, ds.$$

Consideremos ahora $\Omega = B(0,r)^c = \{\|x\| > r\}$ y $S = \{\|x = r\}$ y busquemos la función de Green correspondiente para cada $y \in \Omega$

$$g_y(x) = \frac{1}{\|x-y\|} + v(x),$$

para v armónica en Ω y $g_{y|S} = 0$. Para ello seguimos otra vez el **método de las imágenes**, que en este caso consiste en considerar una carga

$q = 1$ en el punto y cuyo potencial es $1/\|x - y\|$ y considerar otra carga en un lugar adecuado (ahora en la bola para que sea armónica fuera, en Ω), de modo que su potencial anule al anterior en los puntos de S. Esta cuenta es la misma que antes y el punto adecuado es

$$\overline{y} = \frac{r^2}{|y|^2} y,$$

la imagen de y por la inversión respecto de la esfera y la carga en ese punto que hay que considerar es $q' = -r/|y|$, por tanto la función de Green es

$$g_y(x) = \frac{1}{|x - y|} - \frac{r}{|y||x - \overline{y}|}$$

Ahora consideremos la solución sugerida por Green: Consideremos que la bola $\Omega^c = \{|x| < r\}$ es un conductor (con carga total nula), cuyos electrones, en presencia de la carga $q = 1$ en el punto y, comienzan a moverse hasta que dejan de moverse debido a que se acumulan en el borde definiendo una densidad de carga ρ en la esfera S que conjuntamente con la carga q del exterior definen un potencial u, que se anula en el infinito y que en la esfera define una fuerza electrostática nula $E = -\operatorname{grad} u = 0$, por lo que $u = cte = k$ en la bola (observemos que de existir tal potencial u es único, pues la diferencia de dos se anula en el infinito y en la bola y armónico fuera de la bola). Pero desconocemos el valor de esta constante, ahora no tiene por qué ser $k = 0$. De este modo el potencial es suma del potencial debido a la carga q mas v, el potencial de capa simple definido por la densidad de carga ρ. Veamos que tal constante no puede ser nula. Si fuese $k = 0$, entonces como en S, $g_y = 0 = k$, tendríamos que

$$u(x) = \frac{1}{\|x - y\|} + v(x) = \begin{cases} g_y, & \text{en } |x| > r \\ 0, & \text{en } |x| < r \end{cases}$$

Veamos cual sería el valor de esa densidad de carga. Para ello apliquemos la fórmula, para ∂_n exterior a Ω', es decir $\partial_n = \sum (x_i/|x|)\partial_{x_i}$, $u^+ = g_y$ y $u^- = 0$,

$$\partial_n u^+ - \partial_n u^- = \partial_n v^+ - \partial v^- = -4\pi\rho,$$

lo cual implica que

$$\partial_n g_y = \partial_n u^+ - \partial_n u^- = -4\pi\rho,$$

y la cuenta es similar a la anterior, salvo que ahora $|y| > r$ y $|\overline{y}| < r$, se tiene que la densidad de carga es en los $x \in S$

$$\overline{\rho}(x) = \frac{r^2 - |y|^2}{4\pi r \|x - y\|^3},$$

pero se sigue que la carga total no es nula como debiera, sino que es

$$\int_S \overline{\rho}(s)\, ds = \frac{r^2 - |y|^2}{4\pi r} \int_S \frac{1}{\|s - y\|^3}\, ds,$$

y para calcularla recordemos que

$$\frac{|s - \overline{y}|}{|s - y|} = \frac{r}{|y|},$$

y que para $|\overline{y}| < r$ la inversión de y respecto de la esfera hemos demostrado la primera igualdad

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{r^2 - |\overline{y}|^2}{4\pi r} \int_S \frac{1}{\|s - \overline{y}\|^3}\, ds \quad \Rightarrow \\ \frac{r^2 - |y|^2}{r^2 - |\overline{y}|^2} &= \frac{r^2 - |y|^2}{4\pi r} \int_S \frac{1}{\|s - \overline{y}\|^3}\, ds \\ &= \frac{r^2 - |y|^2}{4\pi r} \int_S \frac{|y|^3}{r^3 \|s - y\|^3}\, ds \end{aligned}$$

de donde que al ser $|y||\overline{y}| = r^2$

$$\int_S \overline{\rho}(s)\, ds = \frac{(r^2 - |y|^2) r^3}{(r^2 - |\overline{y}|^2)|y|^3} = -\frac{r}{|y|}.$$

y esto es absurdo pues la carga de la bola debería de sea nula como al principio antes de poner la carga exterior q en y. Por tanto la constante k no es cero, ni la densidad de carga esta $\overline{\rho}$, que hay que modificarla adecuadamente para que la carga total sea nula. Esta modificación es

$$\rho = \overline{\rho} + \frac{1}{4\pi r|y|},$$

pues la carga total de la segunda función, que es constante, es $4\pi r^2/4\pi r|y| = r/|y|$ y compensa a la primera, además una densidad de carga constante en la esfera da lugar a un potencial constante en el interior (ver la pág.778), por tanto ésta es la solución,

$$\rho = \frac{r^2 - |y|^2}{4\pi r|s - y|^3} + \frac{1}{4\pi r|y|}.$$

la cual es positiva para valores alejados de y y negativa para próximos y es constante en cada paralelo del eje polar definido por y, pues es función de $|s-y|$.

10.11. El método de Perron

Vamos a estudiar otro planteamiento para resolver el problema de Dirichlet. En esta lección consideraremos en general que $U \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto.

10.11.1. Funciones subarmónicas

Definición. Diremos que una función continua en U, $u \in \mathcal{C}(U)$, es *subarmónica* si para todo $x_0 \in U$, toda bola cerrada $B[x_0, r] \subset U$ y $V = m[B[x_0, r]] = (4/3)\pi r^3$ su volumen

$$u(x_0) \leq \frac{1}{V} \int_{B[x_0,r]} u(x)\, dx. \tag{10.19}$$

Principio del máximo 10.67 *Sea u continua en un abierto conexo U, tal que satisface la desigualdad (10.19) en cada punto $x_0 \in U$ para algún r (en particular si es subarmónica). Si u alcanza un máximo absoluto en $p \in U$, entonces u es constante.*

Demostración. Consideremos el cerrado de U, $C = \{u = u(p)\}$ el cual es no vacío y abierto, pues si $B \subset U$ es una bola cerrada centrada en $x_0 \in C$, en la que se cumple la desigualdad, tendremos que

$$u(p) = u(x_0) \leq \frac{1}{m[B]} \int_B u(x)\, dx \leq u(p),$$

por tanto se tiene la igualdad y

$$\int_B (u(p) - u(x))\, dx = 0,$$

pero $u(p) - u(x) \geq 0$, por tanto en B $u = u(p)$. Por conexión $C = U$. ∎

Corolario 10.68 *Sea Ω un abierto acotado conexo y $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, tal que satisface la desigualdad (10.19) en cada punto del abierto para algún r (en particular si es subarmónica en Ω). Sea $x_0 \in \overline{\Omega}$ un punto en el que u alcanza un máximo, entonces $x_0 \in \partial\Omega$ ó u es constante. En cualquier caso el máximo se alcanza en $\partial\Omega$.*

Lema 10.69 *Si $u \in \mathcal{C}(U)$ es tal que para todo $x_0 \in U$ y toda bola cerrada $B[x_0, r] \subset U$,*

$$u(x_0) \leq \frac{1}{A_r} \int_{S[x_0,r]} u(s)\, ds.$$

para $A_r = 4\pi r^2$ el área de la esfera $S[x_0, r]$, entonces u es subarmónica.

Demostración. Consideremos coordenadas esféricas centradas en x_0, (ρ, θ, ϕ), para las que por (10.1)

$$\omega_3 = dx \wedge dy \wedge dz = \rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\rho \wedge d\theta \wedge d\phi,$$
$$ds = i_N \omega_3 = \rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta \wedge d\phi,$$

entonces por la hipótesis, para todo r tal que $B[x_0, r] \subset U$ y $V = (4/3)\pi r^3$ su volumen,

$$\begin{aligned} u(x_0) &\leq \frac{1}{A_r} \int_{S[x_0,r]} u(s)\, ds \\ &= \frac{1}{A_r} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} r^2 u(s) \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \\ u(x_0) &= \frac{u(x_0)}{V} \int_0^r A_\rho d\rho \\ &\leq \frac{1}{V} \int_0^r \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \rho^2 u(s) \operatorname{sen}\theta\, d\theta d\phi \Big) d\rho \\ &= \frac{1}{V} \int_{B[x_0,r]} u(x)\, dx. \end{aligned}$$

Teorema 10.70 *Para un abierto U y una función $u \in \mathcal{C}(U)$ son equivalentes.*

i) Para todo $x_0 \in U$, toda bola cerrada $B[x_0, r] \subset U$ y A_r el área de su esfera

$$u(x_0) \leq \frac{1}{A_r} \int_{S[x_0,r]} u(s)\, ds.$$

ii) u es subarmónica.

iii) Para todo abierto $V \subset \overline{V} \subset U$ y toda función $v \in \mathcal{C}(\overline{V})$, armónica en V, se cumple que

$$u(x) \leq v(x), \quad \forall x \in \partial V \quad \Rightarrow \quad u(x) \leq v(x), \quad \forall x \in V.$$

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ visto en el Lema anterior.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Consideremos un abierto $V \subset \overline{V} \subset U$ y una función $v \in \mathcal{C}(\overline{V})$, armónica en V. Como u es subarmónica y v satisface el teorema del valor medio tendremos que $u - v$ es continua en $\overline{V}$ y subarmónica en V y por el principio del máximo (10.67), el máximo lo alcanza en el borde ∂V, por tanto

$$u(x) \leq v(x), \quad \forall x \in \partial V \quad \Rightarrow \quad u(x) \leq v(x), \quad \forall x \in V.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sea $x_0 \in U$, $B = B[x_0, r] \subset U$ y $S = \{\|x - x_0\| = r\}$. Queremos ver que

$$u(x_0) \leq \frac{1}{A_r} \int_S u(s)\, ds.$$

Sea $v \in \mathcal{C}(B)$, armónica en la bola abierta $B(x_0, r)$, tal que $v_{|S} = u_{|S}$, la cual sabemos que existe porque el problema de Dirichlet para la bola lo hemos resuelto. Entonces $u \leq v$ en S y por la hipótesis $u \leq v$ en B, por tanto

$$u(x_0) \leq v(x_0) = \frac{1}{A_r} \int_S v(s)\, ds = \frac{1}{A_r} \int_S u(s)\, ds,$$

pues $u = v$ en S. ∎

El ser subarmónica es una propiedad local, como veremos a continuación.

Proposición 10.71 *Sea $u \in \mathcal{C}(U)$ tal que es subarmónica en un entorno de cada punto de U, entonces es subarmónica.*

Demostración. Veamos que se cumple la caracterización (iii) del resultado anterior. Consideremos un abierto $V \subset \overline{V} \subset U$ y una función $v \in \mathcal{C}(\overline{V})$, armónica en V tales que $u \leq v$ en ∂V, entonces como $u - v$ es subarmónica en un entorno de x_0, tendremos por el principio del máximo (10.68) que $u - v$ alcanza el máximo en ∂V, por tanto $u \leq v$ en V. ∎

A continuación damos otra caracterización de subarmónica entre las de clase 2.

Teorema 10.72 *Sea $u \in \mathcal{C}^2(U)$, entonces u es subarmónica sii $\Delta u \geq 0$.*

Demostración. $\Leftarrow$ Sea $x_0 \in U$ y consideremos coordenadas esféricas con centro en x_0 y una bola $B = B[x_0, r] \subset U$, entonces por el Teorema de Gauss (10.42) y en coordenadas esféricas ser $\partial_n = \partial_\rho$ (ver pág.767)

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_B \Delta u \, dx &= \int_S \partial_n u \, ds \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\partial_\rho u) r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi = r^2 g(r) \end{aligned}$$

y se tiene que $g(r) \geq 0$. Si ahora consideramos para cada r, el valor medio de u en $S_r = S[x_0, r]$,

$$\begin{aligned} M(r) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} u(s) \, ds \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(s) r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(s) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi \\ M'(r) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\partial_\rho u) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi = \frac{g(r)}{4\pi} \geq 0 \end{aligned}$$

por tanto M es creciente y $u(x_0) = M(0) \leq M(r)$, para todo r, con $B[x_0, r] \subset U$.

$\Rightarrow$ Si en un punto x_0 es $\Delta u(x_0) < 0$, por continuidad existe un r tal que $\Delta u(x) < 0$ en la bola $B[x_0, r]$ y repitiendo el argumento anterior tendríamos que $M'(s) < 0$, para $s < r$ y $u(x_0) = M(0) > M(s)$, lo cual es absurdo. ∎

Proposición 10.73 *Si u es armónica y f definida en la imagen de u es convexa, $f(u)$ es subarmónica.*

Demostración. Si $g = f(u)$, $g_{x_i} = f'(u) u_{x_i}$ y

$$g_{x_i x_i} = f''(u)(u_{x_i})^2 + f'(u) u_{x_i x_i},$$

y el resultado se sigue sumando. ∎

Ejemplo 10.11.1 Son funciones subarmónicas en $\mathbb{R}^3$ (se puede comprobar directamente o aplicando el resultado anterior):

1.- $|x|^a$ para $a \geq -1$.
2.- u^a para u armónica positiva y $a \geq 1$.
3.- $-\log u$, para u armónica.

Veamos otras propiedades de las funciones subarmónicas.

Proposición 10.74 *La suma finita de funciones subarmónicas es subarmónica. El máximo* $g = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$ *de funciones subarmónicas es subarmónica.*

Demostración. La primera es inmediata. La segunda también por la definición pues para cada x_0 existe un i, tal que

$$g(x_0) = f_i(x_0) \leq \frac{1}{m[B]} \int_B f_i \leq \frac{1}{m[B]} \int_B g. \quad \blacksquare$$

Proposición 10.75 *Sea* $u \in \mathcal{C}(U)$ *subarmónica y* $B = B[x_0, r] \subset U$. *Entonces existe una única función subarmónica* $u_B \in \mathcal{C}(U)$, *armónica en* B *que coincide con* $u = u_B$ *en* B^c. *La llamaremos reemplazo de* u *respecto de* B. *Además verifica que* $u \leq u_B$.

Demostración. Si existe es de la forma

$$u_B(x) = \begin{cases} u, & \text{si } x \in U \backslash B \\ \overline{u} & \text{si } x \in B, \end{cases}$$

para $\overline{u}$ solución del problema de Dirichlet

$$\Delta \overline{u} = 0 \quad \text{en} \quad \overset{\circ}{B} \quad \text{y} \quad \overline{u}_{|\partial B} = u_{|\partial B},$$

que sabemos tiene solución y es única. Además $u \leq u_B$ en U, pues por una parte $u = u_B$ en $U \backslash B$, por tanto en ∂B, en particular $u \leq u_B$ en ∂B y como u_B es armónica en el interior de B, tendremos por el apartado (iii) de (10.70) que $u \leq u_B$ en B y por tanto en todo U. Veamos que localmente es subarmónica: En el interior de B es obvio pues es armónica, lo mismo en $U \backslash B$. Falta verlo en los puntos $x_0 \in \partial B$. Consideremos una $B[x_0, r] \subset U$, con borde la esfera S, entonces

$$u_B(x_0) = u(x_0) \leq \frac{1}{4\pi r^2} \int_S u(s)\, ds \leq \frac{1}{4\pi r^2} \int_S u_B(s)\, ds. \quad \blacksquare$$

Teorema de la singularidad evitable 10.76 *Si una función u es armónica en $U\backslash\{x_0\}$, para U abierto y $x_0 \in U$ y está acotada en un entorno de x_0, entonces es prolongable a una función armónica en todo U.*

Demostración. Consideremos una bola $B = B[x_0, r] \subset U$ en la que u esté acotada y sea $v \in \mathcal{C}(B)$, armónica en la bola abierta $B(x_0, r)$, tal que $v = u$ en la esfera $S = S[x_0, r]$. Basta ver que $u = v$ en $B\backslash\{x_0\}$. Para ello sea $\epsilon > 0$ y consideremos la función definida en $B\backslash\{x_0\}$

$$h = u - v + \epsilon\left(1 - \frac{r}{|x - x_0|}\right),$$

que se anula en la esfera y es armónica en el abierto $B(x_0, r)\backslash\{x_0\}$. Además como u y v están acotadas en B, h es negativa en una bola $B(x_0, \delta)$, para δ suficientemente pequeño y como es armónica en la corona $\delta \leq \|x - x_0\| \leq r$ tendremos por el principio del máximo que el supremo lo alcanza en S donde es nula o en $S[x_0, \delta]$ donde es negativa, por tanto en S y se sigue que en la corona es $h \leq 0$ y como es cierto para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeño se tiene que $h \leq 0$ en $B\backslash\{x_0\}$. Pero a su vez esto es válido para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, por tanto $u \leq v$ en $B\backslash\{x_0\}$. Repitiendo el argumento anterior pero con $\epsilon < 0$ y aplicando el principio del mínimo, tendríamos que $u \geq v$ en $B\backslash\{x_0\}$. ∎

Definición. Diremos que una función u definida en una abierto U es *superarmónica* si $-u$ es subarmónica (lo cual equivale a que las desigualdades de la caracterización van al revés).

Corolario 10.77 *Una función u es armónica sii es subarmónica y superarmónica.*

10.11.2. Sucesiones de funciones armónicas

Desigualdad de Harnack 10.78 *Sean $V \subset \overline{V} \subset U \subset \mathbb{R}^3$, con U y V abiertos y V conexo acotado. Existe una constante $c > 0$, que depende sólo de U y V tal que toda función $u \geq 0$ armónica en U, verifica que para cualesquiera $x, y \in V$, $u(x) \leq cu(y)$.*

Demostración. Sea $d = d(V, U^c) > 0$ la distancia entre V y U^c y $r < d/2$. En primer lugar se tiene que si $x, y \in V$ son tales que $|x - y| \leq r$ entonces $u(x) \leq 8u(y)$, pues $B[x, r] \subset B[y, 2r] \subset U$ y $u \geq 0$, por lo tanto

se tiene que

$$u(x) = \frac{1}{m[B[x,r]]}\int_{B[x,r]} u \leq \frac{1}{m[B[x,r]]}\int_{B[y,2r]} u$$
$$= \frac{m[B[y,2r]]}{m[B[x,r]]}u(y) = 8u(y).$$

Ahora bien $\overline{V}$ es compacto, por tanto se recubre con un número finito, digamos m, de bolas de centro un punto de V y radio $r/2$ y dados $x, y \in V$ por conexión existirán unas cuantas de estas bolas $B_i = B[x_i, r/2]$ tales que la primera contiene a x, la última $B_k = [x_k, r/2]$ contiene a y y cada una corta a la anterior (si tiene) y a la siguiente (si tiene). Ahora $k \leq m$ y se tiene $|x - x_1| < r$, por tanto por lo anterior

$$u(x) \leq 8u(x_1) \leq 8^2 u(x_2) \leq \cdots \leq 8^k u(x_k) \leq 8^{k+1}u(y) \leq cu(y),$$

para $c = 8^{m+1}$. ∎

Teorema de convergencia de Harnack 10.79 *Sea u_n una sucesión creciente de funciones armónicas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$. Si para un $x_0 \in U$, la sucesión $u_n(x_0)$ está acotada, entonces u_n converge, uniformemente en los compactos de U, a una función u armónica en U.*

Demostración. $u_n(x_0)$ es una sucesión creciente y acotada, por tanto tiene límite $u(x_0)$ y la sucesión es de Cauchy, por lo tanto para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para $n > m > N$

$$0 \leq u_n(x_0) - u_m(x_0) \leq \epsilon,$$

ahora si consideramos un abierto V acotado y conexo tal que $x_0 \in V \subset \overline{V} \subset U$ y aplicamos el resultado anterior a la función armónica no negativa $u_n - u_m$, tendremos que para todo $x \in V$

$$0 \leq u_n(x) - u_m(x) \leq c(u_n(x_0) - u_m(x_0)) \leq c\epsilon,$$

y u_n es de Cauchy uniformemente en V, por tanto existe su límite u, que es armónica porque tiene la propiedad del valor medio, pues

$$u(x) = \lim u_n(x) = \lim \frac{1}{m[B[x,r]]}\int_{B[x,r]} u_n = \frac{1}{m[B[x,r]]}\int_{B[x,r]} u,$$

y el límite entra en la integral porque la convergencia es uniforme. ∎

Nota 10.80 Observemos que el espacio vectorial de las funciones armónicas en un abierto U es completo respecto de la topología de la convergencia uniforme en los compactos.

10.11.3. Problema Dirichlet. Existencia de solución

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto conexo acotado con borde $S = \partial\Omega$ arbitrario. Dada una función $f \in \mathcal{C}(S)$, buscamos una función $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, tal que

$$\Delta u = 0, \quad \text{en } \Omega, \qquad u_{|S} = f.$$

De lo estudiado anteriormente se sigue que si esta función u existe y existe $h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ subarmónica en Ω, tal que $h_{|S} \leq f$, entonces $h \leq u$ en $\overline{\Omega}$, pues $g = h + (-u)$ es suma de subarmónicas, por tanto subarmónica, y por el principio del máximo como $g \leq 0$ en S, se tiene que $g \leq 0$ en todo $\overline{\Omega}$, esto justifica que si existe u sepamos que es el supremo de las subarmónicas del espacio

$$\mathcal{H} = \{h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : \text{subarmónicas en } \Omega,\ h_{|S} \leq f\}.$$

Proposición 10.81 *La función definida para cada $x \in \overline{\Omega}$*

$$u(x) = \sup_{h \in \mathcal{H}} h(x),$$

está bien definida y es armónica en Ω.

Demostración. Que está bien definida se sigue del principio del máximo, pues si $h \in \mathcal{H}$,

$$h(x) \leq \max_{z \in S} h(z) \leq \max_{z \in S} f(z) = c < \infty,$$

y $u(x) = \sup h(x) \leq c$.

Veamos que es armónica. Sea $x_0 \in \Omega$, como $u(x_0) = \sup_{h \in \mathcal{H}} h(x_0)$ existe una sucesión de $h_n \in \mathcal{H}$, que podemos tomar creciente pues el máximo de un número finito de funciones de $\mathcal{H}$ está en $\mathcal{H}$, tales que $h_n(x_0) \uparrow u(x_0)$, además podemos suponer que son armónicas en una bola $B = B(x_0, r) \subset B[x_0, r] \subset \Omega$, tomando el reemplazo de la vieja función en B. Sea $h = \lim h_n$, la cual es armónica en B por el Teorema de Harnack (10.79) y $h(x_0) = u(x_0)$. Veamos que $h = u$ en B, con lo cual u sería localmente armónica y por tanto armónica. Sea $x_1 \in B$, entonces

$$h(x_1) = \lim h_n(x_1) \leq \sup_{h \in \mathcal{H}} h(x_1) = u(x_1),$$

por lo tanto $h \leq u$ en B. Supongamos que $h(x_1) < u(x_1)$, entonces existiría $g \in \mathcal{H}$, tal que $h(x_1) < g(x_1) \leq u(x_1)$ y si consideramos las

funciones subarmónicas de $\mathcal{H}$, $\max\{h_n, g\}$ y su reemplazo armónico en B, $\overline{h_n} \in \mathcal{H}$, entonces $\overline{h} = \lim \overline{h_n}$ es armónica en B y como $h_n \leq \overline{h_n}$, $h \leq \overline{h}$ y

$$u(x_0) = h(x_0) \leq \overline{h}(x_0) \leq u(x_0),$$

por tanto son iguales, por lo que $\overline{h} - h \geq 0$ es armónica en B y nula en x_0, por tanto se anula en todo B por el teorema del valor medio, pero esto contradice que $h(x_1) < g(x_1) \leq \overline{h}(x_1)$. ∎

10.11.4. Funciones barrera

Definición. Sea $y_0 \in S = \partial\Omega$. Llamamos *barrera para* y_0 a toda función $b \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, armónica en Ω y tal que $b > 0$ en todo punto salvo en y_0, $b(y_0) = 0$. Diremos que un punto es *regular* si existe una barrera para él.

Lema 10.82 *Si $y_0 \in S$ es regular, entonces*

$$\lim_{x \to y_0} u(x) = f(y_0).$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $\lambda > 0$ tal que para todo $y \in S$

$$|f(y) - f(y_0)| < \epsilon + \lambda b(y),$$

pues por continuidad existe un $\delta > 0$, tal que si $|y - y_0| \leq \delta$, $|f(y) - f(y_0)| \leq \epsilon$ y para

$$k = \sup_{|y-y_0| \geq \delta} \{|f(y) - f(y_0)|\} < \infty, \qquad 0 < c = \inf_{|y-y_0| \geq \delta} b(y),$$

existe $\lambda > 0$, tal que $k < \lambda c$. Por tanto

$$f(y_0) - \epsilon - \lambda b(y) \leq f(y) \leq f(y_0) + \epsilon + \lambda b(y),$$

siendo las funciones de los extremos armónicas y en S la de la izquierda es $\leq f$, por tanto está en $\mathcal{H}$ y la de la derecha es $\geq f$, por tanto por (10.70), pág.847, para toda $h \in \mathcal{H}$, $h \leq f(y_0) + \epsilon + \lambda b(y)$, de donde que

$$f(y_0) - \epsilon - \lambda b(x) \leq u(x) \leq f(y_0) + \epsilon + \lambda b(x),$$

y el resultado se sigue tomando límites cuando $x \to y_0$ y $\epsilon \to 0$. ∎

Nota 10.83 El resultado es igualmente cierto si en vez de considerar que una función barrera es armónica, consideramos que es superarmónica.

Teorema 10.84 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto acotado. El problema de Dirichlet tiene solución para toda $f \in \mathcal{C}(S)$ sii todos los puntos de S son regulares.*

Demostración. "$\Leftarrow$"Por los resultados anteriores.

"$\Rightarrow$"Sea $y_0 \in S$, $f(y) = |y - y_0| \in \mathcal{C}(S)$ y b la solución del Problema de Dirichlet $\Delta b = 0$ en Ω, $b_{|S} = f$. Entonces por ser armónica alcanza el mínimo en S, en el que vale lo mismo que f, que alcanza el mínimo en y_0 en el que vale $b(y_0) = f(y_0) = 0$ y no puede tomar ese valor en ningún punto del interior, en Ω, pues sería constante e igual a 0, que no lo es pues en S sólo se anula en y_0, por lo tanto $b(y) > 0$ salvo en y_0 en el que vale 0. Por lo tanto b es una función barrera para y_0 y el punto es regular. ∎

A continuación vemos una sencilla propiedad geométrica que implica la existencia de puntos regulares.

Proposición 10.85 *Si para un punto $y_0 \in S$ existe una bola $B[x_0, r]$, tal que*

$$B[x_0, r] \cap \overline{\Omega} = \{y_0\},$$

entonces y_0 es regular.

Demostración. Sea $b(x) = \frac{1}{r} - \frac{1}{|x - x_0|}$, la cual es armónica en $\mathbb{R}^3 \backslash \{x_0\}$, en particular en Ω y continua en $\overline{\Omega}$, además $b(y) > 0$ fuera de la bola y $b(y_0) = 0$, por tanto b es una barrera. ∎

Ejemplo 10.11.2 Contraejemplo para el Problema Dirichlet. Veamos que el Problema Dirichlet, para la bola unidad del plano sin el origen, en general no tiene solución.

Por ejemplo si queremos que en la circunferencia $u = 1$ y en el origen valga $u(0) = 0$, por el principio del máximo u estará entre 0 y 1 y por el teorema de singularidad evitable u es armónica en todo el circulo pero la única función armónica en el círculo, que en la circunferencia vale 1 es $u = 1$, contradicción.

Veamos no obstante qué función da el método de Perron. Para ello consideremos $h_n = \rho^{1/n}$ que son subarmónicas pues

$$\Delta \rho^{1/n} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}(\rho^{1/n}) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^{1/n}) = \frac{1}{n^2}\rho^{\frac{1}{n}-2} \geq 0$$

y su supremo es 1.

Ejemplo 10.11.3 Los puntos del borde de un convexo son regulares. Lo veremos como consecuencia del:

Teorema del hiperplano soporte. *Dado un convexo cerrado B, todo punto en su borde tiene un hiperplano tangente que deja a un lado el convexo.*

Demostración. En primer lugar dado el convexo B y un q en su exterior sea $r = \min\{\|p-q\| : p \in B\}$, p_q un punto en el que lo alcance (por continuidad y ser cerrado) y consideremos $y = p_q - q$. Entonces $y \cdot p_q \leq y \cdot p$, para todo punto p del convexo, pues para todo $\lambda \in [0,1]$ y $x = p - p_q$, $\lambda p + (1-\lambda)p_q = \lambda x + p_q \in B$ y para todo $\lambda \in (0,1]$

$$\begin{aligned} r^2 \leq \|\lambda x + p_q - q\|^2 &= (\lambda x + y)\cdot(\lambda x + y) \\ &= y\cdot y + 2\lambda y \cdot x + \lambda^2 x \cdot x = r^2 + 2\lambda y \cdot x + \lambda^2 x \cdot x \quad \Rightarrow \\ 0 \leq 2y \cdot x + \lambda x \cdot x \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq y \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad y \cdot p_q \leq y \cdot p \end{aligned}$$

y podemos tomar y de modulo 1 sin mas que dividirlo por su módulo. El hiperplano $y^t x = y^t p_q$ es tangente a B en p_q y lo deja a un lado. Ahora dado un punto x_0 de la frontera de B consideremos una sucesión de puntos exteriores $q_n \to x_0$ y para cada uno el r_n, el y_n y los $p_{q_n} = p_n$ correspondientes, entonces $r_n \to 0$, $p_n \to x_0$. Ahora la sucesión y_n tiene un punto límite y, pues está en la esfera unidad y para ella se verifica que

$$y_n \cdot p_n \leq y_n \cdot p \quad \Rightarrow \quad y \cdot x_0 \leq y \cdot p.$$

Por tanto dado todo punto en el borde tiene un hiperplano tangente que deja a un lado a B y como consecuencia demostramos que todo $x \in S$, el borde del convexo, es regular, pues basta considerar una esfera tangente al hiperplano tangente en el mismo punto pero del otro lado.

Ejemplo 10.11.4 Lo mismo si $S = \{h = 0\}$ es una superficie diferenciable de clase 2. Tomamos como origen el punto de S, como eje z el perpendicular a la superficie en ese punto y como ejes x e y los que dan las direcciones principales de la superficie en ese punto, es decir para cada curva plana intersección de la superficie con cada uno de sus planos normales, consideramos las que tienen curvatura máxima k_1 y mínima k_2 en el punto, las cuales se demuestra en los cursos de geometría diferencial que corresponden a direcciones perpendiculares D_1, D_2 del plano tangente. En estas coordenadas se tiene que la superficie es la gráfica de una función f definida en un entorno del origen, tal que

$f(0) = f_x(0) = f_y(0) = f_{xy}(0) = 0$ y que $f_{xx}(0) = k_1$ y $f_{yy}(0) = k_2$. Para lo último ver 8.9, pág.674 donde vimos los términos en los que tenemos que en el origen $D_1 = \partial_x, D_2 = \partial_y$ y

$$\begin{aligned} k_1\partial_x &= k_1 D_1 = \phi(D_1) = -D_1^{\nabla} N \\ &= (kf_x)_x(0)D_1 + (kf_y)_x(0)D_2 = f_{xx}(0)\partial_x + f_{xy}(0)\partial_y \\ k_2\partial_y &= k_2 D_2 = \phi(D_2) = -D_1^{\nabla} N \\ &= (kf_x)_y(0)D_1 + (kf_y)_y(0)D_2 = f_{xy}(0)\partial_x + f_{yy}(0)\partial_y, \end{aligned}$$

en definitiva tenemos que $f(x,y) = (k_1/2)x^2 + (k_2/2)y^2 + h(x,y)$ para $h(x,y) = o(x^2+y^2)$ y no puede cortar a toda esfera $x^2+y^2+(z-r)^2 = r^2$, para $r > 0$, pues si $k_1 > k_2$ tenemos que

$$f(x,y) \le \frac{k_1}{2}(x^2+y^2) + h(x,y) \le g(x,y) = k(x^2+y^2),$$

tomando x^2+y^2 tal que $h(x,y) < x^2+y^2$, pues $h(x,y)/(x^2+y^2) \to 0$ cuando $x^2+y^2 \to 0$. Ahora la gráfica de g no puede cortar a todas las esferas, por tanto tampoco la de f. Veámoslo: tomemos $r < 1/2k$, entonces para $x^2+y^2 < r^2$ si hubiese un $z = g(x,y)$ satisfaciendo ambas ecuaciones sería $z > 0$ (a menos que $z = 0$ en cuyo caso $x = y = 0$), pues la esfera está sobre el plano x, y y tendríamos $x^2+y^2 = r^2 - (z-r)^2 = 2rz - z^2$, por tanto

$$z = k(x^2+y^2) \quad \Rightarrow \quad z = kz(2r-z) \quad \Rightarrow \quad 1 = k(2r-z),$$

lo cual no puede ser pues si $r \to 0$, $z \to 0$ y tendríamos $1 = 0$, lo cual es absurdo.

Ejemplo 10.11.5 En el plano si Ω es tal que para $p \in S$, existe un segmento de extremo p que toca a $\overline{\Omega}$ sólo en p, entonces p es regular en el sentido de superarmónica (ver la nota (10.83), de la pág.854).

Consideremos una bola centrada en p de radio $r < 1$, $B = B[p,r]$, cuya esfera corte al segmento y tomemos el origen de coordenadas en p y el segmento como la parte positiva del eje de coordenadas x. Consideremos para la variable compleja $z = x + iy = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$, el representante de $\log z = \log\rho + i\theta$ y la función armónica en $B(p,r) \cap \Omega$ y positiva

$$u(z) = -\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\log z}\right) = -\frac{\log\rho}{\log^2\rho + \theta^2} \le -\frac{\log\rho}{\log^2\rho} = -\frac{1}{\log\rho},$$

la cual, por la última expresión anterior, se extiende con continuidad a $p = 0$ valiendo $u(p) = 0$. Ahora consideremos el mínimo $c > 0$ de u en el compacto $\overline{\Omega} \cap S[p, r]$ y consideremos la función

$$b = \begin{cases} \text{mín}\{u, c\}, & B \cap \Omega \\ c, & B^c \cap \Omega, \end{cases}$$

que es $b \leq c$ y es superarmónica, pues en el abierto $A = B(p, r) \cap \Omega$ es superarmónica (el mínimo de superarmónicas es superarmónica), en el borde $S[p, r] \cap \Omega$ es constante $b = c$; en el abierto $A' = B[p, r]^c \cap \Omega$ también es superarmónica pues es constante y en los puntos x del borde es superarmónica pues satisface la propiedad del valor medio, ya que $b(x) = c$ y dada una bola $B_x \subset \Omega$ centrada en x, como $b \leq c$ tendremos

$$b(x) = c \geq \frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} b,$$

ahora por la nota (10.83) se sigue el resultado.

10.12. Teorema de la aplicación de Riemann

En la pág.755 vimos qué funciones en $\mathbb{R}^n$, dependientes sólo de la distancia $\rho = \sqrt{\sum x_i^2}$ al origen, son armónicas

$$f(\rho) = \begin{cases} A \log \rho + B, & \text{si } n = 2, \\ A/\rho^{n-2} + B, & \text{si } n \neq 2. \end{cases}$$

Ahora estamos interesados en el plano $\mathbb{R}^2$, y la función armónica estandar es $\log \rho$.

Definición. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ un abierto acotado y $p \in \Omega$. Llamamos *función de Green* en p, a la función $g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \backslash \{p\})$, que cumple:
1.- $g(z) = \log|z - p| + u(z)$, con $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ y armónica en Ω.
2.- $g = 0$ en $\partial\Omega$.

La existencia desde un punto de vista físico de esta función es la misma que vimos para el espacio en (10.10.1), pág.834. Por su parte su existencia matemática equivale a encontrar $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tal que

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \qquad u(z) = -\log|z - p| \quad \text{en} \quad \partial\Omega.$$

Nosotros demostraremos la existencia de esta u cuando el abierto Ω es simplemente conexo, con argumentos similares a los utilizados en el ejercicio 5.

Lema 10.86 *Sea Ω un abierto acotado y $p \in \Omega$. Existe una función $g \in \mathcal{C}(\Omega\backslash\{p\})$, que satisface las siguientes propiedades*[8]*:*

(i) $g(z) = \log|z-p| + u(z)$ con u armónica en Ω (no decimos nada de su borde).

(ii) $g < 0$ en $\Omega\backslash\{p\}$.

(iii) g es la mayor función cumpliendo (i) y (ii).

Demostración. Consideremos el espacio $\mathcal{H}$ de las funciones $h_\alpha \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ que son superarmónicas en Ω y que fuera de un entorno compacto K_α de p, valen

$$h_\alpha(z) = -\log|z-p|,$$

y sea $\mathcal{G} = \{g_\alpha(z) = h_\alpha(z) + \log|z-p| : \ h_\alpha \in \mathcal{H}\}$

Veamos en primer lugar que este espacio tiene funciones. Consideremos una bola $B[p,r] \subset \Omega$ y sea

$$h_B(z) = \begin{cases} -\log|z-p| & \text{si } z \in \overline{\Omega}\backslash B[p,r] \\ -\log r & \text{si } z \in B[p,r], \end{cases}$$

la cual está en $\mathcal{H}$ pues es superarmónica, por el razonamiento habitual en las tres regiones, ya que $h_B \leq -\log r$. Ahora podemos tomar en Ω

$$u(z) = \inf_{h\in\mathcal{H}} h(z),$$

la cual se demuestra como en (10.81), pág.853 que es armónica. Ahora por definición la función

$$g(z) = \log|z-p| + u(z) = \inf_{g_\alpha\in\mathcal{G}} g_\alpha(z), \quad \text{para} \quad g_\alpha = \log|z-p| + h_\alpha$$

satisface la primera propiedad, veamos que también las otras dos. En primer lugar cada g_α es superarmónica en $\Omega\backslash\{p\}$, $g_\alpha = 0$ fuera de un entorno compacto $K_\alpha \subset \Omega$, de p y $g_\alpha(z) \to -\infty$ cuando $z \to p$. Por tanto $g \leq g_\alpha \leq 0$ y si $g(x) = 0$ en un punto $x \in \Omega\backslash\{p\}$, alcanzaría el máximo en un punto interior y como es armónica sería constante, por tanto $g < 0$ en $\Omega\backslash\{p\}$.

[8] Observemos que si la función de Green g existe, las satisface

Por último si $\overline{g} = \log|z-p| + \overline{u}(z)$ fuese otra satisfaciendo las dos propiedades, entonces $\log|z-p|+\overline{u}(z) = \overline{g} < 0 = g_\alpha = \log|z-p|+h_\alpha(z)$ en $\Omega\backslash K_\alpha$ y en este conjunto también sería $\overline{u}(z) < h_\alpha(z)$, es decir en ese conjunto la función superarmónica $h_\alpha(z) - \overline{u}(z) > 0$, (pues $-\overline{u}$ es armónica), por tanto en todo Ω es positiva, por tanto $\overline{g} < g_\alpha$ para todo α y $\overline{g} \leq g$. ∎

Lema 10.87 *Con la notación del lema anterior sea $y_0 \in \partial\Omega$. Si existe una función armónica positiva b sobre Ω, entonces*

$$\lim_{z\to y_0} b(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{z\to y_0} g(z) = 0.$$

Demostración. Sea $B[p,r] \subset \Omega$. Existe un $\lambda > 0$ tal que en $S[p,r]$, $-\lambda b < g \leq g_\alpha$, para ello basta tomarla tal que $\min_S g + \lambda \min_S b > 0$, pero entonces como g_α se anula fuera del compacto K_α entorno de p, tendremos que $g_\alpha + \lambda b > 0$ en S y en $\Omega\backslash K_\alpha$, pero como la función es superarmónica, tendremos que $g_\alpha + \lambda b > 0$ ó equivalentemente $g_\alpha > -\lambda b$ en $\Omega\backslash B$ y como esto es cierto para toda α tendremos que $0 \geq g \geq -\lambda b$ en $\Omega\backslash B$ y tomando límite cuando $z \to y_0$, como $b(z) \to 0$, tendremos que $g(z) \to 0$. ∎

Definición. Diremos que una aplicación continua entre espacios topológicos $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es un *revestimiento* de $\mathcal{Y}$ si todo $y \in \mathcal{Y}$ tiene un entorno abierto V_y tal que $F^{-1}(V_y)$ es homeomorfo a $V_y \times D$ con D discreto, haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F^{-1}(V_y) & \sim & V_y \times D \\ {\scriptstyle F}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ & V_y & \end{array}$$

(recordemos que D es discreto si todo subconjunto suyo (en particular los puntos) es abierto). Lo llamaremos *revestimiento conexo* si $\mathcal{X}$ es conexo.

Diremos que un espacio topológico conexo $\mathcal{Y}$ es *simplemente conexo* si todo revestimiento conexo de $\mathcal{Y}$ es homeomorfismo.

Proposición 10.88 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es acotado simplemente conexo, entonces para todo $p \in \Omega$ existe la correspondiente función de Green.*

Demostración. Sea g la función del Lema (10.86), falta ver que $g(z) \to 0$ cuando $z \to y_0$, para $y_0 \in \partial\Omega$, para lo cual basta demostrar por el Lema anterior que existe una función armónica positiva b sobre Ω

tal que $\lim_{z\to y_0} b(z) = 0$. Con una traslación y una homotecia podemos suponer que $y_0 = 0$ y que $\Omega \subset B(0,1)$. Como Ω es simplemente conexo podemos tomar una sección global de e^z, $\log z\colon \Omega \to \mathbb{C}$ y definir como en el ejercicio 5

$$b(z) = -\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\log z}\right) = -\frac{\log\rho}{\log^2\rho+\theta^2} \le -\frac{\log\rho}{\log^2\rho} = -\frac{1}{\log\rho},$$

para $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ y se tiene que $z \to 0$, entonces $\rho \to 0$ y $b(z) \to 0$. ∎

Lema 10.89 *Todo abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ es analíticamente isomorfo (biyección holomorfa) a un abierto del disco unidad.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que en Ω^c existe un disco abierto, que por una traslación y una homotecia podemos suponer que es el disco unidad, entonces basta considerar $\Omega' = f(\Omega)$, para la biyección holomorfa $f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to\in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $f(z) = 1/z$.

En general sea $z_0 \notin \Omega$, que podemos suponer con una traslación $z_0 = 0$ y consideremos el revestimiento $g\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to\in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $g(z) = z^2$, que es de grado 2 (cada fibra tiene dos puntos). Entonces el abierto $g^{-1}(\Omega)$ tiene dos componentes conexas Ω' y Ω'' y podemos considerar una determinación de la raíz cuadrada $z \in \Omega \to \sqrt{z} \in \Omega'$ que es biyectiva y holomorfa y basta considerar un disco abierto $D \subset \Omega'' \subset \Omega'^c$ y aplicar la primera parte. ∎

Teorema de la aplicación de Riemann 10.90 *Todo abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ distinto de $\mathbb{C}$ es analíticamente isomorfo al disco unidad D. Además fijado $p \in \Omega$ existe $h\colon \Omega \to D$ isomorfismo analítico único (salvo giros, concretamente es único si pedimos que el número complejo $h'(p)$ sea real y positivo), verificando $h(p) = 0$.*

Demostración. Veamos la idea de la construcción de tal h. Supongamos que existe y que se extiende al borde $h\colon \overline{\Omega} \to \overline{D}$ y sea $g(z) = \operatorname{Re}(\log h(z))$, que es tal que $g_{|\partial\Omega} = 0$, pues si $z \in \partial\Omega$, $h(z) = \mathrm{e}^{i\theta} \in S$ y $\log h(z) = i\theta$. Ahora si $h(z) = (z-p)\,\mathrm{e}^{\tilde{u}(z)}$ (sería de esta forma pues $h(p) = 0$ y es analítica en toda la región, por tanto h es de la forma $(z-p)k(z)$, y k no puede anularse, fuera de p porque h no sería inyectiva y en p porque h tendría diferencial nula y no sería isomorfismo analítico). Entonces

$$\log h(z) = \log(z-p) + \tilde{u}(z) \quad \Rightarrow \quad g(z) = \log|z-p| + \operatorname{Re}\tilde{u}(z),$$

por lo que g sería la función de Green del punto p. Esto justifica el por qué comenzamos considerando la función de Green[9] de p, $g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}\backslash\{p\})$, con

$$g(z) = \log|z-p| + u(z),$$

siendo u armónica en Ω y $g_{|\partial\Omega} = 0$. Ahora consideremos $\tilde{u}$ analítica con parte real la función armónica u y definamos fuera de p la multifunción

$$\tilde{g} = \log(z-p) + \tilde{u}(z),$$

para la que $\operatorname{Re}\tilde{g} = g$ y sea

$$h(z) = \mathrm{e}^{\tilde{g}(z)} = (z-p)\,\mathrm{e}^{\tilde{u}(z)},$$

que es función en todo el abierto. Veamos que satisface las propiedades: Es holomorfa, $h(p) = 0$, converge a 1 cuando z tiende al borde de Ω

$$|h(z)| = |\,\mathrm{e}^{\tilde{g}(z)}\,| = \mathrm{e}^{g(z)} \to \mathrm{e}^0 = 1, \qquad \text{cuando} \quad z \to \partial\Omega \quad \Rightarrow \quad g(z) \to 0,$$

además como en Ω, $g(z) < 0$, $|h(z)| < 1$, luego $h(z) \in D$. Falta ver que h es biyectiva:

(1) $h\colon \Omega \to D$ es sobre: Como h es holomorfa, es abierta, por tanto basta ver que $h(\Omega) = C$, que es abierto, es cerrado en D, pues en tal caso al ser D conexo $h(\Omega) = D$. Para ello sea $\omega \in D$ un punto adherente a C, es decir $\omega = \lim h(z_n)$, para $z_n \in \Omega$. Ahora como el abierto Ω es acotado (podemos considerarlo por el Lema anterior), z_n tiene una subsucesión, que llamamos igual, con límite $z_n \to z \in \overline{\Omega}$ y $z \notin \partial\Omega$, pues en caso contrario tendríamos un absurdo, pues por el párrafo anterior $1 = \lim|h(z_n)| = |\omega| < 1$. Por tanto $z \in \Omega$ y $h(z) = h(\lim z_n) = \lim h(z_n) = \omega$.

(2) h es inyectiva: Denotemos la función $h = h_p$ para cada p y sea $q \in \Omega$. Consideremos el automorfismo σ del disco cerrado en si mismo, tal que $\sigma[h_p(q)] = 0$ el cual podemos dar explícitamente pues todo automorfismo del disco es de la forma

$$\sigma(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z},$$

y basta tomar $\alpha = h_p(q)$. Ahora consideremos la función holomorfa en todo Ω

$$f(z) = \frac{\sigma[h_p(z)]}{h_q(z)},$$

[9] que sabemos que existe por (10.88), pues por el lema anterior Ω es analíticamente isomorfo a un abierto acotado.

pues aunque el denominador se anula en q, sólo lo hace una vez y el numerador también se anula en q, además $|f(z)| = 1$ en $\partial\Omega$ y por el principio del máximo (ver (9.14), pág.703) que $|f| \leq 1$ en todo Ω y como

$$f(p) = \frac{\sigma(0)}{h_q(p)} = \frac{-h_p(q)}{h_q(p)} \quad \Rightarrow \quad \frac{|h_p(q)|}{|h_q(p)|} \leq 1,$$

es decir $|h_p(q)| \leq |h_q(p)|$ y por simetría tendremos la igualdad y por tanto que $|f(p)| = 1$ y en p alcanza el máximo, pero entonces $|f|$ es constante $|f| = |f(p)|$ y si $z \neq q$, $0 \neq h_q(z)$ y

$$0 \neq \sigma[h_p(z)] \quad \Rightarrow \quad h_p(z) \neq h_p(q). \quad \blacksquare$$

10.13. Ejercicios resueltos

Ejercicio 10.1.1.- Dadas dos funciones armónicas f y g demostrar que fg es armónica sii $\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g = 0$.

Indicación. Para $h = fg$, $h_{x_i} = f_{x_i} g + f g_{x_i}$ y

$$h_{x_i x_i} = f_{x_i x_i} g + 2 f_{x_i} g_{x_i} + f g_{x_i x_i} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = 2 \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.2.2.- Demostrar que la función, para $z = x + iy$

$$u(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \\ \operatorname{Re} \mathrm{e}^{-1/z^4}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \end{cases}$$

satisface la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^2$, pero no es continua en el origen.

Solución.- Es armónica en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ por ser la parte real de una función analítica de variable compleja. Para verlo en el 0 hay que calcular $u_{xx}(0) = f''(0)$ y $u_{yy}(0) = g''(0)$, para $f(x) = u(x,0) = \mathrm{e}^{-1/x^4}$, $f(0) = 0$; y $g(y) = u(0,y) = \mathrm{e}^{-1/y^4}$, $g(0) = 0$. Se tiene que $f'(0) = \lim_{x\to 0} 1/x\, \mathrm{e}^{1/x^4} = 0$ y $f''(0) = \lim f'(x)/x = 0$. Para ver que no es continua tómese $z = r\, \mathrm{e}^{i\pi/8}$, $z^4 = r^4 i$, $-1/z^4 = i/r^4$, $\operatorname{Re} \mathrm{e}^{-1/z^4} = \cos r^{-4}$ el cual va oscilando y no tiene límite. $\blacksquare$

Ejercicio 10.3.3.- Expresando las funciones y el operador de LaPlace en coordenadas esféricas, demostrar que si g es armónica en un abierto $V \subset \mathbb{R}^3 - \{0\}$, entonces la función

$$f(x) = \frac{r}{\|x\|} g\left(\frac{r^2 x}{\|x\|^2}\right),$$

es armónica en el abierto U correspondiente por la inversión espacial respecto de la esfera centrada en el origen y radio r.

Solución.- Si consideramos las coordenadas $(s = r^2/\rho, \theta, \varphi)$, es fácil demostrar que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} P_2 = \frac{s^4}{r^4}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s^2} P_2\right),$$

$$\Delta \circ s = \frac{s^5}{r^4}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2}{s}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{s^2} P_2\right),$$

por lo tanto si

$$g(x,y,z) = w(\rho, \theta, \varphi),$$

es armónica, tendremos que para $h = w(s, \theta, \varphi)$

$$\Delta(sh) = 0,$$

es decir es armónica

$$f(x,y,z) = sh = sw(s,\theta,\varphi) = \frac{r^2}{\rho} g\left(\frac{r^2 x}{\rho^2}, \frac{r^2 y}{\rho^2}, \frac{r^2 z}{\rho^2}\right). \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.3.5.- Demostrar que la proyección estereográfica desde el polo de la esfera al plano del ecuador conserva ángulos y transforma circunferencias en circunferencias o rectas.

Demostración. (i) Dados a y b dos vectores tangentes en un punto Q de la esfera y otros dos c y d en otro punto P, de modo que b, d, PQ sean coplanarios y a, c, PQ también, entonces por simetría el ángulo que forman a y b es el mismo que forman c y d (ver fig.10.8).

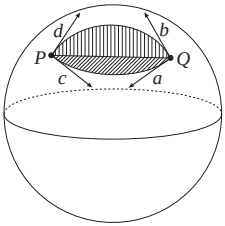


Figura 10.8. Ángulos $\widehat{ab} = \widehat{cd}$

(ii) Sean a y b un par de vectores tangentes en un punto A de la esfera, entonces se sigue de (i) que tienen el mismo ángulo que a'' y b'', los cuales por paralelismo tienen el mismo que a' y b', que son la proyección de a y b (ver fig.10.9).

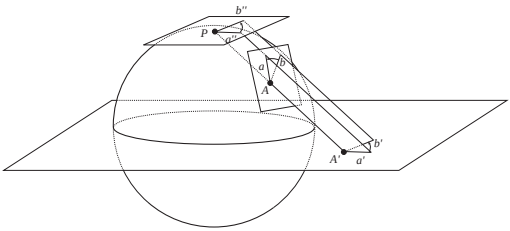


Figura 10.9. La proy. ester. conserva ángulos.

iii) La proyección estereográfica lleva cada circunferencia pasando por P en la recta intersección del plano del ecuador y el plano de la circunferencia (ver fig.10.10).

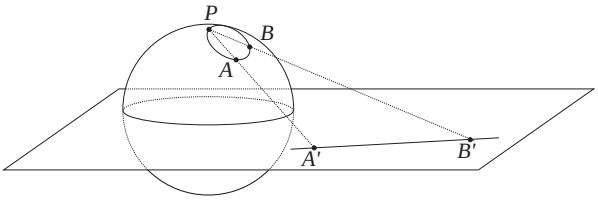


Figura 10.10. La proy. ester. lleva circunferencias pasando por P en rectas.

iv) Por último la proyección de cualquier circunferencia que no pase por P es en general una elipse (pues es una cónica cerrada), con la siguiente propiedad, dados dos puntos suyos A' y B', el corte con la recta $A'B'$, define en esos puntos ángulos iguales (ver fig.10.11).

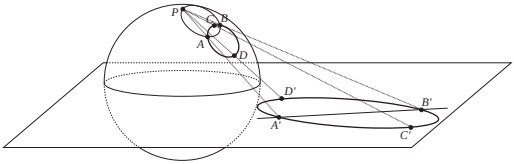


Figura 10.11. La proy. ester. lleva circunferencias en circunferencias.

Esto es consecuencia de que sobre la esfera dos circunferencias PAB y $ABCD$ se cortan en A y B bajo ángulos iguales y la proyección conserva ángulos; y la circunferencia es la única elipse con esa propiedad. ∎

Ejercicio 10.3.6.- Demostrar que la aplicación $\tau = \pi_Q \circ \pi_P^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, composición de la inversa de la proyección estereográfica desde un polo P, con la proyección estereográfica desde el otro polo Q, es la inversion respecto de la circunferencia del ecuador.

Solución.-
Es consecuencia de que para $\pi_P(B) = A$ y $\pi_Q(B) = A'$, los triángulos rectángulos (ver dibujo) POA, PBQ y QOA' son semejantes pues tienen dos ángulos comunes, por tanto

$$\frac{OA'}{OQ} = \frac{OP}{OA} \quad \Rightarrow \quad OA \cdot OA' = OP^2. \quad ∎$$

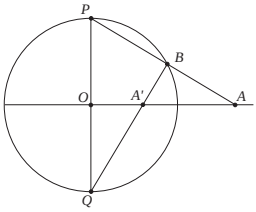


Figura 10.12.

Ejercicio 10.3.7.- Demostrar que la inversion respecto de una circunferencia conserva ángulos y lleva circunferencias que no pasan por el centro en circunferencias y las que pasan por el centro en rectas.

Solución.- Es una simple consecuencia de los dos resultados anteriores. ∎

Ejercicio 10.4.1.- Dada una esfera de radio r centrada en O y una carga q en un punto p, demostrar que existe un único punto p' de la recta que une O y p (que es la imagen de p por la inversión respecto de la esfera) y en él una única carga q', tal que el potencial debido a las dos cargas es nulo en los puntos de la esfera.

Solución.-
Si O es el origen de coordenadas, $b = \|p\|$ y $a = \|p'\|$, tendremos que en un punto cualquiera $(c\cos\theta, c\,\mathrm{sen}\,\theta)$ el potencial debido a ambas cargas es

$$\frac{q'}{r_1} + \frac{q}{r_2} = \frac{q'}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta}} + \frac{q}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta}},$$

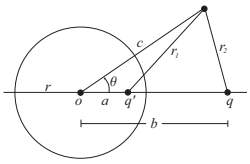


Figura 10.13.

y si queremos que valga 0 para $c = r$ y todo θ, tendremos que debe ser constante

$$\sqrt{\frac{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}{b^2 + r^2 - 2br\cos\theta}} = -\frac{q'}{q},$$

y por lo tanto q' tiene signo contrario que q. Ahora derivando (su cuadrado) se tiene

$$(a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta)b = a(b^2 + r^2 - 2br\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad (a^2 + r^2)b = a(b^2 + r^2) \quad \Rightarrow$$
$$ab(a - b) = r^2(a - b) \quad \Rightarrow \quad ab = r^2,$$

y $q' = -q\sqrt{a/b} = -q(a/r) = -q(r/b)$. ∎

Ejercicio 10.5.3.- Demostrar el **Teorema de Helmholtz I**: Un campo tangente en el espacio que se anule en el infinito está totalmente determinado por su rotacional y su divergencia.

Solución.- Sean D_i campos que se anulan en el infinito y tales que $\operatorname{div} D_1 = \operatorname{div} D_2$ y $\operatorname{rot} D_1 = \operatorname{rot} D_2$, entonces para $D = D_1 - D_2$, tendremos que $\operatorname{div} D = \operatorname{rot} D = 0$, entonces $i_{\operatorname{rot} D}\omega_3 = d(\gamma_D) = 0$ y por el Lema de Poincaré (3.22), pág.165, $\gamma_D = i_D T_2 = df$ es decir $D = \operatorname{grad} f$ ahora bien $\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f = \operatorname{div} D = 0$ es decir f es armónica y por lo tanto las f_{x_i} y como estas se anulan en el infinito, tendremos por el ejercicio (10.5.2) que son nulas y por tanto $D = 0$. ∎

Ejercicio 10.5.4.- Demostrar el **Teorema de Helmholtz II**: : Todo campo $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ que se anule en el infinito es suma de un campo con divergencia nula y otro con rotacional nulo.

Solución.- Si $D = \sum f_i\partial_i$, por el Teorema de la Ecuación de Poisson existe un único campo $Z = \sum g_i\partial_i$, tal que $\Delta g_i = -f_i$. Ahora el resultado se sigue de que para todo campo Z, si denotamos $\Delta Z = \sum(\Delta g_i)\partial_i$, se tiene la igualdad

$$-\Delta Z = -\operatorname{grad}\operatorname{div} Z + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} Z),$$

pues $\operatorname{div} Z = \sum g_{jx_j}$ y la componente i de su gradiente es $(\sum g_{jx_j})_{x_i} = \sum g_{jx_jx_i}$, y por último $\operatorname{rot} Z$ tiene componentes $(g_{3x_2} - g_{2x_3}, g_{1x_3} - g_{3x_1}, g_{2x_1} - g_{1x_2})$ y su rotacional

$$g_{2x_1x_2} - g_{1x_2x_2} - g_{1x_3x_3} + g_{3x_1x_3},$$
$$g_{3x_2x_3} - g_{2x_3x_3} - g_{2x_1x_1} + g_{1x_2x_1},$$
$$g_{1x_3x_1} - g_{3x_1x_1} - g_{3x_2x_2} + g_{2x_3x_2}.$$ ∎

Ejercicio 10.6.1.- Resolver la ecuación $\Delta u = 0$, considerando las condiciones:
(1) $u(1,\theta) = \cos^2\theta$,
(2) $u(1,\theta) = \operatorname{sen}^3\theta$.

Indicación.- (1) $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$. ∎

Ejercicio 10.7.1.- (1) La solución u para la ecuación 10.15, con $P > 0$, no puede alcanzar un máximo positivo ni un mínimo negativo en el abierto acotado Ω. (2) Como consecuencia demostrar la siguiente versión del principio del máximo: si $M_1 \le u \le M_2$ en $\partial\Omega$, con $M_1 < 0$ y $M_2 > 0$, entonces $M_1 \le u \le M_2$ en

Ω. (3) Comprobar que para $M_1 < M_2$ arbitrarias en general no es cierto el resultado. (4) Demostrar que (de existir) la solución u, es continua respecto de su valor f en la frontera.

Indicación. (1) Si u alcanza un máximo en $x \in \Omega$, $u_{x_i x_i}(x) \leq 0$, por tanto $P(x)u(x) = \Delta u(x) \leq 0$ y $u(x) \leq 0$. (2) Por continuidad u alcanza el máximo en un punto x del compacto $\overline{\Omega}$, si $x \in U$ por el resultado anterior $u(x) \leq 0 \leq M_2$, el resto es obvio. (3) Considérese la función $u = x^2 + y^2 + 1$. (4) Se sigue de (2) restando dos soluciones. ∎

Ejercicio 10.7.2.- Demostrar que si denotamos con ∂_n el campo unitario normal exterior a las esferas centradas en el origen, entonces

$$\mathrm{vol}[S(0,r)] = \int_{S(0,r)} i_{\partial_n}\omega = r^{n-1}\int_{S(0,1)} i_{\partial_n}\omega = r^{n-1}\,\mathrm{vol}[S(0,1)].$$

Indicación. Considérese la homotecia $F(x) = rx$, entonces

$$\int_{S(0,r)} i_{\partial_n}\omega = \int_{S(0,1)} F^*(i_{\partial_n}\omega),$$

y basta demostrar que $F_*\partial_n = r\partial_n$, pues como $F^*\omega = r^n\omega$, tendremos que $F^*(i_{\partial_n}\omega) = r^{n-1}i_{\partial_n}\omega$. ∎

Ejercicio (Principio del máximo) 10.7.3.- Demostrar como consecuencia del teorema del valor medio que si u es armónica en un abierto conexo U: (i) Si alcanza un máximo (ó mínimo) en U, entonces es constante. (ii) Que si U es acotado y $u \in \mathcal{C}(\overline{U})$, entonces u alcanza el máximo y el mínimo en ∂U (sin condiciones de regularidad)

Demostración. (i) Sea $\lambda = \max u$ y consideremos el cerrado de U, $C = \{x \in U : u(x) = \lambda\}$, el cual es abierto pues si $x_0 \in C$, existe $r > 0$, tal que $B[x_0, r] \subset U$ y como $u(x_0)$ es el promedio de u en esa bola, tendremos que en ella $u = \lambda$. Por conexión $C = U$ y $u = \lambda$. (ii) u alcanza el máximo y el mínimo por ser continua en un compacto ahora si uno de ellos lo alcanza en u es constante, en particular lo alcanza en el borde. ∎

Ejercicio (Problema de Dirichlet) 10.7.5.- (i) **Unicidad.** Demostrar que dada una función $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, para U abierto conexo acotado, si existe es única la función armónica en U, $u \in \mathcal{C}(\overline{U})$, que satisface $u = f$ en ∂U (sin condiciones de regularidad). (ii) **Dependencia continua.** Demostrar que si existe la solución u_i del Problema de Dirichlet para $f = f_i$ $(i = 1, 2)$, entonces para la norma infinito (del supremo) respectivamente en U y en $S = \partial U$, se tiene que

$$\|u_1 - u_2\|_{\infty,U} \leq \|f_1 - f_2\|_{\infty,S}.$$

Demostración. (i) Dadas dos soluciones se sigue del ejercicio anterior que su diferencia es nula, pues alcanza el máximo y el mínimo en el borde donde es nula. (ii) Es similar. ∎

Ejercicio 10.7.6.- Demostrar que toda función armónica en $\mathbb{R}^n$ integrable es nula.

Demostración. Por el Teorema del valor medio (10.46)

$$u(x) = \frac{1}{r^n m(B)} \int_{B(x,r)} u\, dm,$$

y el resultado se sigue tomando límites pues u es integrable por tanto existe y es finito el

$$\lim_{r\to\infty} \int_{B(x,r)} u\, dm = \int_{\mathbb{R}^n} u\, dm. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.7.7.- Demostrar que si u es el potencial de una densidad de cargas $\rho \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^3)$ y $q = \int \rho$ es la carga total, entonces el valor medio de u en cualquier esfera de radio r que contenga toda la carga es q/r.

Demostración. Consideremos una variedad con borde Ω que contenga al $\operatorname{sop}\rho$ y una esfera $S[x,r]$ de una bola $B[x,r] \supset \Omega$ que contenga la carga, entonces por la ecuación de Poisson y el Teorema de Gauss

$$-4\pi q = \int_\Omega \Delta u\, dy = \int_{\partial\Omega} \partial_n u\, ds = \int_{S[x,r]} Nu\, ds,$$

para N el campo unitario normal exterior a las esferas de centro x, donde la última igualdad se sigue del Teorema de Gauss en el volumen $B[x,r]\backslash\Omega$, en el que u es armónica. Por tanto la función de la derecha es constante en r. Si tomamos un $r' > r$, $v = 1/\|x-y\|$ y consideramos el volumen $C = B[x,r']\backslash B[x,r]$ en el que ambas son armónicas y aplicamos la segunda identidad de Green, tendremos que

$$\int_{S[x,r']} u\, Nv - \int_{S[x,r]} u\, Nv = \int_{\partial C} u\partial_n v = \int_{\partial C} v\partial_n u = \int_{S[x,r']} v\, Nu - \int_{S[x,r]} v\, Nu,$$

y como en cada esfera $S[x,r]$, $v = 1/r$ y $Nv = -1/r^2$, tendremos que para $f(r) = (1/4\pi r^2)\int_{S[x,r]} u$ el valor medio de u en $S[x,r]$

$$\begin{aligned} f(r) - f(r') &= \frac{1}{4\pi}\Big(\int_{S[x,r']} u\, Nv - \int_{S[x,r]} u\, Nv\Big) \\ &= \frac{1}{4\pi}\Big(\int_{S[x,r']} v\, Nu - \int_{S[x,r]} v\, Nu\Big) = \frac{q}{r} - \frac{q}{r'} \end{aligned}$$

y por tanto $f(r) - q/r = k$ es constante y $f(r) = (q/r) + k$, pero $k = 0$ pues $f(r) \to 0$ cuando $r \to \infty$, pues $u(x) \to 0$. $\blacksquare$

10.14. Bibliografía y comentarios

Los libros consultados para la elaboración de este tema han sido:

Boyce, W. E. and DiPrima, R.C.: "*Elementary Differential Equations and Boundary value Problems*". J.Wiley, 1977.

Courant,R. and Hilbert, D.: "*Methods of Mathematical Physics. Vol.II, Partial Differential Equations*". J.Wiley, 1962.

Derrick, W.R. and Grossman, S.J.: "*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*". Fondo Educativo Interamericano, 1984.

Edwards, C.H.Jr. and Penney,D.E.: "*Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*". Prentice–Hall Hispanoamericana, 1986.

Garabedian, P.R.: "*Partial Differential Equations*". Chelsea, 1986.

Godunov, S.K.: "*Ecuaciones de la Física Matemática*". Ed.Mir, 1978.

Kellog, O.D.: "*Foundations of Potential Theory*". Springer–Verlag, 1967. Reimpresión de la primera edición de 1929.

Mijáilov, V.P.: "*Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*". Ed.Mir, 1978.

Simmons, F.: "*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas.*Ed. McGraw-Hill. 1977.

Spiegel, M.R.: "*Ecuaciones diferenciales aplicadas*". Ed. Prentice Hall internacional, 1983.

Tijonov, A.N. y Samarski, A.A.: "*Ecuaciones de la Física matemática*". Ed. Pueblo y Ciencia, 1975.

Weinberger, H.F.: "*Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*". Ed. Reverté, 1970.

Zachmanoglou, E.C. and Thoe, D.W.: "*Introduction to Partial Differential Equations with Applications*". Dover, 1986.

Uno de los problemas mas importantes estudiados durante el siglo XVIII fue el de determinar la magnitud de la atracción que una masa ejerce sobre otra, problema motivado por ejemplos tan característicos como el del Sol y un planeta, la Tierra y la Luna, etc. Si ambas masas estaban muy alejadas entre sí, podían ser consideradas como masas puntuales, pero si estaban relativamente cercanas, era fundamental considerar la forma de dichas masas.

En *1740*, Colin Maclaurin, (*1698–1746*) demostró que por la acción de la gravedad una masa homogénea de líquido en rotación sobre un eje con velocidad uniforme, debe tener la forma de un elipsoide de

revolución, siendo el eje menor el de giro (teorema dado por Isaac Newton (*1642–1727*), sin demostración). No obstante el método geométrico utilizado por este autor así como por Isaac Newton y otros no era el más potente para este tipo de problemas, pues sólo en situaciones muy particulares de las masas podía ser de utilidad. Por ello no es de extrañar que surgiera un método alternativo, el analítico, para estudiar este problema.

La idea de que una fuerza F puede derivar de una función potencial, $F = \operatorname{grad} u$, e incluso el término de *función potencial*, fueron utilizados por Daniel Bernoulli (*1700–1782*), en su tratado sobre "*Hidrodinámica*" de *1738*.

Por otra parte la ecuación de Laplace (tridimensional) aparece por primera vez en *1752* en el trabajo de Leonard Euler (*1707–1783*) titulado "*Principios del movimiento de fluidos*", en el que demuestra que el campo de velocidades del fluido es un gradiente $D = \operatorname{grad} v$ y si el líquido es incompresible obedece a la llamada *ley de continuidad*, $\operatorname{div} D = 0$, lo cual equivale a que $\Delta v = 0$ y dice que no se conoce cómo resolver esta ecuación en general, por lo que sólo considera casos especiales en los que v es un polinomio. En *1762*, Joseph Louis Lagrange (*1736–1813*) retoma el tema (aunque no menciona a Euler) y mejora tanto las ideas como la exposición de las mismas.

En *1772* Pierre Simon LaPlace (*1749–1827*) inicia una serie de trabajos sobre la fuerza de atracción ejercida por volúmenes de revolución, en los que no habla de la función potencial sino de las tres componentes de la fuerza de atracción. En *1782*, Adrien Marie Legendre (*1752–1833*) también inicia una serie de trabajos en el mismo tema pero utilizando la función potencial. En dichos trabajos introduce los polinomios que llevan su nombre y deduce algunas de sus propiedades. También en *1782* (probablemente inspirado por el trabajo de Legendre), LaPlace escribe su célebre artículo

"*Teoría de las atracciones de los esferoides y de las figuras de los planetas*"

en el que aborda el problema de la atracción pero para un volumen arbitrario, no necesariamente de revolución y trabajando con la función potencial, y no con las componentes de la fuerza como en sus primeros trabajos. En este trabajo demuestra que el potencial satisface la ecuación de LaPlace, expresada en coordenadas esféricas, aunque no explica como obtiene la ecuación. Es en un artículo posterior donde expresa la ecuación en coordenadas rectangulares, aunque ambas formas habían sido dadas ya por Euler y Legendre. En este artículo dice, erróneamente,

que el potencial satisface también la ecuación de LaPlace en el interior del volumen, cosa que corrige en *1813* Siméon Denis Poisson (*1781–1840*), demostrando que en el interior el potencial satisface la ecuación que lleva su nombre, aunque con una demostración poco rigurosa como él mismo reconoció. La demostración rigurosa la dio en *1813* Karl Friedrich Gauss (*1777–1855*). En su artículo Poisson observa la utilidad de la función potencial en electricidad, donde el papel de la densidad de masa la tiene la carga eléctrica. Partiendo de esto George Green (*1793–1841*) dio un tratamiento puramente matemático a la electricidad estática y al magnetismo utilizando la función potencial. En *1828* publicó un artículo en el que entre otros resultados demuestra la llamada por nosotros *segunda fórmula de Green*, la cual también fue demostrada ese mismo año por el ruso Miguel Ostrogradsky (*1801–1861*).

Para mas datos de naturaleza histórica, en particular sobre el *principio de Dirichlet* y la existencia de solución en una región con valores conocidos en el borde (*problema de Dirichlet*), remitimos al lector interesado a los libros de los que hemos sacado los comentarios anteriores, en particular a las páginas 693–704, 900–906 y 928–933 del libro

Kline, Morris: "*El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*". Tomo II, Ed. Alianza Univ., N.724, 1972.

y en general al

Cajori, Florian: "*A history of mathematics*". Chelsea Pub. Co., 1985. (Reedición de la segunda edición de 1919, siendo la primera edición de 1893).

Por último el **Teorema de Picard** lo hemos seguido esencialmente por el

Goursat, Edouard: "*Cours d'analyse mathématique, Tome III*". Gauthier–Villars, 1942.

(página 254) aunque también puede encontrarse, como consecuencia de resultados mas generales, en la página 270 del Kellog. En la página 277 del Kellog también hay comentarios históricos relativos al *problema de Dirichlet*.

Fin del Tema 10

Tema 11

La Ecuación de ondas

11.1. La Ecuación de ondas unidimensional

Consideremos una cuerda flexible y uniforme con densidad de masa ρ, de longitud L, fija por sus extremos, estirada por la acción de una fuerza de tensión constante de módulo T. Supongamos que cuando la cuerda vibra lo hace en un plano, en el que consideramos un sistema de coordenadas (x, y) de modo que los extremos de la cuerda están sobre el eje x, en los puntos $(0, 0)$ y $(L, 0)$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$ denotemos con $y = y(x, t)$ la función cuya gráfica representa la forma de la cuerda en ese instante t. Si suponemos que el ángulo θ de la tangente a la cuerda respecto del eje x, en cualquier instante de su vibración, es suficientemente pequeño como para despreciar los términos θ^n, para $n \geq 2$, entonces tendremos que

$$\operatorname{sen}(\theta) = \theta \ , \quad \cos(\theta) = 1 \ , \quad \tan(\theta) = \theta,$$

y para cada $t \in \mathbb{R}$ y $x \in [0, L]$,

$$y_x(x, t) = \tan(\theta) = \operatorname{sen}(\theta).$$

En cada instante la tensión de la cuerda está actuando tangencialmente en cada punto de la cuerda y su módulo variará dependiendo de

la longitud de la cuerda en ese instante. Como la longitud de la cuerda no varía (módulo θ^2) —si, como estamos suponiendo, la desplazamos en un ángulo θ —, el módulo de la tensión tampoco varía y es T.

Consideremos ahora un $x \in [0, L]$, un $\epsilon > 0$ y el trozo de cuerda que en el instante t está entre x y $x + \epsilon$. Denotemos con θ el ángulo de la tangente a la curva en x y con $\theta + \Delta\theta$ el de $x + \epsilon$. Las fuerzas que están actuando sobre ese trozo de cuerda son la gravedad y las dos tensiones tangenciales.

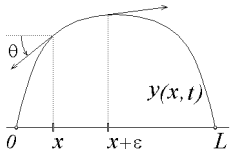


Figura 11.1. cuerda vibrante

Si denotamos con $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ los vectores de la base del plano, tendremos que la suma de las fuerzas que actúan sobre el trozo de cuerda es

$$\begin{aligned} &- \rho\epsilon g\, e_2 + T\cos(\theta + \Delta\theta)e_1 + T\,\mathrm{sen}(\theta + \Delta\theta)e_2 - \\ &\quad - T\cos(\theta)e_1 - T\,\mathrm{sen}(\theta)e_2 = \\ &= [-\rho\epsilon g + T(y_x(x + \epsilon, t) - y_x(x, t))]e_2, \end{aligned}$$

pues

$$\cos(\theta) = \cos(\theta + \Delta\theta) = 1, \qquad (\text{módulo } \theta^2).$$

Ahora esta fuerza F produce el movimiento de la cuerda y por la Segunda Ley de Newton debe ser igual a

$$ma\, e_2 = \rho\epsilon y_{tt}(x, t)e_2.$$

Dividiendo por ϵ y haciendo $\epsilon \to 0$, tenemos la ecuación

$$Ty_{xx} - \rho g = \rho y_{tt},$$

ó para $a = \sqrt{T/\rho}$,

$$a^2 y_{xx} - g = y_{tt}. \tag{11.1}$$

A menudo esta ecuación aparece en los libros sin el término $-g$,

$$a^2 y_{xx} = y_{tt} \tag{11.2}$$

Ecuación de Ondas

la cual describe el movimiento en ausencia de gravedad, pero es que cuando la densidad de masa ρ de la cuerda es pequeña en comparación

con la tensión T de la cuerda, como por ejemplo en la cuerda de una guitarra, entonces para cada solución y de 11.2 podemos considerar

$$z(x,t) = y(x,t) + x(x-L)\frac{g}{2a^2},$$

que es solución de 11.1, y si y satisface las condiciones $y(0,t) = y(L,t) = 0$ para todo t, entonces z también y se tiene que $z_t(x,t) = y_t(x,t)$ y cuando a es grande, el segundo término de z y sus derivadas es pequeño —de hecho las derivadas de orden mayor que dos de z e y coinciden—, por tanto ambas soluciones son aproximadamente iguales en todo instante, $z(x,t) \sim y(x,t)$, en el sentido de que ellas y sus derivadas difieren poco.

Esto nos lleva a estudiar las soluciones de 11.2 que satisfacen las condiciones frontera e iniciales

$$y(0,t) = y(L,t) = 0\ , \qquad y(x,0) = u(x)\ , \qquad y_t(x,0) = v(x),$$

las cuales representan el movimiento de una cuerda que vibra con los extremos fijos (**condiciones frontera**), empezando en el instante 0 con una forma determinada por u y con una velocidad v (**condiciones iniciales**).

Observemos que la ecuación de ondas está definida por un ODL en el plano xt de segundo orden, de **tipo hiperbólico**.

11.1.1. Series de Fourier.

Teorema 11.1 *El conjunto de funciones de* $[-L, L]$, *para* $n = 1, 2, \ldots$

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \phi_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad \varphi_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},$$

es ortonormal, con el producto interior

$$< f, g >= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx.$$

Demostración. Por una parte $< \phi_n, \varphi_m >= 0$, porque $\phi_n\varphi_m$ es una función impar y por otra si denotamos con u_n cualquiera de las funciones ϕ_n ó φ_n, entonces se tiene que

$$u_n'' = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 u_n, \qquad u_n(L) = u_n(-L), \quad u_n'(L) = u_n'(-L),$$

y para $n \neq m$ se sigue que

$$\begin{aligned}(m^2-n^2)\frac{\pi^2}{L^2}\int_{-L}^{L} u_n u_m &= \int_{-L}^{L} u_n'' u_m - u_m'' u_n \\ &= \int_{-L}^{L} (u_n' u_m - u_m' u_n)' \\ &= [u_n' u_m - u_m' u_n]_{-L}^{L} = 0.\end{aligned}$$

Por otro lado tienen norma 1 pues

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} \cos^2 \frac{n\pi x}{L} &= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[1+\cos\frac{2n\pi x}{L}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(2L + \frac{L}{2n\pi}\left[\operatorname{sen}\frac{2n\pi x}{L}\right]_{-L}^{L}\right) = L \\ \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} &= \int_{-L}^{L}\left[1-\cos^2\frac{n\pi x}{L}\right] = L. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Además estas funciones son base del espacio de Hilbert $L_2[-L,L]$, espacio cociente de $\mathcal{L}_2[-L,L]$ (funciones Borel medibles de cuadrado integrable) con la relación de equivalencia dada por la igualdad de funciones salvo en un conjunto de medida nula. Es decir que el menor subespacio cerrado que las contiene es el total.

Toda u de esta clase tiene una *serie de Fourier*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n,$$

donde la serie se entiende como el límite de las sumas parciales con la norma que induce el producto interior y los *coeficientes de Fourier* a_n y b_n de u, vienen dados por

$$\begin{aligned}a_0 &= < u, \phi_0 > = \frac{1}{L\sqrt{2}}\int_{-L}^{L} u(x)dx, \\ a_n &= < u, \phi_n > = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} u(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \\ b_n &= < u, \varphi_n > = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} u(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx,\end{aligned}$$

además se tiene la IGUALDAD DE PARSEVAL

$$\|u\|^2 =< u, u >= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} u^2(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Observemos que no sólo podemos definir los *coeficientes de Fourier* para funciones de cuadrado integrable en $[-L, L]$, sino también para funciones integrables —dada la acotación de nuestro sistema de funciones—, aunque para estas no necesariamente converge la serie.

Desde un punto de vista práctico nos interesa saber bajo que condiciones la *serie de Fourier* de una función u, no sólo converge en el sentido de la topología de L_2 a u, sino de la convergencia puntual o incluso de la uniforme. En este sentido el siguiente resultado es uno de los mas importantes (ver KOLMOGOROV–FOMIN, páginas 433 y 452 ó WEINBERGER, páginas $86 - 91$).

Teorema de Dirichlet 11.2 *Si $u\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, de período $2L$, en cuyos puntos de discontinuidad, si los tiene, existen los límites laterales de u y son finitos y en todo punto tiene derivadas laterales finitas, entonces se tiene que su serie de Fourier converge puntualmente, para cada $x \in [-L, L]$, al valor*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{u(x^+) + u(x^-)}{2},$$

además si u es continua y de clase 1 salvo en una colección finita de puntos, la convergencia es uniforme.

En el caso particular de que u, con nuestra condición $u(L) = u(-L)$, sea impar, es decir $u(-x) = -u(x)$, se tendrá que $u(0) = 0$, $u(L) = 0$ y los $a_n = 0$ y por tanto

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},$$

y en el caso de que u sea par, $u(-x) = u(x)$, se tiene que los $b_n = 0$ y

$$u(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

11.1.2. Solución de D'Alembert.

En primer lugar estudiaremos las soluciones de 11.2 que satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} &y(0,t) = y(L,t) = 0, && \textbf{(condiciones frontera)} \\ &y(x,0) = u(x), \quad y_t(x,0) = 0, && \textbf{(condiciones iniciales)} \end{aligned}$$

y en segundo lugar estudiaremos las que satisfacen las condiciones

$$y(0,t) = y(L,t) = 0\ , \qquad y(x,0) = 0\ , \qquad y_t(x,0) = v(x),$$

obviamente la suma de ambas soluciones satisfacen las condiciones generales.

Analicemos primero si existe alguna solución de 11.2 en variables separadas, es decir de la forma

$$y(x,t) = h(x)g(t),$$

satisfaciendo las condiciones

$$y(0,t) = y(L,t) = 0\ , \qquad y_t(x,0) = 0,$$

en cuyo caso se tendría para cualquier (x,t)

$$a^2 h''(x)g(t) = h(x)g''(t),$$

y esto ocurre si existe una constante λ para la que

$$\frac{h''(x)}{h(x)} = \frac{g''(t)}{a^2 g(t)} = -\lambda,$$

es decir si se satisfacen las ecuaciones y condiciones

$$\begin{aligned} h''(x) + \lambda h(x) = 0\ , &\quad h(0) = h(L) = 0, \\ g''(t) + a^2\lambda g(t) = 0\ , &\quad g'(0) = 0. \end{aligned}$$

Ahora bien nosotros sabemos que las únicas soluciones h no triviales con esas condiciones corresponden a

$$\lambda = \alpha_n^2\ , \qquad \alpha_n = \frac{n\pi}{L},$$

para cada $n = 1, 2, \ldots$ Y las soluciones son, para cada n, múltiplos de

$$h_n(x) = \operatorname{sen}(\alpha_n x),$$

y las soluciones g, que corresponden a estos valores de λ, son de la forma

$$g(t) = A\cos(a\alpha_n t) + B\,\mathrm{sen}(a\alpha_n t),$$

por lo que

$$g'(t) = -Aa\alpha_n \,\mathrm{sen}(a\alpha_n t) + Ba\alpha_n \cos(a\alpha_n t),$$

y $g'(0) = 0$ implica que $B = 0$, por tanto las soluciones g son múltiplos de

$$g_n(t) = \cos(a\alpha_n t).$$

Concluimos que para cada $n \geq 1$,

$$y_n(x,t) = h_n(x)g_n(t) = \mathrm{sen}(\alpha_n x)\cos(a\alpha_n t),$$

y cualquier combinación finita de ellas son soluciones de

$$a^2 y_{xx} = y_{tt}\ , \qquad y(0,t) = y(L,t) = 0\ , \qquad y_t(x,0) = 0,$$

y es de esperar que las combinaciones infinitas

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n(x) g_n(t),$$

también sean solución y que eligiendo adecuadamente las b_n se tenga la otra condición frontera, es decir la posición inicial de la cuerda

$$\begin{aligned} y(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n(x) g_n(0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\mathrm{sen}(\alpha_n x) = u(x). \end{aligned}$$

Figura 11.2. Posición inicial

Esto nos sugiere la siguiente construcción formal. Como nuestra u está definida en $[0, L]$, podemos extenderla a $[-L, L]$ de forma impar, definiendo $u(-x) = -u(x)$, y podemos considerar sus coeficientes de Fourier b_n, con los que definimos formalmente

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n(x) g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\mathrm{sen}(\alpha_n x)\cos(a\alpha_n t).$$

La cuestión consistiría en probar que esta serie converge puntualmente a una función solución de nuestra ecuación satisfaciendo las propiedades requeridas. Sin embargo no haremos esto[1], sino que seguiremos la demostración dada por D'Alembert, haciendo uso de la descripción formal anterior, que nos indicará cual es la solución

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\alpha_n x)\cos(a\alpha_n t) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\alpha_n(x+at)) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\alpha_n(x-at)), \end{aligned}$$

y por la definición de los b_n tendremos que

$$= \frac{u(x+at)+u(x-at)}{2},$$

para $u\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la extensión impar y periódica de nuestra $u\colon [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$ inicial. Esto nos sugiere considerar la función

$$y(x,t) = \frac{u(x+at)+u(x-at)}{2},$$

la cual se demuestra fácilmente que es solución satisfaciendo las condiciones iniciales. Tal solución representa un par de "ondas=olas" que se mueven hacia la derecha y hacia la izquierda, a lo largo del eje x, con velocidad constante a. Esta es la razón de llamar a esta ecuación **ecuación de ondas**.

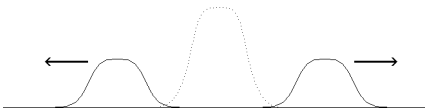


Figura 11.3. Ondas viajeras

Nos planteamos ahora la búsqueda de la solución de (11.2) satisfaciendo las condiciones

$$y(0,t) = y(L,t) = 0\ , \quad y(x,0) = 0\ , \quad y_t(x,0) = v(x).$$

Como antes consideramos las posibles soluciones $y = h(x)g(t)$ satisfaciendo

$$y(0,t) = y(L,t) = 0\ , \quad y(x,0) = 0,$$

[1] Remitimos al lector interesado en una demostración en esta linea a las pág. 99–102 del Tijonov, A.N. and Samarski, A.A.

esto implica que h y g satisfacen las ecuaciones y condiciones

$$h''(x) + \lambda h(x) = 0 \ , \quad h(0) = h(L) = 0,$$
$$g''(t) + a^2\lambda g(t) = 0 \ , \quad g(0) = 0,$$

por tanto son los múltiplos, respectivamente y para cada $n \in \mathbf{N}$, de

$$h_n(x) = \operatorname{sen}(\alpha_n x) \ , \quad g_n(t) = \operatorname{sen}(\alpha_n a t).$$

Se sigue que las combinaciones lineales finitas de $y_n = h_n g_n$, son soluciones de este problema y nos preguntamos si existirán $c_n \in \mathbb{R}$ para las que

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(\alpha_n x) \operatorname{sen}(\alpha_n a t),$$

sea la solución a nuestro problema inicial. Si así fuera, en buenas condiciones tendríamos que

$$y_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a c_n \alpha_n \operatorname{sen}(\alpha_n x) \cos(a\alpha_n t),$$
$$y_t(x,0) = v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a c_n \alpha_n \operatorname{sen}(\alpha_n x),$$

de donde se seguiría que $c_n\alpha_n a$ serían los coeficientes de *Fourier* de v —realmente de su extensión impar a $[-L, L]$—, relativos a $\operatorname{sen}(\alpha_n x)$, es decir

$$c_n = \frac{2}{La\alpha_n} \int_0^L v(x) \operatorname{sen}(\alpha_n x) dx.$$

Veamos que esta elección de c_n satisface nuestro problema. En primer lugar se tiene, como en el primer caso analizado, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a c_n \alpha_n \operatorname{sen}(\alpha_n x) \cos(a\alpha_n t) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a c_n \alpha_n}{2} [\operatorname{sen}(\alpha_n(x + ta)) + \operatorname{sen}(\alpha_n(x - at))]$$
$$= \frac{1}{2}[v(x + at) + v(x - at)],$$

lo cual nos induce a considerar, para

$$w(x) = \int_0^x v(x)dx,$$

(y su extensión par), la función

$$y(x,t) = \frac{w(x+at) - w(x-at)}{2a},$$

la cual es solución de la ecuación de ondas satisfaciendo $y(0,t) = y(L,t) = 0$ y las condiciones iniciales $y(x,0) = 0$, $y_t(x,0) = v(x)$ (demuéstrelo el lector).

Finalmente ya podemos dar la solución general de la ecuación de ondas

$$y(x,t) = \frac{u(x+at) + u(x-at)}{2} + \frac{w(x+at) - w(x-at)}{2a},$$

satisfaciendo las condiciones

$$y(0,t) = y(L,t) = 0\ , \quad y(x,0) = u(x)\ , \quad y_t(x,0) = v(x),$$

que representa la superposición de cuatro ondas viajando dos a la derecha y dos a la izquierda a velocidad constante a.

11.1.3. Energía de la cuerda.

Si $y(x,t)$ representa la forma de la cuerda en el instante t y denotamos con

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1+y_x^2}dx,$$

la nueva longitud de la cuerda, hasta el punto x, entonces como el desarrollo de Taylor del integrando es del tipo

$$\sqrt{1+y_x^2} = 1 + \frac{y_x^2}{2} + \cdots,$$

tendremos que el trabajo realizado en un elemento de cuerda dx, de la posición inicial a la nueva posición, es

$$T(ds - dx) = T(\sqrt{1+y_x^2} - 1)dx \sim \frac{Ty_x^2}{2}dx,$$

(donde hemos despreciado los términos de las potencias de y_x, de orden mayor o igual que cuatro). Esto sugiere que definamos la *energía potencial* de la cuerda completa como

$$\int_0^L \frac{Ty_x^2}{2} dx.$$

Las razones para esta definición obviamente no han sido mas que muy débilmente justificadas, sin embargo como se tiene que $y(x,t)$ es solución de la ecuación de ondas, $Ty_{xx} = \rho y_{tt}$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho}{2}y_t^2 + \frac{T}{2}y_x^2\right] &= \rho y_t y_{tt} + T y_x y_{xt} \\ &= T y_{xx} y_t + T y_x y_{xt} = \frac{\partial}{\partial x}(T y_x y_t),\end{aligned}$$

y si denotamos la *energía* de la cuerda en el instante t como la suma de las energías cinética y potencial,

$$E(t) = \int_0^L \left[\frac{\rho}{2}y_t^2 + \frac{T}{2}y_x^2\right] dx,$$

tendremos que, al ser $y(0,t) = y(L,t) = 0$

$$\begin{aligned}E'(t) &= \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho}{2}y_t^2 + \frac{T}{2}y_x^2\right] dx \\ &= \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}(T y_x y_t) dx \\ &= T\, y_x(L,t) y_t(L,t) - T\, y_x(0,t) y_t(0,t) = 0,\end{aligned}$$

y por tanto la *energía* es una constante del movimiento de la cuerda.

Ejercicio 11.1.1 Demostrar que la energía de la cuerda, si la soltamos con velocidad inicial nula y con la forma inicial definida por una función u, vale

$$E = \frac{T\pi^2}{4L}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 n^2,$$

para b_n los coeficientes de Fourier de la extensión impar de u.

Ejercicio 11.1.2 Considérese la Lagrangiana asociada a la cuerda

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\int_0^L (\rho y_t^2 - T y_x^2) dx,$$

y demuéstrese que la ecuación de ondas da un valor estacionario a la acción.

11.1.4. Unicidad de solución de la ecuación de ondas.

Nos interesa estudiar ahora la unicidad de solución de la ecuación de ondas satisfaciendo las condiciones

$$y(0,t) = y(L,t) = 0\ , \quad y(x,0) = u(x)\ , \quad y_t(x,0) = v(x).$$

Para ello observamos que si hubiese dos soluciones y_1 e y_2, entonces $y = y_1 - y_2$ también sería solución satisfaciendo las condiciones

$$y(0,t) = y(L,t) = 0\ , \quad y(x,0) = 0\ , \quad y_t(x,0) = 0,$$

y para ella se tendría que $E(t) = E(0)$, que en este caso vale

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_0^L \left[\frac{\rho}{2} y_t^2(x,t) + \frac{T}{2} y_x^2(x,t)\right] dx \\ &= \int_0^L \left[\frac{\rho}{2} y_t^2(x,0) + \frac{T}{2} y_x^2(x,0)\right] dx = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} &\frac{\rho}{2} y_t^2(x,t) + \frac{T}{2} y_x^2(x,t) = 0 \qquad \Rightarrow \\ &\quad y_t(x,t) = y_x(x,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y(x,t) = 0. \end{aligned}$$

11.1.5. Aplicaciones a la música.

Instrumentos como la guitarra, el violín o el piano emplean cuerdas vibrantes para producir sonidos que llamamos musicales. Cuando un objeto vibra, esta vibración se transmite a través del aire, en la forma de lo que llamamos *ondas sonoras*, que son vibraciones periódicas de la densidad del aire, con las frecuencias del emisor. Estas llegan al oído y las escuchamos si su frecuencia se encuentra entre 20 y 20000 ciclos por segundo.

Si escuchamos distintas ondas sonoras simultáneamente, la combinación se percibe como *armónica* si las razones de sus frecuencias son números enteros pequeños, en caso contrario el sonido nos resulta disonante.

La serie

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\alpha_n x) \cos(a\alpha_n t),$$

representa el movimiento de una cuerda como superposición de un número infinito de vibraciones con diferentes frecuencias. El término n–simo

$$b_n \operatorname{sen}(\alpha_n x)\cos(a\alpha_n t),$$

representa una vibración con una frecuencia

$$\nu_n = \frac{a\alpha_n}{2\pi} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\frac{1}{2\pi}\frac{n\pi}{L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \qquad \nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

A esta frecuencia mas baja, ν_1, se la llama *frecuencia fundamental* y en general es la que predomina en el sonido de la cuerda. La frecuencia $\nu_n = n\nu_1$ se la llama n–simo *sobretono* o *armónico*, por esta razón el sonido de una cuerda de guitarra suena agradablemente.

Observemos que la frecuencia fundamental de una cuerda no depende para nada de las condiciones iniciales en las que empiece su movimiento. Es una particularidad inherente a la cuerda (siempre que nos atengamos a que el desplazamiento sea pequeño). Además su inversa es el período, el tiempo que tarda cualquier punto de la cuerda en bajar y subir y que es también el tiempo que tardan las dos ondas en las que se separa u, que viajan a derecha e izquierda a velocidad $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, en recorrer la distancia $2L$, tras lo cual vuelven a unirse para dar u de nuevo.

Lo que sí depende de las condiciones iniciales, es el mayor o menor valor que tengan los coeficientes b_n, y estas condiciones afectan al *timbre* del sonido, que es la forma en que están combinadas todas las frecuencias. Una cuerda de la guitarra tocada con la yema del dedo o con una púa sonará de forma distinta. Por otra parte una nota como el **Do** tocada en un piano y la misma nota tocada con un violín o con una guitarra, sonará distinta —con distinto timbre— y la diferencia estará no sólo en los valores de los coeficientes b_n —que por supuesto serán distintos pues las condiciones iniciales lo serán si en vez de golpear la cuerda (en el piano), la tocamos con una uña (en la guitarra) ó la rozamos con un arco (en el violín)—, sino en la forma de la caja en la que resuena el sonido.

Observemos también que la frecuencia fundamental no varía si modificamos la tensión y aumentamos —o disminuimos— la longitud de la cuerda de forma que

$$\frac{\sqrt{T}}{2L},$$

permanezca constante, o que si disminuimos la cuerda a la mitad manteniendo la tensión, obtenemos una frecuencia doble, es decir una octava mas alta. Hágase la prueba en una guitarra.

11.2. La Ecuación de ondas bidimensional.

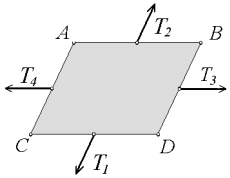


Figura 11.4. Fuerzas sobre una membrana

Consideremos una membrana elástica —como la membrana de un tambor— con la forma del cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$ en el plano xy, con vertices $A=(-1,-1)$, $B=(-1,1)$, $C=(1,-1)$ y $D=(1,1)$ y estirada por la acción de cuatro fuerzas de módulo $2T$ constante, que actúan respectivamente sobre cada lado del cuadrado en las direcciones de los ejes: $T_1=2Te_1$, actuando sobre el lado CD; $T_2=-2Te_1$, sobre AB; $T_3=2Te_2$ sobre BD y $T_4=-2Te_2$, sobre AC; donde $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ y $e_3=(0,0,1)$ son los vectores de la base de $\mathbb{R}^3$.

Supondremos que sobre cada franja de la membrana del tipo $[x,x+a]\times[-1,1]$, el módulo de las dos fuerzas que actúan en la dirección del eje y es aT, lo cual es empíricamente evidente.

Supongamos que la membrana tiene una densidad de masa superficial uniforme ρ y que fijamos la membrana sobre una curva cerrada ∂U, borde de un abierto $U\subset[-1,1]^2$ simplemente conexo, es decir "sin agujeros". Supongamos además que las vibraciones de la membrana son de amplitud tan pequeña que el ángulo θ que forma el plano tangente a la membrana y el plano xy, en cualquier punto y en cualquier instante de su vibración, es suficientemente pequeño como para despreciar los términos θ^n, para $n\geq 2$.

En cuyo caso tendremos que $\operatorname{sen}\theta=\theta$, $\cos\theta=1$ y $\tan\theta=\theta$ y el plano tangente a la superficie en cualquier instante no puede ser vertical, por lo que la superficie es representable como gráfica de una función del plano. Esto nos permite denotar, para cada $t\in\mathbb{R}$, con $z=z(x,y,t)$ la función cuya gráfica nos da la forma de la membrana en el instante t y

para cada $t \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \overline{U}$,

$$z_x(x, y, t) = \tan\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_1, \quad z_y(x, y, t) = \tan\theta_2 = \operatorname{sen}\theta_2.$$

La tensión de la membrana en un instante, está actuando tangencialmente en cada punto de la membrana, en todas las direcciones y su módulo varía dependiendo del área de la membrana en ese instante. Como el área de la membrana no varía (módulo θ^2) —si, como estamos suponiendo, la desplazamos en un ángulo θ —, el módulo de la tensión tampoco varía.

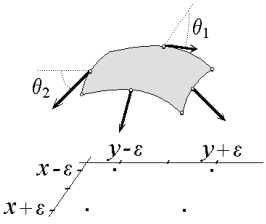


Figura 11.5. Membrana vibrante

Consideremos ahora un punto $(x, y) \in U$, un $\epsilon > 0$ pequeño y el trozo de membrana que en el instante t está sobre el cuadrado $[x-\epsilon, x+\epsilon] \times [y-\epsilon, y+\epsilon]$. Denotemos con θ_2 y con $\theta_2 + \Delta\theta_2$, respectivamente, el ángulo que forman el plano xy y las rectas tangentes a la superficie en $(x, y-\epsilon)$ y $(x, y+\epsilon)$, en la dirección del eje y, y con θ_1 y con $\theta_1 + \Delta\theta_1$ el de las rectas tangentes en $(x-\epsilon, y)$ y $(x+\epsilon, y)$, en la dirección del eje x. Las fuerzas que están actuando sobre ese trozo de membrana son la gravedad y las cuatro tensiones tangenciales.

Se sigue que las 5 fuerzas que actúan sobre el trozo de membrana son

$$\begin{aligned}
T_1 &= 2\epsilon T(\cos(\theta_1 + \Delta\theta_1), 0, \operatorname{sen}(\theta_1 + \Delta\theta_1)),\\
T_2 &= -2\epsilon T(\cos\theta_1, 0, \operatorname{sen}\theta_1),\\
T_3 &= 2\epsilon T(0, \cos(\theta_2 + \Delta\theta_2), \operatorname{sen}(\theta_2 + \Delta\theta_2)),\\
T_4 &= -2\epsilon T(0, \cos\theta_2, \operatorname{sen}\theta_2),\\
F &= (0, 0, -4\epsilon^2\rho g),
\end{aligned}$$

y por nuestra hipótesis, las componentes x e y de su suma se anulan, por lo que la fuerza resultante tiene la dirección del eje z y es

$$\begin{aligned}
-2\epsilon\rho g - T(z_x(x-\epsilon, y, t) + T(z_x(x+\epsilon, y, t) -\\
-T(z_y(x, y-\epsilon, t) + T(z_y(x, y+\epsilon, t)]2\epsilon e_3.
\end{aligned}$$

Ahora esta fuerza produce el movimiento de la membrana y por la Segunda Ley de Newton debe ser igual a

$$4\epsilon^2\rho z_{tt}(x, y, t)e_3.$$

por tanto se tiene que cuando la membrana vibra, cada punto lo hace en el eje z perpendicular al plano de la membrana. Ahora dividiendo por $4\epsilon^2$ y haciendo $\epsilon \to 0$, tenemos la **ecuación de ondas bidimensional**

$$T(z_{xx} + z_{yy}) - \rho g = \rho z_{tt},$$

ó para $a = \sqrt{T/\rho}$,

$$a^2(z_{xx} + z_{yy}) - g = z_{tt}, \tag{11.3}$$

la cual está definida por un ODL de segundo orden, en el espacio xyt.

A menudo esta ecuación aparece en los libros sin el término $-g$,

$$a^2(z_{xx} + z_{yy}) = z_{tt}, \tag{11.4}$$

la cual describe el movimiento en ausencia de gravedad.

Además se tiene que cuando la curva sobre la que fijamos la membrana es una circunferencia y la densidad de masa ρ de la membrana es pequeña en comparación con la tensión T de la membrana, como en la membrana de un tambor, entonces para cada solución z de 11.4, que se anule sobre la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$, la función

$$\overline{z}(x, y, t) = z(x, y, t) + (x^2 + y^2 - 1)\frac{g}{4a^2},$$

es solución de 11.3, satisfaciendo la misma condición frontera, tiene la misma velocidad en cualquier instante que z y es aproximadamente z en el mismo sentido que en el caso unidimensional. Para otro borde cerrado, $\{f = 0\}$, con f es buenas condiciones, como que ella y todas sus derivadas estén uniformemente acotadas en $\{f = 0\}$, basta cambiar en la expresión anterior $x^2 + y^2 - 1$ por f.

Esto nos lleva a estudiar las soluciones de 11.4 que satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} &z(x, y, t) = 0, \qquad \text{para los puntos de } x^2 + y^2 = 1, \\ &z(x, y, 0) = u(x, y)\ , \qquad \frac{\partial z}{\partial t}(x, y, 0) = v(x, y), \end{aligned}$$

las cuales representan el movimiento de una membrana fija en la circunferencia unidad, que en el instante 0 tiene una forma determinada por u y una velocidad determinada por v.

11.2.1. Solución de la ecuación de ondas.

Consideremos en el plano xy el sistema de coordenadas polares (ρ, θ) y la ecuación de ondas en las coordenadas (ρ, θ, t). Se demuestra fácilmente que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

por tanto la ecuación de ondas, en las coordenadas (ρ, θ, t), se expresa de la forma

$$a^2(z_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} z_\rho + \frac{1}{\rho^2} z_{\theta\theta}) = z_{tt}.$$

En primer lugar buscamos soluciones de la forma

$$z = f(\rho)g(\theta)h(t),$$

para las cuales debe verificarse

$$a^2 \left(\frac{f''(\rho)}{f(\rho)} + \frac{1}{\rho}\frac{f'(\rho)}{f(\rho)} + \frac{1}{\rho^2}\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} \right) = \frac{h''(t)}{h(t)}, \tag{11.5}$$

y por tanto las dos partes de la ecuación deben de ser iguales a una constante, pues dependen de distintas coordenadas, es decir que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} h''(t) + \lambda a^2 h(t) &= 0, \\ \frac{f''(\rho)}{f(\rho)} + \frac{1}{\rho}\frac{f'(\rho)}{f(\rho)} + \frac{1}{\rho^2}\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} &= -\lambda. \end{aligned}$$

Ahora bien si λ es negativa, $\lambda = -\alpha^2$, la solución de la primera ecuación es de la forma

$$h(t) = c_1 e^{a\alpha t} + c_2 e^{-a\alpha t},$$

y la correspondiente solución $z \to \infty$ ó $z \to 0$, cuando $t \to \infty$, —ó $z \to -\infty$, dependiendo del signo de las constantes—, lo cual implica que no es una solución que represente a la membrana vibrando. Algo similar ocurre si $\lambda = 0$, en cuyo caso h es afín. No obstante en (11.10), pág.900, veremos que sólo para $\lambda \geq 0$ existen soluciones f y g verificando que en el borde la función producto fgh, se anula.

Consideremos pues el caso en que λ es positiva, $\lambda = \alpha^2$ para $\alpha > 0$, en cuyo caso las ecuaciones son

$$h''(t) + \alpha^2 a^2 h(t) = 0,$$
$$\rho^2 \frac{f''(\rho)}{f(\rho)} + \rho \frac{f'(\rho)}{f(\rho)} + \alpha^2 \rho^2 = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)},$$

la solución de la primera ecuación es

$$h(t) = c_1 \cos(a\alpha t) + c_2 \operatorname{sen}(a\alpha t),$$

y para la segunda ecuación, como los dos lados de la igualdad son funciones de distintas coordenadas, son una misma constante μ. Ahora bien como la solución de $g''(\theta) + \mu g(\theta) = 0$ debe ser periódica, la única posibilidad es que $\mu = n^2$, para cada natural n (demuéstrelo el lector). Por tanto la segunda ecuación da lugar a las dos ecuaciones

$$g''(\theta) + n^2 g(\theta) = 0,$$
$$\rho^2 f''(\rho) + \rho f'(\rho) + (\alpha^2 \rho^2 - n^2) f(\rho) = 0,$$

la primera de las cuales tiene solución

$$g(\theta) = d_1 \cos(n\theta) + d_2 \operatorname{sen}(n\theta),$$

y la segunda es la **Ecuación de Bessel** (ver la pág.248)

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - p^2) y(x) = 0,$$

donde $x = \alpha\rho$ y $p = n$, por tanto tiene soluciones

$$f(\rho) = k J_n(\alpha\rho),$$

para J_n la **función de Bessel** de orden n, solución de la Ecuación de Bessel para $p = n$.

Ahora bien buscamos las soluciones que satisfagan

$$z(1, \theta, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_n(\alpha) = 0,$$

es decir que $\alpha = \alpha_{ni}$ es una de las infinitas raíces de J_n. Por lo tanto las combinaciones lineales finitas de las funciones $z(\rho, \theta, t)$ de la forma

$$J_n(\alpha_{ni}\rho)[d_1 \cos(n\theta) + d_2 \operatorname{sen}(n\theta)][c_1 \cos(a\alpha_{ni} t) + c_2 \operatorname{sen}(a\alpha_{ni} t)],$$

son soluciones de nuestra ecuación, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, α_{ni} raíz de J_n y d_1, d_2, c_1, c_2 constantes.

Si ahora consideramos que la velocidad inicial es nula

$$z_t(\rho, \theta, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0,$$

nos quedan las soluciones de la forma

$$z(\rho, \theta, t) = J_n(\alpha_{ni}\rho)[d_1 \cos(n\theta) + d_2 \operatorname{sen}(n\theta)] \cos(a\alpha_{ni}t),$$

y sus combinaciones lineales finitas. Por último si además consideramos la condición inicial del tipo

$$z(\rho, \theta, 0) = k(\rho, \theta) = k(\rho) \quad \Rightarrow \quad n = 0,$$

las únicas posibles soluciones del tipo anterior corresponden a $n = 0$ y si denotamos con α_i las raíces de J_0, las soluciones son las funciones de la forma

$$z(\rho, \theta, t) = J_0(\alpha_i\rho) \cos(a\alpha_i t),$$

y sus combinaciones lineales finitas.

Ahora bien el **Teorema de Fourier–Bessel** asegura que dada una función $k = k(\rho)$, con $k(1) = 0$ y ciertas propiedades —en particular si es continua en $[0, 1]$ y derivable salvo en un número finito de puntos en los que la derivada tiene límites laterales finitos, entonces se tiene que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\alpha_n \rho),$$

para los coeficientes

$$c_n = \frac{2}{J_1(\alpha_n)^2} \int_0^1 \rho k(\rho) J_0(r_n \rho) d\rho,$$

converge puntualmente a la función $k(\rho)$ en $[0, 1]$. (Ver Watson).

Por tanto hemos construido una serie formal

$$z(\rho, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\alpha_n \rho) \cos(a\alpha_n t),$$

para α_n las raíces de J_0, que está formada por soluciones de nuestra ecuación y que al menos formalmente, satisface las condiciones frontera y las condiciones iniciales. En el Weinberger, páginas $193 - -196$ se

demuestra de forma mas general que si la función $k = k(\rho, \theta)$ es suficientemente regular, entonces eligiendo los coeficientes c_n como antes y convenientemente los coeficientes c_{ni}, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\alpha_n \rho)\cos(a\alpha_n t) + \\ + \sum_{n,i=1}^{\infty} c_{ni} J_n(\alpha_{ni}\rho)[d_1\cos(n\theta) + d_2\,\mathrm{sen}(n\theta)]\cos(a\alpha_{ni}t),$$

converge uniformemente a una función que es solución de la ecuación de ondas, satisfaciendo las condiciones

$$z(1,\theta,t) = 0, \quad z(\rho,\theta,0) = k(\rho,\theta), \quad z_t(\rho,\theta,0) = 0.$$

11.3. La Ecuación de ondas n–dimensional.

11.3.1. La desigualdad del dominio de dependencia.

La ecuación de ondas n–dimensional, es

$$u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n} - u_{tt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta u - u_{tt} = 0,$$

en las coordenadas (x_i, t) de $\mathbb{R}^{n+1}$, y está definida por el ODL de tipo hiperbólico, $\Delta - \partial_{tt}$, que para $n = 3$ llamamos *D'Alembertiano* (ver pág.924, aunque el signo está cambiado). Su símbolo $\mathbf{T}^2$, nos permite definir un isomorfismo de módulos $\gamma\colon \Omega(\mathbb{R}^{n+1}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, tal que $\gamma(\omega) = i_\omega \mathbf{T}^2 \in T_0^1(\mathbb{R}^{n+1}) \sim \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$. Denotaremos con $\mathbf{T}_2$, el tensor covariante correspondiente

$$\mathbf{T}_2\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}),$$
$$\mathbf{T}_2(D_1, D_2) = \mathbf{T}^2(\gamma^{-1}D_1, \gamma^{-1}D_2),$$

que en coordenadas es

$$\mathbf{T}_2 = dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n - dt \otimes dt.$$

Consideremos en cada punto $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ el conjunto de los vectores $D_a = \sum \xi_i \partial x_i + \eta \partial t \in T_a(\mathbb{R}^{n+1})$ isótropos para $\mathbf{T}_2$, es decir tales que $\mathbf{T}_2(D_a, D_a) = 0$, los cuales forman un cono $\sum \xi_i^2 - \tau^2 = 0$.

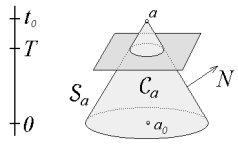


Figura 11.6. cono característico

Definición. Llamamos *hipersuperficie característica* a cada cono $\mathcal{S}_a$ de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2-(t-t_0)^2=0,$$

con vértice en $a = (t_0, a_0) = (a_1, \ldots, a_n, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, correspondiente al cono de vectores isótropos en a. Si consideramos $t_0 > 0$ y denotamos con

$$\mathcal{C}_a = \{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 \leq (t - t_0)^2,\ 0 \leq t \leq t_0\},$$

la parte positiva e inferior del cono sólido, entonces tendremos que para cada $T \leq t_0$ la intersección

$$\mathcal{C}_a \cap \{t = T\} = \{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 \leq (t_0 - T)^2\}$$

se identifica con la bola cerrada de $\mathbb{R}^n$, $B[a_0, t_0 - T]$, centrada en a_0 y de radio $t_0 - T$. Por último denotaremos con

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_a \cap \{t \leq T\},$$

el tronco de cono sólido entre los hiperplanos $t = 0$ y $t = T$.

Nota 11.3 Recordemos que para $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ cualquier variedad con borde, N el vector unitario normal exterior a $\partial\mathcal{C}$, D cualquier campo tangente de $\mathbb{R}^{n+1}$ y para la forma de volumen

$$\omega = dt \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

el **Teorema de Stokes**, (14.12), pág.988 nos asegura que

$$\int_{\mathcal{C}} (\operatorname{div} D)\, \omega = \int_{\partial\mathcal{C}} i_D \omega = \int_{\partial\mathcal{C}} < D, N > i_{\partial_n} \omega, \tag{11.6}$$

donde la última igualdad se sigue fácilmente si extendemos N con una base $D_1, \ldots, D_n$, de campos tangentes a $\partial\mathcal{C}$, ortonormales, de tal modo que

$$\omega(N, D_1, \ldots, D_n) = 1,$$

entonces para cualquier campo

$$D = \sum_{i=1}^{n} < D, D_i > D_i + < D, N > N,$$

tendremos que en $\partial\mathcal{C}$, $i_D\omega = f \cdot i_N\omega$, para

$$f = i_D\omega(D_1, \ldots, D_n) = \omega(D, D_1, \ldots, D_n) =< D, N > .$$

Ahora volviendo a considerar nuestro tronco de cono $\mathcal{C}$, tenemos que $\partial\mathcal{C}$ está formado por tres hipersuperficies, la parte de arriba del tronco de cono $\mathcal{S}_1$ —que se identifica con la bola $B[a_0, t_0 - T]$—, en la que $N = \partial_t$; la de abajo $\mathcal{S}_2$ —que se identifica con $B[a_0, t_0]$—, en la que $N = -\partial_t$; y la superficie cónica, llamémosla $\mathcal{S}$, en la que

$$N = \sum_{i=1}^{n} n_i \frac{\partial}{\partial x_i} + n_t \frac{\partial}{\partial t},$$

verifica

$$\left.\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} n_i^2 + n_t^2 = 1, & \text{(por ser } N \text{ unitario)}, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} n_i^2 - n_t^2 = 0, & \text{(por ser } \mathcal{S} \text{ característica)}. \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad n_t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Aunque nos estamos limitando —y lo seguiremos haciendo—, al semiespacio $t \geq 0$, no hay pérdida de generalidad en ello, pues con un cambio de coordenadas del tipo $\bar{t} = -t$, la ecuación de ondas permanece invariante, por lo que el estudio correspondiente a $t \leq 0$ se reduce al que vamos a hacer.

En estos términos se tiene el siguiente resultado.

Teorema de la desigualdad del dominio de dependencia 11.4
Sea $a = (a_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, con $t_0 > 0$ y sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ que contiene a $\mathcal{C}_a$. Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ es solución de la ecuación de ondas en $\mathcal{C}_a$, entonces para cada $0 \leq T \leq t_0$ se tiene

$$\int_{B[a_0, t_0 - T]} \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u_t^2 \Big)_{|t=T} dx_1 \cdots dx_n \leq$$

$$\leq \int_{B[a_0, t_0]} \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u_t^2 \Big)_{|t=0} dx_1 \cdots dx_n.$$

Demostración. Por ser solución de la ecuación de ondas se tiene la igualdad

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u_t^2\Big)_t = 2\sum_{i=1}^{n} u_{x_i} u_{x_i t} + 2u_t u_{tt} = \sum_{i=1}^{n} (2u_t u_{x_i})_{x_i},$$

por lo que si consideramos el campo tangente (cuya divergencia es nula por la igualdad anterior)

$$D = \sum_{i=1}^{n} 2u_t u_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u_t^2\Big)\frac{\partial}{\partial t} \tag{11.7}$$

se sigue de lo dicho antes del teorema que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathcal{C}} (\operatorname{div} D)\,\omega = \int_{\partial\mathcal{C}} < D, N > i_N\omega \\
&= \int_{\mathcal{S}} < D, N > i_N\omega + \int_{\mathcal{S}_1} < D, \partial_t >_{|t=T} i_N\omega + \\
&\qquad + \int_{\mathcal{S}_2} < D, -\partial_t >_{|t=0} i_N\omega \\
&= \int_{\mathcal{S}} < D, N > i_N\omega - \\
&\qquad - \int_{B[a_0,t_0-T]} \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u_t^2\Big)_{|t=T} dx_1\cdots dx_n + \\
&\qquad + \int_{B[a_0,t_0]} \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u_t^2\Big)_{|t=0} dx_1\cdots dx_n,
\end{aligned}$$

y el resultado se sigue porque en $\mathcal{S}$, $\sum n_i^2 = n_t^2 = 1/2$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
< D, N > &= \sum_{i=1}^{n} 2u_t u_{x_i} n_i - \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u_t^2\Big) n_t \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2u_t u_{x_i} n_i - \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u_t^2\Big)\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2}\left[\sum_{i=1}^{n} 2u_t u_{x_i} n_i n_t - \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u_t^2\Big) n_t^2\right] \\
&= -\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n} \big(u_{x_i} n_t - n_i u_t\big)^2 \le 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

11.3.2. Unicidad de solución.

Teorema 11.5 *Sea $a = (a_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, con $t_0 > 0$ y sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ que contiene al cono sólido $\mathcal{C}_a$. Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ es solución de la ecuación de ondas en $\mathcal{C}_a$, tal que en la base inferior de $\mathcal{C}_a$,*

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \qquad \text{para } x \in B[a_0, t_0],$$

entonces $u = 0$ en $\mathcal{C}_a$.

Demostración. Es una simple consecuencia del resultado anterior, pues por la hipótesis $u_{x_i} = 0$ en $t = 0$ y $x \in B[a_0, t_0]$, por tanto para todo $0 \leq T \leq t_0$

$$0 \leq \int_{B[a_0, t_0 - T]} \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u_t^2 \Big)_{|_{t=T}} dx_1 \cdots dx_n \leq 0,$$

por lo que el integrando se anula y por tanto $u_{x_i} = u_t = 0$ en todo punto de $\mathcal{C}_a$. Esto implica que u es constante en $\mathcal{C}_a$ y como en su base se anula, $u = 0$ en $\mathcal{C}_a$. ∎

Corolario 11.6 *Si u_1 y u_2 son soluciones de la ecuación de ondas, en las condiciones anteriores, tales que*

$$u_1(x,0) = u_2(x,0), \quad u_{1t}(x,0) = u_{2t}(x,0), \qquad \text{para } x \in B[a_0, t_0],$$

entonces $u_1 = u_2$ en $\mathcal{C}_a$.

Teorema de Unicidad 11.7 *Si u_1 y u_2 son de clase 2 en un abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$, que contiene a $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ y son soluciones de la ecuación de ondas satisfaciendo las mismas condiciones iniciales*

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}^n,$$

entonces $u_1 = u_2$.

La importancia de este resultado es obvia sin embargo el anterior nos da más información, pues nos asegura que conociendo u y u_t en la base del cono, la solución u queda determinada de modo único en todo el cono.

Teorema de la Conservación de la Energía 11.8 *Si u es una solución de la ecuación de ondas, de clase 2 en un abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ que contiene a $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$, que fuera de una bola $B(0,r_0) \subset \mathbb{R}^n$, $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$, entonces*

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2\Big)_{|t=T} dx_1 \cdots dx_n = \\ = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2\Big)_{|t=0} dx_1 \cdots dx_n,$$

para cada T.

Demostración. En primer lugar $u = 0$ en el abierto

$$\mathcal{A} = \{(a_0,t_0) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|a_0\| > r_0 + t_0\},$$

y esto como consecuencia de los resultados anteriores, porque u y u_t se anulan en la base de $\mathcal{C}_a$, para cada $a = (a_0,t_0) \in \mathcal{A}$, ya que para cada $x \in B[a_0,t_0]$,

$$\|x\| + t_0 \geq \|x\| + \|x - a_0\| \geq \|a_0\| > r_0 + t_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Ahora basta seguir la demostración de la desigualdad del dominio de dependencia, pero considerando (para $R > r_0$) un cilindro

$$B[0,R+T] \times [0,T],$$

en vez de un cono, pues en este caso

$$0 = \int_{\mathcal{S}} < D,N > i_N\omega - \\ - \int_{B[0,R+T]} \Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2\Big)_{|t=T} dx_1 \cdots dx_n + \\ + \int_{B[0,R+T]} \Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2\Big)_{|t=0} dx_1 \cdots dx_n,$$

para $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ la superficie del cilindro, en cuyo caso $n_t = 0$ y

$$< D,N >= \sum_{i=1}^n 2u_t u_{x_i} n_i = 0.$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+u_t^2\Big)_{|t=T}\,dx_1\cdots dx_n &= \\ &= \int_{B[0,R+T]}\Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+u_t^2\Big)_{|t=T}\,dx_1\cdots dx_n \\ &= \int_{B[0,R+T]}\Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+u_t^2\Big)_{|t=0}\,dx_1\cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+u_t^2\Big)_{|t=0}\,dx_1\cdots dx_n. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

11.3.3. Ecuación de ondas en regiones con frontera.

Vamos a estudiar ahora la ecuación de ondas n–dimensional, $\Box u = 0$, en regiones con frontera, cuyos casos particulares 1–dimensional y bidimensional hemos estudiado en la forma de la cuerda fijada en los extremos de un segmento y de la membrana fijada en una circunferencia. Vamos a considerar un abierto acotado $U \subset \mathbb{R}^n$, en el que el **Teorema de Stokes**, (14.12), pág.988 es válido, y vamos a buscar soluciones satisfaciendo una de las dos **condiciones frontera**

$$\begin{gathered}u(x,t)=0, \quad \text{para } x\in\partial U \text{ y } t\geq 0,\\ \text{ó}\\ Nu(x,t)=0, \quad \text{para } x\in\partial U \text{ y } t\geq 0,\end{gathered}$$

para N el campo unitario ortogonal exterior a ∂U, extendido a $\mathbb{R}^{n+1}$. Esto incluye como casos particulares los problemas ya estudiados, con la primera condición, de la cuerda y membrana vibrantes.

Teorema de la Conservación de la Energía 11.9 *Si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ que contiene a $\overline{U}\times[0,\infty)$ y $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)$ es una solución de la ecuación de ondas, satisfaciendo una de las dos condiciones frontera, entonces*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_U\Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+u_t^2\Big)_{|t=T}\,dx_1\cdots dx_n &= \\ &= \frac{1}{2}\int_U\Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+u_t^2\Big)_{|t=0}\,dx_1\cdots dx_n,\end{aligned}$$

para cada $T \geq 0$.

Demostración. Consideremos el cilindro

$$\mathcal{C} = \{(x,t) : x \in \overline{U}, t \in [0,T]\},$$

en cuyo caso

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mathcal{S}} < D, N > i_N \omega - \\ - \int_U \Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \Big)_{|_{t=T}} dx_1 \cdots dx_n + \\ + \int_U \Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \Big)_{|_{t=0}} dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

para $\mathcal{S}$ la superficie del cilindro, en cuyo caso $n_t = 0$ y en cualquiera de las condiciones frontera se tiene que en $\mathcal{S}$

$$< D, N >= \sum_{i=1}^n 2u_t u_{x_i} n_i = 2u_t \cdot Nu = 0. \quad \blacksquare$$

Si ahora consideramos que la solución satisface además las **condiciones iniciales**

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \qquad \text{para } x \in \overline{U},$$

tendremos por el resultado anterior que la energía en cualquier instante $t = T$ vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_U \Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 \Big)_{|_{t=T}} dx_1 \cdots dx_n = \\ = \frac{1}{2} \int_U \Big(\sum_{i=1}^n f_{x_i}^2 + g^2 \Big) dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

de donde se deduce fácilmente el **Teorema de Unicidad** de solución del problema inicial–frontera (hágalo el lector como ejercicio).

11.3.4. El método de separación de variables.

Consideremos como antes un abierto acotado $U \subset \mathbb{R}^n$, en el que el **Teorema de Stokes**, (14.12), pág.988 es válido, y consideremos las

soluciones en variables separadas, $u(x,t) = f(x)g(t)$, de la ecuación de ondas n–dimensional

$$\Delta u - u_{tt} = 0, \qquad \text{para } x \in U \text{ y } t > 0$$

(donde Δ es el *operador de LaPlace* n–dimensional), satisfaciendo la **condición frontera**

$$u(x,t) = 0, \quad \text{para } x \in \partial U \text{ y } t \geq 0.$$

En tal caso las funciones f y g deben satisfacer

$$\begin{aligned} \Delta f + \lambda f = 0, &\quad \text{para } x \in U, \quad \text{y} \quad f = 0, \quad \text{para } x \in \partial U, \\ g'' + \lambda g = 0, &\quad \text{para } t > 0, \end{aligned}$$

ahora bien este problema tiene solución $f \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\overline{U})$, sólo para ciertos valores de λ, a los que llamamos *autovalores* del problema y a las correspondientes soluciones f *autofunciones*, y que tienen las siguientes propiedades de las que nosotros sólo daremos la demostración de las dos primeras, y para las demás remitimos al lector a la p. 323 del libro Zachmanoglou and Thoe, donde se da referencia de ellas, en alguna de las cuales se precisan propiedades adicionales de regularidad para la frontera ∂U.

Proposición 11.10 *Se tienen las siguientes propiedades:*

i.- *Todos los autovalores son positivos.*

ii.- *Si f_1 y f_2 son autofunciones correspondientes a autovalores λ_1 y λ_2 distintos, entonces son ortogonales*

$$< f_1, f_2 >= \int_U f_1 f_2 dx_1 \cdots dx_n = 0.$$

iii.- *Los autovalores son numerables y forman una sucesión $\lambda_n \to \infty$.*

iv.- *Cada autovalor tiene un número finito —llamado multiplicidad del autovalor—, de autofunciones independientes.*

v.- *Cada autofunción es analítica en U y se extiende con continuidad al borde de U.*

Demostración. (i) Como se tiene que para un campo $D = \sum f_i \partial_i$ y para una función f

$$\operatorname{div} fD = \sum (f f_i)_{x_i} =< \operatorname{grad} f, D > + f \cdot \operatorname{div} D, \tag{11.8}$$

tendremos que para f autofunción correspondiente al autovalor λ, el campo N unitario y ortogonal exterior a ∂U y para $D = \operatorname{grad} f$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial U} < fD, N > i_N\omega = \int_U (\operatorname{div} fD)\omega \\ &= \int_U (< D, D > + f\Delta f)\omega = \int_U < D, D > \omega - \lambda \int_U f^2\omega. \end{aligned}$$

(ii) Consideremos

$$\begin{aligned} &\Delta f_1 + \lambda_1 f_1 = 0, \quad \text{para } x \in U, \quad \text{y} \quad f_1 = 0, \quad \text{para } x \in \partial U, \\ &\Delta f_2 + \lambda_2 f_2 = 0, \quad \text{para } x \in U, \quad \text{y} \quad f_2 = 0, \quad \text{para } x \in \partial U, \end{aligned}$$

entonces tendremos que

$$f_2\Delta f_1 - f_1\Delta f_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) f_1 f_2,$$

por lo que aplicando (11.8) a $f = f_1$ y $D = D_2 = \operatorname{grad} f_2$ y después a $f = f_2$ y $D = D_1 = \operatorname{grad} f_1$, tendremos que

$$\begin{aligned} (\lambda_2 - \lambda_1) \int_U f_1 f_2 &= \int_U f_2\Delta f_1 - f_1\Delta f_2 \\ &= \int_U \operatorname{div} f_2 D_1 - \operatorname{div} f_1 D_2 \\ &= \int_{\partial U} < f_2 D_1, N > - < f_1 D_2, N >= 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Podemos considerar por tanto un orden en los autovalores

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \to \infty,$$

donde cada uno lo consideramos tantas veces como indica su multiplicidad y considerar para cada autovalor λ_n una autofunción f_n, de modo que todas sean ortogonales, para lo cual basta considerar el procedimiento de ortogonalización de *Gramm–Schmitz* en cada subespacio finito dimensional de autofunciones del autovalor, puesto que las autofunciones de distintos autovalores ya sabemos que son ortogonales. Además se tiene el siguiente resultado fundamental que tampoco demostraremos, sobre las autofunciones f_n.

Teorema de expansión de autofunciones 11.11 *Sea $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, para un abierto Ω que contiene a $\overline{U}$, tal que $f(x) = 0$ para los $x \in \partial U$. Entonces f puede representarse por una serie*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x),$$

que converge absoluta y uniformemente a f en $\overline{U}$ y donde los coeficientes están dados por

$$a_n = \frac{< f, f_n >}{< f_n, f_n >}.$$

Ejercicio 11.3.1 Demostrar que la ecuación de ondas bidimensional

$$z_{xx} + z_{yy} - z_{tt} = 0,$$

con la condición frontera en el rectángulo $[0, a] \times [0, b]$

$$z(x, 0, t) = z(x, b, t) = z(0, y, t) = z(a, y, t) = 0,$$

tiene autovalores y correspondientes autofunciones

$$\lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right),$$
$$f_{mn} = \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b},$$

¿Tiene algún otro autovalor?.

11.4. El método del descenso.

11.4.1. La Fórmula de Kirchhoff.

En esta lección vamos a dar en primer lugar la expresión de la solución de la ecuación de ondas tridimensional

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3} - u_{tt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Box u = 0,$$

que aparece en la teoría de ondas sonoras de pequeña amplitud, satisfaciendo condiciones iniciales del tipo

$$u(x,0) = \phi(x) \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3), \qquad u_t(x,0) = \psi(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3), \tag{11.9}$$

la cual ya hemos demostrado (ver la pág.896), que de existir es única.

El siguiente resultado nos permite simplificar el problema original y es válido en general para la ecuación de ondas n–dimensional.

Lema (Regla de Stokes) 11.12 *Si u es una solución de la ecuación de ondas de clase 3, satisfaciendo las condiciones*

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = f(x),$$

entonces $v = u_t$ es solución de la ecuación de ondas, satisfaciendo las condiciones

$$v(x,0) = f(x), \qquad v_t(x,0) = 0.$$

Demostración. Se deja al lector. ∎

Si en el lema anterior denotamos con u^ψ la solución u correspondiente a $f = \psi$, y con u^ϕ la correspondiente a $f = \phi$, tendremos que

$$u = u^\psi + u_t^\phi,$$

es la solución de la ecuación de ondas satisfaciendo las condiciones originales 11.9

$$\Box u = 0, \quad u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x).$$

Esto nos permite simplificar nuestro problema, que ahora consiste en hallar la solución de la ecuación de ondas, satisfaciendo las condiciones iniciales

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = f(x). \tag{11.10}$$

Para el siguiente resultado denotaremos con

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

por N entenderemos en general el campo tangente unitario y ortogonal exterior a las esferas $S(p,t)$, centradas en un punto $p \in \mathbb{R}^3$ y de radio arbitrario t. Con $H = \sum x_i \partial x_i$ el campo de las homotecias que en la

esfera unidad es unitario y exterior. En estos términos se tiene que para la composición de traslación y homotecia $F(x) = p + tx$, que lleva la esfera unidad $S(0,1)$ en la esfera de radio t, $S(p,t)$,

$$\left.\begin{aligned} F^*(dx_i) &= t\,dx_i \\ F_*H &= t\,N \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} F^*\omega &= t^3\omega, \\ F^*(i_N\omega) &= t^2 i_H\omega. \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio 11.4.1 Demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{B(x,t)} f\,\omega = \int_{S(x,t)} f\,i_N\omega.$$

Definición. Dada una función f en $\mathbb{R}^3$ medible y acotada en los acotados, un punto $x \in \mathbb{R}^3$ y un $t > 0$, denotaremos con

$$\begin{aligned} M^f(x,t) &= \frac{1}{4\pi t^2}\int_{S(x,t)} f\,d\sigma = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{S(x,t)} f i_N\omega \\ &= \frac{1}{4\pi t^2}\int_{F[S(0,1)]} f i_N\omega = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{S(0,1)} F^*[f i_N\omega] \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{S(0,1)} f(x+ty) i_H\omega = \int_S f(x+ty)\,d\mu, \end{aligned} \tag{11.11}$$

el *valor medio* de f en la esfera $S(x,t)$, de centro x y radio t, donde σ es la medida de área de la esfera, para la que $\sigma[S(x,t)] = 4\pi t^2$; y recorre los puntos de la esfera unidad $S = S(0,1) = \{\sum y_i^2 = 1\}$, $F(y) = x + ty$ y μ es la probabilidad correspondiente a la medida de área de la esfera unidad S.

Observemos que la última expresión nos permite extender la definición para todo $t \in \mathbb{R}$ siendo $M^f(x,0) = f(x)$ y si f es continua en x, entonces M^f lo es en $(x,0)$, pues

$$|M^f(z,t) - M^f(x,0)| \le \int_S |f(z+ty) - f(x)|\,d\mu \to 0,$$

cuando $(z,t) \to (x,0)$. Además, fijado x la función es par en t, $M^f(x,t) = M^f(x,-t)$ por ser μ invariante en la esfera unidad por la aplicación $G(y) = -y$, de paso al opuesto. Por último, por ser la esfera $S(0,1)$ compacta se sigue de (10.16), que si f es de clase k, también lo es M^f y las

derivadas entran en la integral. En particular para $D = \operatorname{grad} f = \sum f_{x_i}\partial_i$

$$\begin{aligned} M_t^f(x,t) &= \int_S \sum f_{x_i}(x+ty)y_i\, d\mu = \frac{1}{4\pi}\int_S \sum f_{x_i}(x+ty)y_i\, i_H\omega \\ &= \frac{1}{4\pi t^2}\int_{S(x,t)} (D\cdot N)\, i_N\omega \quad (\text{para } \ t>0) \\ &= \frac{1}{4\pi t^2}\int_{B(x,t)} \Delta f\, \omega, \quad (\text{por } 11.6) \end{aligned}$$

para $t<0$ la expresión cambia de signo y la bola a considerar es $B(x,|t|)$, pues por ser M^f par en t

$$M^f(x,t) = M^f(x,-t) \quad \Rightarrow \quad M_t^f(x,t) = -M_t^f(x,-t),$$

por tanto $M_t^f(x,0)=0$. Además por lo anterior y el ejercicio (11.4.1), para $t>0$

$$M_{tt}^f(x,t) = -\frac{1}{2\pi t^3}\int_{B(x,t)} \Delta f\,\omega + \frac{1}{4\pi t^2}\int_{S(x,t)} \Delta f\, i_N\omega = M_{tt}^f(x,-t).$$

Fórmula de Kirchhoff 11.13 *Si $f\in\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^3)$, con $k\geq 2$, entonces*

$$u(x,t) = tM^f(x,t) = t\int_{S(0,1)} f(x+ty)\, d\mu,$$

es de clase k en $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ y es la solución de la ecuación de ondas satisfaciendo $u(x,0)=0$ y $u_t(x,0)=f(x)$.

Demostración. Por el párrafo anterior (11.11), $u\in\mathcal{C}^k$, $u(x,0)=0$ y derivando $u=tM^f$, $u_t = M^f + tM_t^f$ (que es par en t por ser suma de funciones pares, ya que t y M_t^f son impares, de donde $u_t(x,t) = u_t(x,-t)$) y en $t=0$, $u_t(x,0) = M^f(x,0) = f(x)$, por lo tanto u satisface las condiciones iniciales. Veamos ahora que también satisface la ecuación de ondas, para ello sabemos de la igualdad (para $t>0$)

$$u_t(x,t) = M^f + tM_t^f = \int_S f(x+ty)\, d\mu + \frac{1}{4\pi t}\int_{B(x,t)} \Delta f\,\omega = u_t(x,-t)$$

que para $D = \operatorname{grad} f = \sum f_{x_i}\partial_i$ y para $t > 0$

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= 2M_t^f + tM_{tt}^f \\ &= \frac{2}{4\pi t^2}\int_{B(x,t)} \Delta f\,\omega - \frac{t}{2\pi t^3}\int_{B(x,t)} \Delta f\,\omega + \frac{1}{4\pi t}\int_{S(x,t)} \Delta f\, i_N\omega \\ &= \frac{1}{4\pi t}\int_{S(x,t)} \Delta f\, i_N\omega = \frac{t}{4\pi}\int_{S(0,1)} \Delta f(x+ty)\, i_H\omega \\ &= t\int_S \Delta f(x+ty)\,d\mu = \Delta u(x,t), \qquad \text{(derivando } u\text{)}. \end{aligned}$$

para $t < 0$ se sigue por ser $u_{tt}(x,t) = -u_{tt}(x,-t) = -\Delta u(x,-t) = \Delta u(x,t)$. ∎

En definitiva se sigue que la solución de la ecuación de ondas tridimensional, satisfaciendo las condiciones iniciales

$$u(x,0) = \phi(x) \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^3), \qquad u_t(x,0) = \psi(x) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^3),$$

existe, es única, es de clase k y viene dada por la expresión

$$\begin{aligned} u(x,t) &= tM^\psi + \partial_t(tM^\phi) = tM^\psi + M^\phi + tM_t^\phi \\ &= t\int_S \psi(x+ty)\,d\mu + \int_S \phi(x+ty)\,d\mu + \\ &\quad + t\int_S \sum \phi_{x_i}(x+ty)y_i\,d\mu, \end{aligned} \tag{11.12}$$

veamos quien es este último término. Llamando $\varphi(y) = \phi(x+ty)$, se verifica que $\varphi_{y_i}(y) = t\phi_{x_i}(x+ty)$, y para H el campo de las homotecias, B la bola unidad y m la medida de Lebesgue del espacio

$$\begin{aligned} t\int_S \sum \phi_{x_i}(x+ty)y_i\,d\mu &= \int_S H(\varphi)\,d\mu = \frac{1}{4\pi}\int_S H(\varphi)\, i_H\omega \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_B \Delta(\varphi)\,\omega \\ &= \frac{t^2}{4\pi}\int_B \Delta(\phi)(x+ty)\,dm \\ &= \frac{t^2}{4\pi}\int_B \Delta(u)(x+ty,0)\,dm \\ &= \frac{t^2}{4\pi}\int_B u_{tt}(x+ty,0)\,dm \end{aligned}$$

por tanto la solución es

$$u(x,t) = \int_S u(x+ty,0)\,d\mu + t\int_S u_t(x+ty,0)\,d\mu + \\ + \frac{t^2}{4\pi}\int_B u_{tt}(x+ty,0)\,dm, \tag{11.13}$$

Ahora si u es armónica en el espacio, entonces es solución de la ecuación de ondas y no depende del tiempo y como consecuencia inmediata de (11.13), se tiene el teorema del valor medio (ver (10.45))

$$u(x) = \int_S u(x+ty)\,d\mu, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

11.4.2. El método del descenso.

Ahora vamos a considerar el problema de encontrar la solución de la ecuación de ondas bidimensional

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{tt} = 0,$$

satisfaciendo las condiciones iniciales

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x).$$

Para ello haremos uso del llamado *método del descenso*, que consiste en considerar la solución del problema tridimensional con las mismas condiciones iniciales como funciones del espacio y observando que si en 11.10 la función f depende sólo de las dos primeras variables, entonces la solución tridimensional correspondiente

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t}\int_{S(x,t)} fi_N\omega \\ = \frac{1}{4\pi t}\int_{S(\overline{x},t)} fi_N\omega,$$

para $\overline{x} = (a,b,0)$ la proyección de $x = (a,b,c)$ en el plano de las dos primeras variables, es también una función del plano. Ahora bien sobre la esfera $S(\overline{x},t)$

$$N = \frac{x_1-a}{t}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2-b}{t}\frac{\partial}{\partial x_2} \pm \frac{\sqrt{t^2-(x_1-a)^2-(x_2-b)^2}}{t}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

y como sobre ella $x_3 = \pm\sqrt{t^2-(x_1-a)^2-(x_2-b)^2}$, tendremos que su 2–forma de superficie vale —para $x_3 > 0$—

$$\begin{aligned} i_N\omega &= i_N dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3 \\ &= \frac{x_1-a}{t}dx_2\wedge dx_3 - \frac{x_2-b}{t}dx_1\wedge dx_3 + \\ &\quad + \frac{\sqrt{t^2-(x_1-a)^2-(x_2-b)^2}}{t}dx_1\wedge dx_2 \\ &= \frac{x_1-a}{t}dx_2\wedge \frac{-(x_1-a)}{\sqrt{t^2-(x_1-a)^2-(x_2-b)^2}}dx_1 - \\ &\quad - \frac{x_2-b}{t}dx_1\wedge \frac{-(x_2-b)}{\sqrt{t^2-(x_1-a)^2-(x_2-b)^2}}dx_2 + \\ &\quad + \frac{\sqrt{t^2-(x_1-a)^2-(x_2-b)^2}}{t}dx_1\wedge dx_2 = \\ &= \frac{t}{\sqrt{t^2-(x_1-a)^2-(x_2-b)^2}}dx_1\wedge dx_2, \end{aligned}$$

por lo tanto la solución de la ecuación de ondas bidimensional satisfaciendo las condiciones iniciales

$$u(x,0)=0, \qquad u_t(x,0)=f(x),$$

es para $x=(a,b)$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{4\pi t}\int_{S(\overline{x},t)} f i_N\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{B[x,t]}\frac{f(\xi,\eta)}{\sqrt{t^2-(\xi-a)^2-(\eta-b)^2}}d\xi d\eta, \end{aligned}$$

y la solución general satisfaciendo

$$u(x,0)=\phi(x), \qquad u_t(x,0)=\psi(x),$$

es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{B[x,t]}\frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{t^2-(\xi-a)^2-(\eta-b)^2}}d\xi d\eta + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{B[x,t]}\frac{\phi(\xi,\eta)}{\sqrt{t^2-(\xi-a)^2-(\eta-b)^2}}d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{11.14}$$

También podemos utilizar el método del descenso para obtener la solución del problema de valor inicial de la ecuación de ondas unidimensional

$$u_{xx} - u_{tt} = 0,$$

satisfaciendo las condiciones iniciales, para $x \in \mathbb{R}$

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x),$$

pues basta como en los casos anteriores encontrar la solución que satisface

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = f(x),$$

para f una función de variable real, que podemos considerar definida en el espacio, por lo que la solución tridimensional

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t}\int_{S(x,t)} f i_N \omega = \frac{1}{4\pi t}\int_{S(\overline{x},t)} f i_N \omega,$$

para $\overline{x} = (a,0,0)$, la proyección de $x = (a,b,c)$ al primer eje, es una función en la recta que vale

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{4\pi t}\int_{S(\overline{x},t)} f i_N \omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{B[(a,0),t]} \frac{f(\xi)}{\sqrt{t^2-(\xi-a)^2-\eta^2}} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{a-t}^{a+t} f(\xi) \int_{-\sqrt{t^2-(\xi-a)^2}}^{\sqrt{t^2-(\xi-a)^2}} \frac{d\eta}{\sqrt{t^2-(\xi-a)^2-\eta^2}} d\xi \\ &= \frac{1}{2}\int_{a-t}^{a+t} f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

y esto porque haciendo el cambio $\operatorname{sen} x = \eta/\sqrt{t^2-(\xi-a)^2}$

$$\int_{-\sqrt{t^2-(\xi-a)^2}}^{\sqrt{t^2-(\xi-a)^2}} \frac{d\eta}{\sqrt{t^2-(\xi-a)^2-\eta^2}} = \pi.$$

En definitiva tenemos que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-t}^{x+t} \phi(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2}[\phi(x+t) + \phi(x-t)], \end{aligned} \tag{11.15}$$

es la solución de la ecuación de ondas unidimensional

$$u_{xx} - u_{tt} = 0,$$

satisfaciendo las condiciones iniciales, para $x \in \mathbb{R}$

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x).$$

11.4.3. El principio de Huygens.

Por último observemos que aunque hemos demostrado en general que el valor de la solución u de la ecuación de ondas n–dimensional para el problema de valor inicial, en un punto (x_0, t_0), sólo depende de los valores de u y u_t en los puntos $(x, 0)$, con $x \in B[x_0, t_0]$, tenemos en los casos analizados en esta lección, que las fórmulas 11.14 y 11.15, justifican directamente este hecho para $n = 2$ y $n = 1$ respectivamente, sin embargo para $n = 3$ —ver (11.13)—, $u(x_0, t_0)$ sólo depende de u y u_t en los puntos $(x, 0)$, con $x \in S[x_0, t_0]$! y no de toda la bola $B[x_0, t_0]$. Este fenómeno, descubierto por Huygens y que se conoce con el nombre de *Principio de Huygens*, se puede demostrar que es válido para cualquier impar $n \geq 3$, mientras que en dimensión par es falso. (Ver Courant and Hilbert, pág. 208, Garabedian, pág. 191—197, Tijonov and Samarski, pág.435), etc.

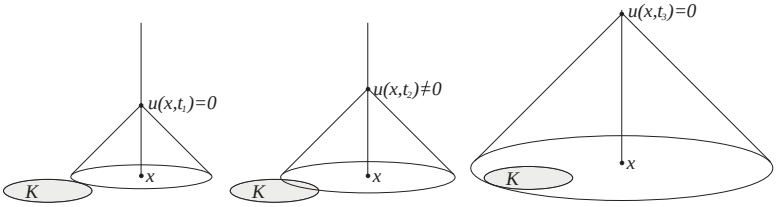


Figura 11.7.

Como consecuencia de este principio podemos analizar cómo se propaga en el espacio una perturbación local. Supongamos para ello que ϕ y ψ se anulan fuera de una pequeña región compacta K. En tal caso para cada punto x, como $u(x,t)$ se calcula mediante ciertas integrales de ϕ y ψ en la esfera $S(x,t)$, tendremos que $u(x,t) = 0$ en todo tiempo $t \leq t_1$, hasta el instante t_1 a partir del cual la esfera $S(x,t)$ toca a K, instante en el que u cambia posiblemente su valor hasta que con seguridad de nuevo se anula a partir del instante t_3 en el que de nuevo $S(x,t)$ vuelve a no cortar a K. De tal modo que en cada instante de tiempo t,

el conjunto de puntos perturbados, es decir en los que u no es nula, se caracteriza por estar entre las dos superficies envolventes de la familia de esferas centradas en los puntos de K y de radio t.

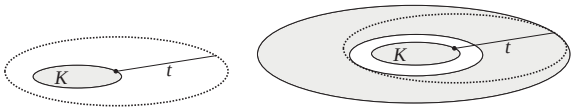


Figura 11.8. Frentes delantero y trasero

La envolvente exterior se llama *frente delantero* y la interior *frente trasero* y cuanto mas "pequeño" sea K, entorno de un punto p, mas se aproximarán estos dos frentes a la esfera de centro p y radio t. En particular, un oyente a distancia d de un instrumento musical, oye[2] en cada instante $t + d$ exactamente lo que fue tocado en el instante t y no la mezcla de sonidos tocados en otros instantes (¡es un alivio vivir en un espacio tridimensional!). En cambio en los casos bidimensional y unidimensional las cosas son distintas pues $u(x,t) = 0$ hasta el instante t_0 en el que $B[x,t]$ toca a K, y a partir de este instante $B[x,t]$ siempre corta a K y si las condiciones iniciales son no negativas en K, $u(x,t)$ ya nunca mas se anula para $t \geq t_0$.

11.5. Ecuación de Poisson Dalambertiana

Tratemos ahora el caso de la ecuación de ondas tridimensional no homogénea, con condiciones iniciales

$$\Box z\,(x,t) = \rho(x,t), \quad z(x,0) = f(x), \qquad z_t(x,0) = g(x).$$

Tal solución puede obtenerse como suma $z = v + w$ con v solución de la ecuación homogénea con las mismas condiciones, que ya conocemos, y w el caso particular de la no homogénea, con las condiciones iniciales nulas,

$$\begin{aligned} \Box\, v\,(x,t) &= 0, & v(x,0) &= f(x), & v_t(x,0) &= g(x), \\ \Box\, w\,(x,t) &= \rho(x,t), & w(x,0) &= 0, & w_t(x,0) &= 0, \end{aligned}$$

A su vez la segunda ecuación se reduce al caso homogéneo vía el llamado principio de Duhamel, que dice:

[2]suponiendo que la velocidad del sonido es 1.

Lema 11.14 (Principio de Duhamel) *Para cada $s \in \mathbb{R}$, sea u^s la solución de la ecuación de ondas homogénea, con las condiciones*

$$\Box u^s(x,t) = 0, \qquad u^s(x,s) = 0, \quad u^s_t(x,s) = \rho(x,s),$$

entonces la función,

$$w(x,t) = \int_0^t u^s(x,t)\,ds \quad \left(= -\int_t^0 u^s(x,t)\,ds, \quad \textit{para} \;\; t<0 \right)$$

es la solución de la ecuación de ondas no homogénea, con las condiciones

$$\Box w(x,t) = -\rho(x,t), \qquad w(x,0) = w_t(x,0) = 0.$$

Demostración. Las funciones u^s están determinadas por la Fórmula de Kirchhoff, (11.13), que además nos da su regularidad en función de la de ρ.

Fijado x, $w(x,t) = F(t,t)$, para $F(r,t) = \int_0^r u^s(x,t)\,ds$. Entonces se tiene

$$w_t(x,t) = F_r(t,t) + F_t(t,t) = u^t(x,t) + \int_0^t u^s_t(x,t)\,ds = \int_0^t u^s_t(x,t)\,ds$$

y derivando de nuevo

$$\begin{aligned} w_{tt}(x,t) &= u^t_t(x,t) + \int_0^t u^s_{tt}(x,t)\,ds = \rho(x,t) + \int_0^t \Delta u^s(x,t)\,ds \\ &= \rho(x,t) + \Delta \int_0^t u^s(x,t)\,ds = \rho(x,t) + \Delta w(x,t). \end{aligned}$$

∎

Proposición 11.15 *La solución de la ecuación de ondas, con las condiciones iniciales*

$$\Box w(x,t) = -\rho(x,t), \qquad w(x,0) = w_t(x,0) = 0,$$

vale

$$w(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\int_{B[x,t]} \frac{\rho(z,t-|z-x|)}{|z-x|}\,dm, & \textit{si } t>0; \\ 0, & \textit{si } t=0; \\ \frac{1}{4\pi}\int_{B[x,-t]} \frac{\rho(z,t+|z-x|)}{|z-x|}\,dm, & \textit{si } t<0. \end{cases} \tag{11.16}$$

Demostración. Para cada s, la función $u(x,t) = u^s(s+t,x)$ satisface la ecuación de ondas con las condiciones iniciales $u(x,0) = 0$ y $u_t(x,0) = \rho(s,x)$ y por la fórmula de Kirchhoff, (11.13), es de clase k si lo es ρ y vale para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^4$

$$u(x,t) = t \int_S \rho(s, x+ty)\, d\mu, \quad \text{y por tanto}$$
$$u^s(x,t) = (t-s) \int_S \rho(s, x+(t-s)y)\, d\mu,$$

y por el Lema anterior tenemos que (para σ la medida de área de la esfera)

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \int_0^t (t-s) \int_S \rho(x+(t-s)y, s)\, d\mu\, ds \\ &= \int_0^t r \int_S \rho(x+ry, t-r)\, d\mu\, dr \\ &= \int_0^t r^2 \int_S \frac{\rho(x+ry, t-|ry|)}{4\pi|ry|}\, d\sigma\, dr = \frac{1}{4\pi} \int_{B[x,t]} \frac{\rho(z, t-|z-x|)}{|z-x|} dz. \end{aligned}$$

pues para toda función g diferenciable e integrable en $\mathbb{R}^3$,

$$\int g(x) dx_1 \cdots dx_n = \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} g(ry) r^{n-1}\, d\sigma\, dr. \quad \blacksquare$$

En definitiva tenemos que la solución de la ecuación de ondas no homogénea tridimensional con condiciones iniciales

$$\Box\, z\,(x,t) = -\rho(x,t), \quad z(x,0) = f(x), \quad z_t(x,0) = g(x),$$

vale, por (11.12) (para σ la medida de área de la esfera unidad y $t > 0$)

$$\begin{aligned} z(x,t) = {} & \frac{t}{4\pi} \int_S g(x+ty)\, d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_S f(x+ty)\, d\sigma \\ & + \frac{t}{4\pi} \int_S \sum f_{x_i}(x+ty) y_i\, d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{B[x,t]} \frac{\rho(z, t-|z-x|)}{|z-x|} dm. \end{aligned}$$

Observemos que para $t > 0$, la solución w de (11.16), coincide con $u/4\pi$, para el *potencial retardado*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(z, t-|z-x|)}{|z-x|} dz, \tag{11.17}$$

definido por ρ, si ρ se anula para tiempos negativos. En consecuencia tenemos:

Corolario 11.16 (Ecuación de Poisson Dalambertiana) *Si $\rho(x,t) = 0$ para $t < k$, entonces el potencial retardado (11.17), satisface la ecuación de Poisson*

$$\sum u_{x_i x_i}(x,t) - u_{tt}(x,t) = -4\pi\rho(x,t).$$

Definición. Consideremos $\bar{\rho}(x,t) = \rho(x,t+k)$, la cual se anula para $t < 0$, por tanto el potencial correspondiente $\bar{u}$ satisface la ecuación $\Box\bar{u} = -4\pi\bar{\rho}$, por tanto $\Box u = -4\pi\rho$. ∎

Definición. Llamamos pasado causal de un punto $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^4$ al cono $\{(x,t) : t \le t_0, |x - x_0| = t_0 - t\}$. Diremos que una función $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$ es de **soporte compacto en el pasado causal** si para todo punto $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^4$ existe un entorno abierto U y $a > 0$, tales que $\rho(x,t) = 0$, para (x,t) en el pasado causal de U y $t < t_0 - a$.

Corolario 11.17 *El potencial retardado u de una función diferenciable ρ, de soporte compacto en el pasado causal, es una función diferenciable que verifica la ecuación*

$$\sum u_{x_i x_i} - u_{tt} = -4\pi\rho.$$

Además, la formación del potencial retardado conmuta con las derivadas parciales.

11.6. La Ecuación de Schrödinger.

La Ecuación de Schrödinger es la ecuación fundamental de la mecánica cuántica no–relativista. En el caso mas simple, para una partícula sin *spin*, en un campo externo (ver Egorov–Shubin, página 16), tiene la forma

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi, \tag{11.18}$$

donde $x \in \mathbb{R}^3$, $\psi = \psi(x,t)$ es la función de onda de la partícula, que nos da la amplitud compleja que caracteriza la presencia de la partícula en cada punto x —en particular $|\psi(x,t)|^2$ se interpreta como la densidad de probabilidad de que la partícula se encuentre en el instante t en el punto x—, m es la masa de la partícula, $\hbar$ es la constante de Planck y $V(x)$ es una función real que representa el potencial.

Una función de la forma

$$\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Et}\,\psi(x)$$

donde E es una constante, es solución de 11.18 si y sólo si ψ es solución de la llamada Ecuación de Schrödinger de estado estacionario (ver la lección 7.10.3, de la pág.524),

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right]\psi = E\psi, \tag{11.19}$$

que describe los estados con energía constante E.

Si un átomo —como el del hidrógeno—, tiene un electrón de masa m, con energía total E —suma de la cinética y la potencial V—, entonces tiene una función de densidad de probabilidad ψ que es solución de (11.19).

Vamos a estudiar si existen soluciones de esta ecuación que sólo dependan de la distancia

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

al origen de coordenadas —en que se localiza el núcleo del átomo—. En tal caso tendríamos que

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \psi'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = x\frac{\psi'(r)}{r},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\psi'(r)}{r}\right)\\ &= \frac{\psi'(r)}{r} + x\left(\frac{\psi'(r)}{r}\right)'\frac{\partial r}{\partial x}\\ &= \frac{\psi'(r)}{r} + x\frac{\psi''(r)r-\psi'(r)}{r^2}\frac{x}{r}\\ &= \frac{x^2\psi''(r)}{r^2} + \psi'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right),\end{aligned}$$

y haciendo lo mismo para y y z y sumando tendremos que

$$\Delta\psi = \psi''(r) + \frac{2}{r}\psi'(r),$$

y la ecuación (11.19) se convierte en

$$\psi''(r) + \frac{2}{r}\psi'(r) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0.$$

Ahora bien en el caso del hidrógeno tenemos un átomo con un electrón con carga $-q$ y un protón con carga q, por lo tanto el potencial electrostático es

$$V = -\frac{q^2}{r},$$

por lo que la energía total de un electrón en reposo —por tanto con energía cinética nula—, en el infinito ($r = \infty$), será nula, por lo que la energía de un electrón ligado al núcleo —es decir que no tiene energía suficiente para irse al infinito—, es negativa

$$E = -\alpha^2,$$

y tenemos que nuestra ecuación es de la forma

$$\psi''(r) + \frac{2}{r}\psi'(r) - \frac{2m}{\hbar^2}(\alpha^2 + \frac{q^2}{r})\psi = 0,$$

y si consideramos la nueva variable x y la función $v(x)$ tales que

$$x = \frac{2\alpha r}{\hbar}\sqrt{2m}, \qquad \psi(r) = \mathrm{e}^{-x/2}\, v(x),$$

tendremos que nuestra ecuación se expresa en términos de x

$$xv'' + (2 - x)v' + (p - 1)v = 0, \qquad \text{para } p = \frac{q^2\sqrt{2m}}{2\alpha\hbar}.$$

Ahora bien la Ecuación de Laguerre de orden p es

$$xy'' + (1 - x)y' + py = 0,$$

y si la derivamos obtenemos

$$xy^{(3} + y'' - y' + (1 - x)y'' + py' = xy^{(3} + (2 - x)y'' + (p - 1)y' = 0,$$

y por tanto si $y(x)$ es solución de la ecuación de Laguerre, $v = y'$ es solución de la nuestra. Esto nos lleva a estudiar las soluciones de la Ecuación de Laguerre de orden p que escribimos de la forma

$$y'' + \frac{1-x}{x}y' + \frac{p}{x}y = 0,$$

y tiene una solución en serie de potencias

$$y(x) = c_0 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma(p+1)}{i!(i+1)!\Gamma(p-i)} x^i,$$

por lo que su derivada es solución de nuestra ecuación.

Si ahora imponemos la condición de que

$$\lim_{r\to\infty} \psi(r) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{v(x)}{\mathrm{e}^{-x/2}} = 0,$$

tendremos que $v(x) = y'(x)$ es un polinomio si p es un número natural y por tanto la condición anterior se cumple. En cambio la condición no puede cumplirse en cualquier otro caso. De aquí se sigue que los únicos valores de p para los que nuestra ecuación tiene solución no trivial satisfaciendo la condición impuesta son los naturales y corresponden a valores de α

$$p = \frac{q^2\sqrt{2m}}{2\alpha\hbar} = n \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_n = \frac{q^2\sqrt{2m}}{2n\hbar}$$

y la energía del electrón en su n–simo estado es

$$E_n = -\alpha_n^2 = -\frac{q^4 m}{2n^2\hbar^2}$$

y si el electrón baja del nivel de energía E_n al E_k, con $n > k$, su pérdida de energía será

$$\Delta E = \frac{q^4 m}{2n^2\hbar^2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

y dado que cuando un electrón pierde energía emite luz con una frecuencia proporcional a la pérdida de energía, y la constante de proporcionalidad es la constante de Planck

$$\Delta E = \hbar\nu = \hbar\frac{c}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\lambda} = \frac{\Delta E}{\hbar c} = \frac{q^4 m}{2n^2 c\hbar^3}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

y tenemos una expresión de la longitud de onda del fotón emitido (para c la velocidad de la luz).

Fin del Tema 11

Tema 12

Ecuación de ondas. Electromagnetismo

12.1. Espacio Euclideo

Hay una geometría subyacente en la ecuación de ondas tridimensional. Recordemos en primer lugar la definición de Espacio Euclídeo.

Definición. Llamamos *espacio afín* a una terna formada por un conjunto $\mathbb{A}$, un $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathcal{V}$ y una operación

$$\mathbb{A} \times \mathcal{V} \to \mathbb{A}, \qquad (p, v) \to p + v,$$

donde a $p+v$ le llamaremos el *trasladado de p por el vector v*, verificando las propiedades:

(1) $p + v = p \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$.

(2) $(p + v) + u = p + (v + u)$.

(3) Dados $p, q \in \mathbb{A}$ existe $v \in \mathcal{V}$ (único por las propiedades anteriores), tal que $p + v = q$.

Llamamos *dimensión de* $\mathbb{A}$ a la dimensión de $\mathcal{V}$.

Definición. Llamamos *referencia afín* a $\{p_0, v_1, \dots, v_n\}$, para $p_0 \in \mathbb{A}$ llamado *origen* y $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ordenada de $\mathcal{V}$. Respecto de ella todo punto p se expresa

$$p = p_0 + v = p_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

y a x_i las llamamos *coordenadas respecto de la referencia*, de p.

Una referencia $\{p_0, v_1, \dots, v_n\}$ establece una biyección

$$(x_i)\colon \mathbb{A} \to \mathbb{R}^n,$$

a través de la cual definimos una estructura topológica y diferenciable en $\mathbb{A}$, que no depende de la referencia elegida. Además para cada $p \in \mathbb{A}$ tenemos un isomorfismo canónico

$$\mathcal{V} \to T_p(\mathbb{A}), \qquad v \to D^v_p, \qquad D^v_p f = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}, \tag{12.1}$$

que lleva v_i en ∂_{x_i}.

Definición. Llamamos *espacio Euclídeo* a un espacio afín con una métrica g simétrica definida positiva en $\mathcal{V}$. Llamamos *referencia euclidea* a una referencia afín con la base ortonormal y *coordenadas euclídeas* a las coordenadas respecto de una referencia euclídea. El isomorfismo anterior (12.1) pasa la métrica a cada $T_p(\mathbb{A})$, de modo que las ∂_{x_i} son ortonormales, y define una métrica Riemanniana en $\mathbb{A}$ que en coordenadas es la estandar

$$g = \sum dx_i \otimes dx_i.$$

Nuestro primer impulso es definir el espacio físico como un espacio afín tridimensional $\mathbb{A}_3$ y así lo hemos considerado en distintas lecciones a lo largo de estos apuntes. Sin embargo un Físico debe abandonar esta estructura que parece tan natural. ¿Por qué?. Las trayectorias, bajo esa concepción de espacio, son curvas parametrizadas

$$\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{A}_3,$$

y una trayectoria uniforme $\sigma(t) = p_0 + tv$. Esto choca con un hecho experimental: la relatividad del movimiento, es decir no podemos distinguir el reposo absoluto y sin embargo con este esquema existe $\sigma(t) = p_0$. Esto justifica que haya que buscar otra estructura para espacio.

12.2. Espacio de Minkowski. Relatividad especial

Como en cualquier caso tenemos tres coordenadas espaciales y una temporal consideramos como primera aproximación de nuestro espacio–tiempo, una variedad diferenciable $\mathcal{X}$ de dimensión 4. Definimos trayectoria de un móvil no como una curva parametrizada sino como una subvariedad unidimensional. Ahora tenemos que recoger la noción de movimiento uniforme, que es la linea recta. El espacio más simple satisfaciendo esto es el afín

$$\mathcal{X} = (\mathbb{A}_4, \mathcal{V}_4, +).$$

Consideremos la trayectoria de un observador que se mueve uniformemente. La realidad de este observador se divide en dos partes bien diferenciadas: por una parte hay espacio y por otra tiempo. Si consideramos dos posiciones de esa trayectoria p, q, el observador las distingue y una p es anterior a la otra $q = p + v$, es natural considerar el tiempo transcurrido entre los dos sucesos como el $|v|$, para lo cual necesito una métrica g y $|v| = \sqrt{g(v,v)}$, por ello necesitamos una métrica en $\mathcal{V}$. Ahora bien en cada punto p de esa trayectoria se observa un espacio tridimensional y Euclideo. El candidato obvio es el hiperplano ortogonal, al que llamamos *hiperplano de simultaneidad* del observador en p. La métrica natural sería una Euclidea en $\mathcal{V}_4$, pero esta elección tiene un problema. No distingue direcciones, todas son equivalentes y todas posibles, en particular trayectorias en un hiperplano de simultaneidad de otro observador, el cual vería en un instante al primer observador con velocidad infinita o estando en todos los puntos de la recta simultaneamente, cuando lo que realmente se observa es que al cabo de un tiempo propio el otro observador está en otro punto de nuestro espacio. Esto induce a considerar una métrica en $\mathcal{V}_4$ con signatura (ver el pie de página 640) $(+,-,-,-)$, es decir que en una base ortonormal la métrica es

$$\mathbf{G} = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con lo cual desaparece el problema anterior, pues podemos distinguir tres tipos de trayectorias.

Definición. Diremos que la trayectoria de un observador es de tipo *temporal, lumínica* ó *espacial* , si entre cada dos posiciones cualesquiera p y $q = p+v$, $g(v,v)$ es respectivamente $> 0, = 0$ ó < 0. Ahora podemos afinar nuestra definición de observador pidiendo que sea de tipo temporal. Observemos que el espacio de simultaneidad para un observador tiene métrica tridimensional $-\delta_{ij}$ (la Euclidea cambiada de signo).

Definición. Llamamos *Espacio de Minkowski* al espacio afín

$$(\mathbb{A}_4, (\mathcal{V}_4, g), +),$$

para g una métrica simétrica de signatura $(+,-,-,-)$.

Definición. Llamaremos *referencia inercial* a $\{p_0, e_0, e_1, e_2, e_3\}$, con $p_0 \in \mathbb{A}_4$ y las e_i una base ortonormal, es decir en las que la métrica es $g(e_0, e_i) = \delta_{0i}$, y para $i, j = 1, 2, 3$, $g(e_i, e_j) = -\delta_{ij}$.

Definición. Llamaremos *coordenadas inerciales* ó *coordenadas en un sistema de referencia inercial* $\{p_0, e_0, e_1, e_2, e_3\}$, a las funciones $x_i(p) = p_i$ para $p = p_0 + \sum p_i e_i$. A menudo denotaremos la primera coordenada como el tiempo $x_0 = t$.

Como $\mathcal{V}$ se identifica canónicamente con cada espacio tangente $T_p(\mathcal{X})$, podemos pasar la métrica de $\mathcal{V}$ al espacio tangente, de modo que en términos de coordenadas inerciales se corresponden las e_i y las ∂_{x_i}, con lo que en $\mathbb{A}_4$ tenemos una métrica que en esas coordenadas es

$$g = dt \otimes dt - dx_1 \otimes dx_1 - dx_2 \otimes dx_2 - dx_3 \otimes dx_3.$$

la cual es *semi–riemanniana* (no es definida positiva, es no singular y simétrica).

Parametricemos una trayectoria (es decir una recta) en las coordenadas inerciales

$$\sigma(t) = (t, a_1 + v_1 t, a_2 + v_2 t, a_3 + v_3 t),$$

entonces en una unidad de tiempo, por ejemplo entre los instantes 0 y 1 $p = \sigma(0) = (0, a)$ y $q = \sigma(1) = (1, a+v)$, recorre una distancia (aparente) $|v| = \sqrt{\sum v_i^2}$ que es por tanto la velocidad numérica aparente y v la velocidad aparente. Ahora si $q = p + T$, tenemos:

Definición. Decimos que la trayectoria es la de un móvil ó un observador si $g(T,T) > 0$ y como $T = (1, v)$, es

$$0 < g(T,T) = (1,v)\mathbf{G}(1,v)^t = 1 - \sum v_i^2 \quad \Rightarrow \quad |v| = \sqrt{\sum v_i^2} < 1,$$

y 1 es la velocidad máxima a la que un móvil puede llegar. Decimos que es la *trayectoria de un rayo de luz* si $g(T,T) = 0$, en cuyo caso la velocidad de la luz es constante e igual a 1, independientemente de la referencia.

Nota 12.1 Si cogemos como unidad de tiempo 1 año y como unidad de longitud el año–luz (es decir la longitud recorrida por la luz en un año), la velocidad de la luz en estas unidades es 1. Si en lugar de coger una referencia inercial (es decir con los e_i ortonormales los cogemos verificando $g(e_0, e_i) = \delta_{0i}$, y para $i, j = 1, 2, 3$, $g(e_i, e_j) = -c^{-2}\delta_{ij}$, entonces la velocidad de la luz es c.

Por otra parte si consideramos las trayectorias de la luz pasando por un punto p, tendremos un cono, siendo interiores a este las trayectorias de los móviles y si tenemos las trayectorias A y B de dos móviles pasando por p, sus espacios de simultaneidad respectivos no coinciden y dos sucesos que para A son simultáneos, B los observará en general en tiempos distintos, sin embargo este efecto no es apreciable a velocidades pequeñas, en las que las trayectorias y por tanto sus espacios de simultaneidad casi son iguales.

12.3. D'Alembertiano

12.3.1. Gradiente y divergencia

Sea $\mathcal{X}$ el espacio de Minkowski y en una referencia inercial $g = dt^2 - \sum dx_i^2$ su métrica, entonces existe un isomorfismo canónico entre campos y uno–formas, como en las variedades Riemannianas, dado por

$$\gamma\colon \mathcal{D} \to \Omega, \qquad D \to \gamma(D) = i_D g = g(D, \cdot) = D \cdot .$$

Definición. Llamamos *gradiente de una función* f, al campo $D = \operatorname{grad} f$, tal que $\gamma(D) = df$, el cual satisface que para todo campo E

$$\operatorname{grad} f \cdot E = Ef$$

y en coordenadas inerciales si $\operatorname{grad} f = \sum h_i \partial_{x_i}$, entonces

$$h_0 = \operatorname{grad} f \cdot \partial_t = f_t, \qquad h_i = -\operatorname{grad} f \cdot \partial_{x_i} = -f_{x_i} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \qquad \operatorname{grad} f = f_t \partial_t - \sum f_{x_i} \partial_{x_i}.$$

Consideremos ahora una orientación en nuestra variedad, dada por la base ortonormal $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ de una referencia inercial y consideremos la forma de volumen, es decir la 4–forma Ω_4 que a cualquier base ortonormal positivamente orientada, por ejemplo

$$\partial_t, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}$$

le da el valor 1. Se sigue que es

$$\Omega_4 = dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Definición. Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{X})$, llamamos *divergencia* de D (ver la pág.754) a la función $\operatorname{div} D$ tal que

$$D^L \Omega_4 = (\operatorname{div} D)\Omega_4,$$

cuya expresión en coordenadas es

$$D = \sum f_i \partial_{x_i} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} D = \sum (f_i)_{x_i}.$$

12.3.2. D'Alembertiano y codiferencial

Ahora recordemos (ver pág.754) que en el espacio euclídeo n–dimensional teníamos que

$$\Delta f = \sum f_{x_i x_i} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f),$$

esto nos induce a dar la siguiente generalización.

Definición. Llamamos D'Alembertiano de una función f a la función

$$\Box f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = f_{tt} - \sum_{i=1}^{3} f_{x_i x_i},$$

es decir el operador de ondas aplicado a f.

Definición. Consideremos una p–forma $\omega \in \Lambda_p$ en las coordenadas inerciales $(t = x_0, x_1, x_2, x_3)$

$$\omega = \sum_{\alpha=(i_1<\cdots<i_p)} f_\alpha dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p},$$

en cuyo caso su diferencial es la $p+1$–forma

$$d\omega = \sum_{\alpha=(i_1<\cdots<i_p)} df_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p},$$

(ver su definición intrínseca en la pág.159).

Ahora definimos su *codiferencial* como la $p-1$–forma

$$\delta\omega = \sum_{\alpha=(i_1<\cdots<i_p)} i_{\operatorname{grad} f_\alpha}(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}).$$

(Esta definición es válida en coordenadas inerciales. Para la definición en general ver –salvo un signo– la pág.1004). Para funciones, que son 0–formas, definimos $\delta f = 0$.

Debemos observar que $\operatorname{grad} f(x_i) = \delta_i f_{x_i}$, donde δ_i es un signo que en el caso de que la métrica sea euclídea es $\delta_i = 1$ y si es la de Minkowski, entonces $\delta_0 = 1$ y el resto $\delta_i = -1$. En general se tiene que $\operatorname{grad} f = \sum \delta_i f_{x_i} \partial_{x_i}$ y el resultado siguiente.

Proposición 12.2 *Se tiene que* $\delta^2 = 0$.

Demostración. Sea $\omega = f dx_\alpha = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$, entonces

$$\delta\omega = i_{\operatorname{grad} f}(dx_\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \delta_j f_{x_j} i_{\partial_{x_j}}(dx_\alpha)$$

$$\delta^2\omega = \sum_{r,j=1}^{n} \delta_j \delta_r f_{x_j x_r} i_{\partial_{x_r}} i_{\partial_{x_j}}(dx_\alpha) = 0$$

pues $i_{\partial_{x_r}} i_{\partial_{x_j}}(dx_\alpha) = -i_{\partial_{x_j}} i_{\partial_{x_r}}(dx_\alpha)$. ∎

Proposición 12.3 *Para cada función f se tiene que*

$$\Box f = d\delta f + \delta df.$$

Demostración. Como $\delta f = 0$ basta ver cuanto vale δdf,

$$\delta df = \delta(f_t dt + \sum f_{x_i} dx_i) = f_{tt} - \sum f_{x_i x_i} = \Box f. \quad \blacksquare$$

Esto nos induce a dar la siguiente definición

Definición. Para cada p–forma ω definimos

$$\Box\omega = d\delta\omega + \delta d\omega.$$

Proposición 12.4 *En coordenadas inerciales*

$$\Box(\sum f_\alpha dx_\alpha) = \sum(\Box f_\alpha)dx_\alpha.$$

Demostración. Basta demostrarlo para $f dx_\alpha$

$$\begin{aligned}
\Box(f dx_\alpha) &= d\delta(f dx_\alpha) + \delta d(f dx_\alpha) \\
&= d(\sum_j \delta_j f_{x_j} i_{\partial_{x_j}}(dx_\alpha)) + \delta(\sum_i f_{x_i} dx_i \wedge dx_\alpha) \\
&= \sum_{j,i} \delta_j f_{x_j x_i} dx_i \wedge i_{\partial_{x_j}}(dx_\alpha) + \sum_{i,j} \delta_j f_{x_i x_j} i_{\partial_{x_j}}(dx_i \wedge dx_\alpha) \\
&= \sum_i \delta_i f_{x_i x_i} dx_\alpha = (\Box f)dx_\alpha. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Consideremos la conexión de Levi–Civitta asociada a la semimétrica g, la cual coincide con la de $\mathbb{R}^4$,

$$D^\nabla(\sum f_i \partial_{x_i}) = \sum(Df_i)\partial_{x_i},$$

y definimos la *derivada covariante* de 1–formas

$$D^\nabla\omega = D(\omega E) - \omega(D^\nabla E),$$

y las *derivadas covariantes* de tensores

$$D[T(D_i, \omega_j)] = D^\nabla T(D_i, \omega_j) + T(D^\nabla D_1, \ldots, \omega_j) + \cdots + T(D_i, D^\nabla\omega_1, \ldots,) + \cdots .$$

Definición. Llamamos *diferencial covariante* de un tensor $T \in \mathcal{T}^0_p$, al tensor $\nabla T \in \mathcal{T}^0_{p+1}$, tal que

$$i_{D_0}\nabla T = D_0^\nabla T \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla T(D_0,\dots,D_p) = D_0^\nabla T(D_1,\dots,D_p).$$

Llamamos *divergencia* del tensor $T \in \mathcal{T}^0_p$, al tensor

$$\operatorname{div} T = C^1_0(\nabla T) \in \mathcal{T}^0_{p-1}.$$

Proposición 12.5 *Para una p–forma ω se tiene*

$$\operatorname{div}\omega = \delta\omega.$$

Demostración. En coordenadas inerciales $\omega = \sum f_\alpha dx_\alpha$ y basta demostrarlo para $f dx_\alpha$. Ahora $\nabla(f dx_\alpha) = df \otimes dx_\alpha$, pues

$$\nabla(f dx_\alpha)(D_0,\dots,D_p) = D_0^\nabla(f dx_\alpha)(D_1,\dots,D_p) = (D_0 f)dx_\alpha(D_1,\dots,D_p),$$

por lo tanto

$$\operatorname{div} f dx_\alpha = C^1_0(\nabla(f dx_\alpha)) = C^1_0(df\otimes dx_\alpha) = i_{\operatorname{grad} f} dx_\alpha = \delta(f dx_\alpha). \quad \blacksquare$$

12.4. Campo electromagnético

Consideremos un sistema de coordenadas inerciales (t, x_i) en nuestro espacio de Minkowski $\mathbb{R}^4$, con métrica $g = dt^2 - \sum dx_i^2$.

Consideremos lo que debe verificar la trayectoria de una partícula de masa m y carga q, con vector tangente T, tal que $g(T,T) = 1$. Si la partícula no está afectada por ninguna fuerza, seguiría una trayectoria sin aceleración, es decir con $T^\nabla T = 0$. Si por el contrario su movimiento está afectado por una fuerza, la ley de Newton dice que su *aceleración* por su *masa* sería igual a la *fuerza*, es decir considerando $\tilde{F}$ la intensidad de fuerza, es decir la fuerza por unidad de carga, sería

$$m \cdot T^\nabla T = q\tilde{F},$$

por lo que en cada punto p de la trayectoria $q\tilde{F}_p = m(T^\nabla T)_p$, ahora bien ¿depende $\tilde{F}_p$, sólo del punto p?. Si así fuera como $0 = T(T\cdot T) = 2T^\nabla T\cdot T$, es decir $(T^\nabla T)_p$ es ortogonal a T_p, tendríamos que $\tilde{F}_p$ sería ortogonal a T_p y esto para cualquier trayectoria posible dentro del cono, lo cual daría que $\tilde{F}_p = 0$, por lo tanto $\tilde{F}_p$ depende de p y de T_p, por lo que la fórmula sería

$$m \cdot T^\nabla T = q\tilde{F}(T).$$

siendo $\tilde{F}(T)\cdot T = 0$, lo que nos permitiría definir $F(T_1, T_2) = \tilde{F}(T_1)\cdot T_2$, verificando $F(T,T) = 0$. Esto sugiere la siguiente definición.

Definición. Llamaremos *Campo Electromagnético* a una 2–forma $F \in \Lambda_2(\mathcal{X})$ y denotaremos su endomorfismo asociado $\tilde{F}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, tal que

$$F(D,E) = \tilde{F}(D)\cdot E = \tilde{D}\cdot E.$$

Definición. Llamaremos *Ley de Fuerza de Lorentz* de una partícula de masa m y carga q en un campo electromagnético $\tilde{F}$ a

$$mT^\nabla T = q\tilde{F},$$

para T el vector tangente a su trayectoria.

En nuestro sistema de coordenadas inerciales (t, x_i) tendremos que la expresión del campo es

$$F = \sum E_i dx_i \wedge dt + B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Definición. Dado un campo electromagnético y un sistema de coordenadas inercial llamamos *campo eléctrico* y *campo magnético* asociados, respectivamente a los campos espaciales

$$E = \sum E_i \partial_{x_i}, \qquad B = \sum B_i \partial_{x_i},$$

los cuales dependen del sistema de referencia, pero una vez conocidos determinan el campo F.

Observemos que el campo eléctrico $E = \tilde{F}(\partial_t)$, pues

$$\tilde{F}(\partial_t)\cdot \partial_t = 0, \quad \tilde{F}(\partial_t)\cdot \partial_{x_i} = -E_i,$$

por lo tanto es la fuerza sobre la unidad de carga en reposo (el reposo está representado por la trayectoria ∂_t), ya que

$$m\partial_t^{\nabla}\partial_t = qE.$$

por otra parte

$$i_B(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = F_{|\mathrm{t=cte}},$$

y la matriz de $\tilde{F}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

pues por ejemplo la segunda columna se obtiene de

$$\tilde{F}(\partial_{x_1}) = a\partial_t + b\partial_{x_1} + c\partial_{x_2} + d\partial_{x_3},$$
$$a = \tilde{F}(\partial_{x_1}) \cdot \partial_t = E_1, \quad b = -\tilde{F}(\partial_{x_1}) \cdot \partial_{x_1} = 0,$$
$$c = -\tilde{F}(\partial_{x_1}) \cdot \partial_{x_2} = -B_3, \quad d = -\tilde{F}(\partial_{x_1}) \cdot \partial_{x_3} = B_2,$$

Observemos que

$$\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum v_i E_i \\ B_3 v_2 - B_2 v_3 \\ -B_3 v_1 + B_1 v_3 \\ B_2 v_1 - B_1 v_2 \end{pmatrix}$$

y por tanto para $v = \sum v_i \partial_{x_i}$ espacial

$$\tilde{F}(v) =< v, E > \partial_t + v \times B,$$

para el producto escalar tridimensional de vectores espaciales $< e, e' >= -g(e, e')$.

12.4.1. Vector impulso

Definición. Recordemos que en el espacio Euclídeo $\mathbb{A}_3$, la velocidad numérica de una partícula con velocidad $\vec{v} = (v_i) = \sum v_i \partial_{x_i}$ es

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\sum v_i^2},$$

y si su masa es m, llamamos *cantidad de movimiento* ó *vector de impulso* a

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

en cuyos términos la Ley del movimiento de Newton se expresa

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \text{Fuerza}.$$

Definición. Volviendo a nuestro espacio de Minkowski, sea T el vector tangente unitario de la trayectoria de una partícula de masa m. Llamaremos *vector de impulso* de la partícula a

$$I = mT,$$

para el cual $g(I, I) = m^2$.

Expresión en coordenadas del vector impulso

Escribamos I en nuestras coordenadas inerciales (t, x_i)

$$I = m_0\partial_t + m_0v_1\partial_{x_1} + m_0v_2\partial_{x_2} + m_0v_3\partial_{x_3} = m_0\partial_t + \vec{p},$$

entonces la *velocidad aparente* es $\vec{v} = \sum v_i\partial_{x_i}$ y $\vec{p} = m_0\vec{v}$ el *impulso aparente* y m_0 es la *masa aparente*, siendo su relación con la masa verdadera m,

$$m^2 = g(I, I) = m_0^2 - \sum m_0^2v_i^2 = m_0^2(1 - v^2) \qquad \Rightarrow \quad m = m_0\sqrt{1 - v^2},$$

por lo que si la velocidad es nula $m = m_0$ y si la velocidad tiende a la de la luz, $v \to 1$, su masa aparente tiende a ∞.

Ahora bien la Ley de Lorentz dice

$$mT^{\nabla}T = q\tilde{F}(T) \quad \Leftrightarrow \quad T^{\nabla}I = q\tilde{F}(T)$$

y si consideramos el múltiplo de T, $D = \partial_t + \vec{v}$ que es el campo tangente a la curva que para la función t en la curva es $D = \partial_t$, pues $Dt = 1$, tendremos que $D^{\nabla}I = q\tilde{F}(D)$ lo cual equivale a que para $\vec{p} = m_0\vec{v} = \sum p_i\partial_{x_i}$

$$(Dm_0)\,\partial_t + \sum D(p_i)\partial_{x_i} = q(E + (\vec{v} \cdot E)\,\partial_t + \vec{v} \times B),$$

y sus componentes temporal y espacial respectivamente son

$$\frac{dm_0}{dt} = q\vec{v} \cdot E, \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = q(E + \vec{v} \times B),$$

por lo que el campo magnético afecta si hay velocidad.

12.4.2. Forma de carga

Definición. Llamamos *forma de carga* a una tres–forma ω_3. En coordenadas

$$\omega_3 = \rho\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \omega_2 \wedge dt,$$

y llamamos a

$$\rho = \omega_3(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}),$$

la *densidad de carga* (en el espacio de simultaneidad de la referencia), por lo que la carga total en una región Ω del espacio de simultaneidad de un observador en un instante $t = t_0$,

$$\int_\Omega \omega_3 = \int_\Omega \rho dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \int_\Omega \omega_2 \wedge dt = \int_\Omega \rho dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

pues en Ω, $t = t_0$ es constante.

En general para $D_{1p}, D_{2p}, D_{3p} \in T_p(\mathcal{X})$, la interpretación de esta tres–forma, $\omega_3(D_1, D_2, D_3)$ es la suma (con su signo) de las cargas de las partículas que atraviesan el paralelepípedo orientado de lados D_1, D_2, D_3, entendiendo que el signo de una partícula con vector tangente T, es positivo si $\Omega_4(T, D_1, D_2, D_3) > 0$, de este modo se ve que es hemisimétrica.

La **Ley de conservación de la carga** se expresa con la ecuación

$$d\,\omega_3 = 0,$$

pues si consideramos que la carga está en una región acotada Ω_t en cada instante $t \in [t_0, t_1]$ y consideramos un cilíndro 4–dimensional que en cada instante t sea una esfera que contiene a Ω_t, tendremos que el cilindro contiene el "*tubo*" en el que está la carga y si llamamos Ω al interior del cilindro y a su borde $S = \partial\Omega$, que tiene tres partes: las bases $S_0 = S \cap \{t = t_0\}$ y $S_1 = S \cap \{t = t_1\}$ y el lateral S_L, entonces como por una parte $\int_{S_L} \omega_3 = 0$ y por otra en S_0, el vector normal unitario exterior a Ω es $-\partial_t$ y en S_1 es ∂_t, siendo $i_{\partial_t}\Omega_4 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, tendremos que

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega d\omega_3 = \int_S \omega_3 = \int_{S_0} \omega_3 + \int_{S_1} \omega_3 \\ = -\int_{S_0} \rho\, dx_1 dx_2 dx_3 + \int_{S_1} \rho\, dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Como estamos en un espacio 4–dimensional es lo mismo dar la 3–forma ω_3, que un campo J.

Definición. Llamamos *vector de carga–corriente*, al campo J, tal que

$$i_J\Omega_4 = \omega_3,$$

el cual se expresa en coordenadas

$$J = \rho\partial_t + \sum_{i=1}^{3} j_i\partial_{x_i} = \rho\partial_t + \vec{j},$$

y al vector espacial $\vec{j}$ lo llamaremos *vector de corriente*.

Consideremos la identificación canónica entre campos y 1–formas dada por la métrica

$$\Phi\colon \mathcal{D}(\mathcal{X}) \to \Omega(\mathcal{X}), \qquad \Phi(D) = D^* \ , \qquad D^*(E) = D \cdot E,$$

en estos términos se tiene por ejemplo que en coordenadas

$$J^* = \rho dt - \sum j_i dx_i,$$

lo cual implica (la igualdad que utilizaremos a continuación)

$$\delta(J^*) = i_{\operatorname{grad}\rho}dt - \sum i_{\operatorname{grad} j_i}dx_i = \rho_t + \sum (j_i)_{x_i} = \operatorname{div} J.$$

Proposición 12.6

$$d\omega_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{div} J = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta(J^*) = 0.$$

Demostración. Se sigue del anterior párrafo y de que

$$d\omega_3 = d(i_J\Omega_4) = J^L\Omega_4 = (\operatorname{div} J)\Omega_4. \quad \blacksquare$$

12.4.3. Ecuaciones de Maxwell

Son un sistema de Ecuaciones que ligan el campo de fuerzas F con la 3–forma de carga ω_3.

Recordemos que en $\mathbb{R}^3$ el campo electrostático E verificaba las dos ecuaciones:

$$(1) \qquad E = -\operatorname{grad} u \quad \Leftrightarrow \quad E^* = -du \quad \Leftrightarrow \quad dE^* = 0,$$
$$(2) \qquad \operatorname{div} E = 4\pi\rho \quad \Leftrightarrow \quad \delta E^* = 4\pi\rho.$$

Ahora en nuestro espacio 4–dimensional de Minkowski consideramos el campo electromagnético F y el vector de carga–corriente J ó equivalentemente J^*, los cuales satisfacen las *ecuaciones de Maxwell*

$$(1)\quad dF = 0, \qquad (2)\quad \delta F = -4\pi J^*.$$

Observemos que la ley de conservación de la carga es consecuencia de la segunda, pues

$$0 = \delta^2 F = -4\pi \delta J^*.$$

Por otra parte de la primera se sigue que localmente $F = d\overline{\theta}$ y que a esta $\overline{\theta}$ podemos sumarle cualquier 1–forma exacta df, pues $d^2 f = 0$, por lo que podemos considerar la $\theta = \overline{\theta} + df$, tal que $\delta\theta = 0$, sin mas que considerar f cierta solución de la ecuación de ondas, pues para $h = -\delta\overline{\theta}$

$$0 = \delta\theta = \delta\overline{\theta} + \delta df = -h + \Box f \quad \Leftrightarrow \quad \Box f = h.$$

En definitiva podemos reescribir las dos ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} &(1) && \delta\theta = 0, \qquad F = d\theta, \\ &(2) && -4\pi J^* = \delta F = \delta d\theta = \delta d\theta + d\delta\theta = \Box\theta, \end{aligned}$$

y si escribimos $\theta = \theta_0 dt + \sum \theta_i dx_i$ en coordenadas, la segunda ecuación se expresa de la forma

$$-4\pi J^* = \Box\theta_0 dt + \sum \Box\theta_i dx_i$$

y como $J^* = \rho dt - \sum j_i dx_i$, si sabemos resolver las cuatro ecuaciones de ondas

$$\Box\theta_0 = -4\pi\rho, \quad \Box\theta_i = 4\pi j_i,$$

tendremos resuelto el problema de dar F conocida ω_3.

Definición. A θ la llamamos *potencial electromagnético*, a θ_0 *potencial escalar* y a $\sum \theta_i dx_i$ el *potencial vector* (aunque es una 1–forma).

Caso particular: Electrostática. La electrostática la tenemos como el caso particular en el que la fuerza en coordenadas es $F = dt \wedge du$, con $u = u(x_i)$ una función espacial. En tal caso como

$$F = \sum E_i dx_i \wedge dt + B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

tendremos que $B = 0$ (el campo magnético es nulo) y

$$du = -\sum E_i dx_i \quad \Rightarrow \quad E = \sum E_i \partial_{x_i} = -\sum u_{x_i} \partial_{x_i} = -\operatorname{grad}_{\text{espacial}} u,$$

$$\left.\begin{aligned} -\sum (E_{ix_i}) dt &= \sum i_{\operatorname{grad} E_i}(dx_i \wedge dt) \\ &= \delta F = -4\pi J^* \\ &= -4\pi(\rho dt - \sum j_i dx_i) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \vec{j} = 0, \qquad J = \rho \partial_t, \\ \operatorname{div} E = 4\pi\rho. \end{aligned}\right\}$$

Ecuaciones de Maxwell en coordenadas. Consideremos el campo electromagnético F en nuestro sistema de coordenadas (t, x_i) con campo eléctrico E y magnético B, entonces se tiene que las dos ecuaciones se expresan como las cuatro ecuaciones siguientes.

Teorema 12.7

$$dF = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{div} B = 0 \\ \operatorname{rot} E = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \end{cases}$$

$$\delta F = -4\pi J^* \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{div} E = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} B = \dfrac{\partial E}{\partial t} + 4\pi\vec{j} \end{cases}$$

Demostración. En primer lugar si consideramos $\Omega_3 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, entonces como B depende de t, tendremos que

$$\begin{aligned} B^L \Omega_3 &= dB_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dB_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dB_3 \\ &= (\sum B_{ix_i})\Omega_3 + (i_{B_t}\Omega_3) \wedge dt, \end{aligned}$$

donde $B_t = \sum B_{it}\partial_{x_i}$ y para $\gamma_E = \sum E_i\, dx_i$, tendremos que $d\gamma_E \wedge dt = (i_{\operatorname{rot} E}\Omega_3) \wedge dt$ (pues aunque las E_i dependen de t las componentes correspondientes desaparecen al multiplicar exteriormente por dt, ver además la definición de rotacional en la pág.172). Por lo tanto, como se tiene que $F = \gamma_E \wedge dt + i_B\Omega_3$ tendremos que

$$\begin{aligned} dF &= d\gamma_E \wedge dt + d(i_B\Omega_3) = (i_{\operatorname{rot} E}\Omega_3) \wedge dt + B^L\Omega_3 \\ &= (i_{\operatorname{rot} E}\Omega_3) \wedge dt + (\operatorname{div} B)\Omega_3 + (i_{B_t}\Omega_3) \wedge dt. \end{aligned}$$

y para la segunda

$$\begin{aligned}\delta(F) &= \sum i_{\operatorname{grad} E_i} dx_i \wedge dt + i_{\operatorname{grad} B_1} dx_2 \wedge dx_3 + \\ &\quad + i_{\operatorname{grad} B_2} dx_3 \wedge dx_1 + i_{\operatorname{grad} B_3} dx_1 \wedge dx_2 \\ &= -(\sum E_{ix_i})dt - \sum E_{it} dx_i - B_{1x_2} dx_3 + B_{1x_3} dx_2 - \\ &\quad - B_{2x_3} dx_1 + B_{2x_1} dx_3 - B_{3x_1} dx_2 + B_{3x_2} dx_1 \\ &= -4\pi\rho dt + \sum 4\pi j_i \, dx_i,\end{aligned}$$

y el resultado se sigue igualando componentes. ∎

Nota 12.8 De estas cuatro ecuaciones, la primera nos dice que no hay "*cargas magnéticas*"

$$\operatorname{div} B = 0,$$

la segunda es la *ley de inducción de Faraday*;

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t},$$

la tercera es la *ley de Gauss*

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho,$$

y la cuarta que es la que descubrió Maxwell

$$\operatorname{rot} B = \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi\vec{j}.$$

Antes de Maxwell se especulaba si sería $\operatorname{rot} B = 4\pi\vec{j}$, pero esto implicaba que las cargas no se mueven, pues un rotacional tiene siempre divergencia nula, por lo que eso implicaba que la $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ y por tanto por la ley de la conservación de la carga $\operatorname{div} J = 0$, tendríamos que

$$0 = \operatorname{div} J = \operatorname{div}(\rho\partial_t + \vec{j}) = \operatorname{div}(\rho\partial_t) = \rho_t,$$

por lo que la densidad de carga no varía con el tiempo, es decir las cargas no se mueven.

12.5. Ecuación de ondas

Consideremos en nuestro espacio de Minkowski

$$(\mathbb{R}^4,\ g = dt^2 - \sum dx_i^2),$$

la ecuación de ondas

$$\Box u = 0.$$

Nuestro objetivo es analizar la solución u satisfaciendo unas condiciones iniciales, en $t = t_0$, de u y su velocidad u_t.

Fijemos un punto del espacio p y un sistema de referencia que lo tenga como origen. Si encendemos una bombilla y la apagamos, las partícula de luz emitida al cabo de un tiempo t_0 forman una esfera, corte del cono de luz de vértice p con el hiperplano $t = t_0$. Ahora consideremos otra superficie: para cada $r > 0$ consideremos el hiperboloide de dos hojas

$$Y = \{h = r^2\}, \qquad h = t^2 - \sum x_i^2,$$

el cual tiene la siguiente propiedad, para cada $q = (q_i) \in Y$, el vector unitario, normal (con la métrica g) a Y en q es $N_q = q/r = (q_i/r)$, pues para $D = \sum f_i \partial_{x_i} \in \mathcal{D}(Y)$,

$$\begin{aligned} g(N_q, N_q) &= \frac{q_0^2 - \sum q_i^2}{r^2} = 1, \\ D_q h = 0 \quad &\Rightarrow \quad t(Dt) - \sum x_i (Dx_i) = 0 \quad \Rightarrow \\ g(N_q, D_q) &= \frac{1}{r}(q_0 f_0 - \sum q_i f_i) = 0. \end{aligned}$$

12.5.1. Energía de una onda

Definición. Sea u una solución de la ecuación de ondas $\Box u = 0$. Llamamos *vector de energía–impulso* de la solución en un sistema de referencia inercial (t, x_i) a

$$I = \frac{u_t^2 + \sum u_{x_i}^2}{2} \partial_t - \sum (u_t u_{x_i}) \partial_{x_i}.$$

A la función $e = (u_t^2 + \sum u_{x_i}^2)/2$, la llamamos *función energía*. (Ver 11.7, pág.895).

Proposición 12.9 *Se tienen las siguientes propiedades:*

(i) $\operatorname{div} I = 0$ *(Es la ley de conservación de la energía).*

(ii) $g(I, I) \geq 0$ *(la energía "*fluye*" a velocidad no superior a la de la luz).*

(iii) $e(x) \geq 0$ *y* $e(x) = 0$ *sii* $I_x = 0$ *sii* $d_x u = 0$.

(iv) Si D_x *es un vector orientado al futuro (i.e.* $g(D_x, \partial_t) > 0$*) y unitario,* $g(D_x, D_x) = 1$*, entonces* $g(D_x, I_x) \geq 0$ *y se da la igualdad* $g(D_x, I_x) = 0$ *sii* $I_x = 0$ *sii* $d_x u = 0$.

Demostración. (i) Se deja al lector.

(ii)

$$g(I, I) = \frac{(u_t^2 + \sum u_{x_i}^2)^2}{4} - \sum u_t^2 u_{x_i}^2 = \frac{(u_t^2 - \sum u_{x_i}^2)^2}{4}.$$

(iii) Es obvio.

(iv) Con un cambio en la base de referencia e_i, cambiando e_0 por el vector correspondiente a D_x, se tiene que $D_x = \partial_t$ y la energía es positiva. ∎

Pero no hemos visto que I sea intínseco, pues lo hemos dado en coordenadas. Pero tenemos la siguiente generalización para una 1–forma ω, de la que el caso anterior es el caso particular en que $\omega = du$.

Definición. Dada una 1–forma ω llamamos *tensor de energía–impulso* a

$$T_2 = \omega \otimes \omega - \frac{s}{2}\lambda g, \qquad s = \operatorname{traz}(\omega \otimes \omega).$$

En un sistema de referencia (t, x_i), llamamos *energía de* ω a

$$e = T_2(\partial_t, \partial_t),$$

y *vector de energía–impulso* al vector I tal que

$$I^* = i_{\partial_t} T_2.$$

Se demuestra que para $\omega = du$, $I(\omega) = I(u)$ y $e(\omega) = e(u)$, además se tienen las cuatro propiedades anterores cambiando la primera por:

(i) Si $d\omega = 0$ *y* $\delta\omega = 0$ *entonces* $\operatorname{div} T_2 = 0$*, y esto implica que* $\operatorname{div} I = 0$.

12.6. Ejercicios resueltos

Ejercicio 11.1.1.- Demostrar que la energía de la cuerda, si la soltamos con velocidad inicial nula y con la forma inicial definida por una función u, vale

$$E = \frac{T\pi^2}{4L}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 n^2,$$

para b_n los coeficientes de Fourier de la extensión impar de u.

Solución.- Sea $y(x,0) = u(x)$ e $y_t(x,0) = 0$ y consideremos la solución en la forma (observemos que nosotros no lo hemos demostrado, pero que es verdad para una u en "buenas condiciones")

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\alpha_n x)\cos(a\alpha_n t),$$

para b_n los coeficientes de Fourier de u. Ahora para $f(x) = u'(x)$ tendremos que

$$f(x) = y_x(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\alpha_n \cos(\alpha_n x),$$

y se sigue de la *igualdad de Parseval* que

$$E(t) = E(0) = \int_0^L \frac{T}{2} y_x^2(x,0)dx = \int_0^L \frac{T}{2} f(x)^2 dx$$
$$= \frac{TL}{4} < f, f >= \frac{TL}{4}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\alpha_n^2 = \frac{T\pi^2}{4L}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 n^2. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 11.1.2.- Considérese la Lagrangiana asociada a la cuerda

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\int_0^L (\rho y_t^2 - T y_x^2)dx,$$

y demuéstrese que la ecuación de ondas da un valor estacionario a la acción.

Solución.- Consideremos la acción

$$\int_a^b \mathcal{L}dt = \frac{1}{2}\int_a^b \int_0^L (\rho y_t^2 - T y_x^2)dxdt,$$

la cual si consideramos la función

$$\mathcal{F}(x,t,y,y_x,y_t) = \frac{1}{2}(\rho y_t^2 - T y_x^2),$$

se minimiza para la función $y(x,t)$ que satisfaga la Ecuación de Euler–Lagrange

$$\mathcal{F}_y - \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{F}_{y_x} - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_{y_t} = 0,$$

que es la ecuación de ondas. $\blacksquare$

Ejercicio 11.3.1.- Demostrar que la ecuación de ondas bidimensional

$$z_{xx} + z_{yy} - z_{tt} = 0,$$

con la condición frontera en el rectángulo $[0, a] \times [0, b]$

$$z(x, 0, t) = z(x, b, t) = z(0, y, t) = z(a, y, t) = 0,$$

tiene autovalores y correspondientes autofunciones

$$\lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right),$$
$$f_{mn} = \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b},$$

¿Tiene algún otro autovalor?.

Solución.- Hágase utilizando variables separadas. Por otra parte la teoría de las series dobles de Fourier demuestra que cualquier función, de clase 2 en un abierto que contenga al rectángulo, que satisfaga la condición frontera puede desarrollarse en serie, que converge absoluta y uniformemente, por el sistema f_{mn}. Por tanto si hubiese otro autovalor λ con una autofunción u, tendríamos que u es ortogonal a todas las f_{mn} y por tanto $u = 0$, a menos que λ sea una de las λ_{mn}. ∎

Ejercicio 11.4.1.- Demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{B(x,t)} f\,\omega = \int_{S(x,t)} f\, i_N \omega.$$

Solución.- Consideremos el grupo uniparamétrico

$$X_r(p) = p + r \frac{p - x}{\|p - x\|}$$

del campo N ortonormal a las esferas centradas en x, entonces $X_\epsilon(B[x,t]) = B[x, t + \epsilon] \backslash B[x, \epsilon]$ y por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_{B(x,t)} f\,\omega &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_{B[x,t+\epsilon]} f\omega - \int_{B[x,t]} f\omega}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_{X_\epsilon(B[x,t])} f\omega - \int_{B[x,t]} f\omega + \int_{B[x,\epsilon]} f\omega}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{B[x,t]} \frac{X_\epsilon^*(f\omega) - f\omega}{\epsilon} + \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_{B[x,\epsilon]} f\omega}{\epsilon} \\
&= \int_{B[x,t]} N^L(f\omega) + \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_{B[0,1]} \epsilon^3 (f \circ F)\omega}{\epsilon} \\
&= \int_{B[x,t]} i_N d(f\omega) + d i_N(f\omega) \\
&= \int_{S(x,t)} f\, i_N \omega,
\end{aligned}$$

pues $d(f\omega) = 0$ y donde $F(a) = x + \epsilon a$, que lleva $F(B[0,1]) = B[x, \epsilon]$. ∎

12.7. Bibliografía y comentarios

Boyce, W. E. and DiPrima, R.C.: "*Elementary Differential Equations and Boundary value Problems*". J.Wiley, 1977.

Courant,R. and Hilbert, D.: "*Methods of Mathematical Physics. Vol.II, Partial Differential Equations*". J.Wiley, 1962.

Derrick, W.R. and Grossman, S.J.: "*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*". Fondo Educativo Interamericano, 1984.

Edwards, C.H.Jr. and Penney,D.E.: "*Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*". Prentice–Hall Hispanoamericana, 1986.

Egorov, Yu.V. and Shubin, M.A.: "*Partial Differential Equations*". Vol.I. Springer–Verlag, 1992.

Garabedian, P.R.: "*Partial Differential Equations*". Chelsea, 1986.

Kolmogorov A.N and Fomin, S.V.: "*Elementos de la teoría de funciones y del Análisis funcional*", Ed. Mir, Moscú, 1975.

Simmons, F.: "*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*". Ed. McGraw-Hill. 1977.

Spiegel, M.R.: "*Ecuaciones diferenciales aplicadas*". Ed. Prentice Hall internacional, 1983.

Spivak, M.: "*A comprehensive Introduction to Differential Geometry*". Vol.IV, Vol.V. Publish or Perish, 1975.

Tijonov, A.N. and Samarski, A.A.: "*Ecuaciones de la Física matemática*", Pueblo y Ciencia, 1978.

Vladimirov, V.S.: "*Equations of Mathematical Physics*". Marcel Dekker, 1971.

Watson, G.N.: "*A treatise on the Theory of Bessel Functions*". Cambridge Univ. Press, 1944.

Weinberger, H.F.: "*Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*". Ed. Reverté, 1970.

Zachmanoglou, E.C. and Thoe, D.W.: "*Introduction to Partial Differential Equations with Applications*". Dover, 1986.

Las primeras ecuaciones en derivadas parciales aparecieron en *1734*, en la obra del suizo Leonhard Euler (*1707–1783*) y en *1743*, en el "*Tratado de Dinámica*" de Jean Le Rond D'Alembert (*1717–1783*). Es en esta época en la que empezó a estudiarse la considerada como primera ecuación en derivadas parciales estudiada de importancia: **la ecuación de ondas**, que físicamente estaba representada por la oscilación de una cuerda de violín.

El problema de representar una función por su serie trigonométrica

tiene una larga historia y en buena medida este problema fue el causante de que se fuera aclarando el propio concepto de función.

El primero en considerar una serie trigonométrica

$$a_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \cos \frac{a\pi t}{L} + a_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} \cos \frac{2a\pi t}{L} + \cdots ,$$

fue el suizo Daniel Bernoulli (*1700–1782*) en su intento de resolver la ecuación de ondas. Este aseguraba que tal serie representaba la solución general, aunque no argumentaba basándose en criterios matemáticos sino físicos. Sin embargo como esta solución parecía tener un carácter periódico, aparentaba tener menos generalidad que la solución

$$\phi(x + at) + \psi(x - at),$$

dada en *1746* por D'Alembert en el artículo titulado

"*Investigaciones sobre la curva que forma una cuerda tensa que se hace vibrar*",

para el que el término función significaba función analítica. Dos años después, en *1748*, Euler publicó un artículo titulado

"*Sobre la oscilación de cuerdas*",

en el que aunque seguía el método de D'Alembert, su concepto de función, y por tanto de solución, era completamente distinto al de este y mucho mas amplia pues hasta admitía como función cualquier "*curva dibujada a mano*".

En *1807*, el Francés Joseph Fourier (*1768–1830*) anunció que cualquier función puede representarse por una serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} + b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right),$$

si a_n y b_n eran los (ahora llamados) coeficientes de Fourier de la función, por esta razón tales series llevan su nombre. En *1824* dio una demostración de esto, sin embargo los encargados de informar sobre su trabajo, Lagrange, LaPlace y Legendre, lo criticaron por su vaguedad y "alegría" en los razonamientos sobre la convergencia de la serie a la función.

En un artículo de *1828*, el Alemán Peter Gustav Lejeune Dirichlet (*1805–1859*) fue el primero en demostrar rigurosamente la convergencia de la serie de Fourier para cierta clase de funciones y esto

sin tener todavía una definición clara de lo que era una función. De hecho el propio DIRICHLET, propuso 9 años después, en *1837*, la siguiente definición de función:

"Si una variable y está relacionada con una variable x, de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x, hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x".

Esta definición de función se aproxima a la actual, de aplicación entre dos conjuntos de números reales, pero lo cierto es que los conceptos de "*conjunto*" y de "*número real*" estaban lejos de tener un significado preciso en aquella época.

La confección del Tema 12, sobre electromagnetismo se la debo al profesor Juan Sancho de Salas una vez mas.

Por último remitimos al lector interesado en la historia de los problemas de la cuerda vibrante, de la membrana vibrante y de las ondas sonoras, a las páginas 666–692 del libro

KLINE, MORRIS: "*El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*". Tomo II, Ed. Alianza Univ., N.724, 1972.

Fin del Tema 12

Tema 13

La Ecuación del calor

13.1. La Ecuación del calor unidimensional

Consideremos una varilla caliente de material homogéneo, de densidad de masa ρ, de longitud L y con una sección transversal uniforme de área A.

Consideramos que la varilla es recta y que "está sobre el eje de coordenadas x", con un extremo en el origen y el otro en L. Así mismo consideramos que A es tan pequeño que los puntos de la varilla de cada sección perpendicular a la varilla, están a la misma temperatura. Además supondremos que la varilla está térmicamente aislada y por tanto el calor no sale de la varilla. Por lo tanto la temperatura será una función $u(x,t)$, que depende de la sección, que representamos por x, y del tiempo t.

Ahora pasamos a describir los principios físicos por los que se rigen el calor, la temperatura y el flujo de calor.

La **Ley de transferencia del calor** de Newton dice que:

> "Dadas dos placas A y B, paralelas a una distancia d, con temperaturas constantes T_A y T_B respectivamente, se genera un flujo de calor en la dirección perpendicular a las placas, que va de la caliente a la fría y la cantidad de calor que fluye por unidad de área y por unidad de tiempo, es directamente proporcional a

la diferencia de temperaturas entre las dos placas e inversamente proporcional a la distancia que las separa".

Es decir si denotamos con Q_{AB} el calor que fluye de A a B por unidad de tiempo y unidad de área, tendremos que

$$Q_{AB} = k\frac{T_A - T_B}{d},$$

para k la *conductividad térmica*, que es positiva pues el calor fluye de lo caliente a lo frío.

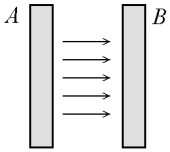


Figura 13.1. Flujo de calor

De esta ley se sigue nuestro primer principio (haciendo $d \to 0$):

Primer principio.- *La cantidad de calor que fluye por unidad de tiempo, a través de una unidad de área de una sección x hacia la derecha de la varilla, es*

$$\phi(x,t) = -k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t),$$

y en general en un cuerpo con puntos a distinta temperatura, se genera un flujo de calor que en un instante dado t, define en cada punto un vector tangente perpendicular a la superficie isoterma $\{x : u(x,t) = cte\}$ que pasa por ese punto, es decir que es proporcional al $\operatorname{grad} T$, para $T(x) = u(x,t)$

$$\Phi = -k \cdot \operatorname{grad} T = -k(u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y} + u_z\frac{\partial}{\partial z}),$$

y obsérvese que en el caso de la varilla simplemente hemos supuesto que $u_y = u_z = 0$ y

$$\Phi = \phi\frac{\partial}{\partial x}.$$

Segundo principio.- *La cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un material de masa m, de $u_1 = u$ a $u_2 = u + \Delta u$ es*

$$cm\Delta u,$$

donde c es el calor específico y depende del material.

En este principio suponemos que todos los puntos del material están a la misma temperatura u. En caso contrario tendríamos que hacer una división del material en pequeñas porciones en las que la temperatura sea prácticamente constante y aplicar el principio a cada una de ellas, por lo que la cantidad de calor necesaria para cambiar la temperatura del material de u_1 a u_2 es la integral, en el recinto R que ocupa el material

$$\int_R c\rho(u_2 - u_1)dxdydz,$$

para ρ la densidad de masa.

Sean $x \in (0, L)$ y $\epsilon > 0$. Por una parte tenemos que durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ la temperatura de la varilla cambió de $u(x,t)$ a $u(x, t + \Delta t)$ y por tanto se sigue del segundo principio que la cantidad de calor necesario para cambiar la temperatura en el trozo de varilla $I = [x, x + \epsilon]$ es

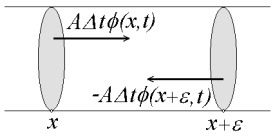


Figura 13.2. Calor que entra en I

$$\int_x^{x+\epsilon} cA\rho[u(x, t + \Delta t) - u(x,t)]dx,$$

ahora bien este calor sólo ha podido entrar en I por x —hacia la derecha— y por $x + \epsilon$ —hacia la izquierda— y estas cantidades son por el primer principio,

$$-k\Delta tAu_x(x,t) + k\Delta tAu_x(x + \epsilon, t) + o(\Delta t).$$

Por tanto tenemos que ambas cantidades deben ser iguales

$$k\Delta tA\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \epsilon, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] + o(\Delta t) = \\ = \int_x^{x+\epsilon} cA\rho[u(x, t + \Delta t) - u(x,t)]dx,$$

y dividiendo primero por Δt y haciéndolo tender a 0 y después por $c\rho A\epsilon$ y haciendo $\epsilon \to 0$, tenemos la ecuación **de tipo parabólico**

$$Ku_{xx}(x,t) = u_t(x,t), \qquad \boxed{\textbf{Ecuación del calor}} \tag{13.1}$$

donde $K = k/c\rho$ es la *difusibidad del material*.

13.1.1. El principio del máximo.

Este principio dice que si tenemos una varilla cuyos extremos tienen en todo instante una temperatura acotada por una constante M y en el instante inicial la temperatura de todos los puntos de la varilla estaba acotada por M, entonces en todo instante posterior todos los puntos de la varilla tendrán una temperatura acotada por M.

Para demostrarlo consideremos la siguiente notación. Sea $t_0 > 0$ y consideremos el rectángulo

$$R = [0, L] \times [0, t_0] = C \cup \overset{\circ}{R} \cup C_1,$$

donde C_1 es el lado de R —sin los extremos— que une el vértice $(0, t_0)$ con (L, t_0) y C son los otros tres lados.

Principio del máximo 13.1 *Sea u una solución de la ecuación del calor*

$$Ku_{xx}(x,t) = u_t(x,t), \qquad \text{para } (x,t) \in (0,L) \times (0,t_0]$$

continua en R, de clase 1 en un abierto A que contenga a $\overset{\circ}{R} \cup C_1$ y tal que u_{xx} existe, entonces para cualesquiera constantes $M_1 \leq M_2$ se tiene que

$$M_1 \leq u(x,t) \leq M_2, \quad en \quad C \quad \Rightarrow \quad M_1 \leq u(x,t) \leq M_2, \quad en \quad R.$$

Demostración.- En primer lugar observamos que basta demostrar una de las desigualdades, pues la otra se obtiene considerando la solución $-u$. Nosotros daremos sólo la demostración correspondiente a $M = M_2$ y lo haremos en dos partes. En la primera consideramos v una función continua en R, de clase 1 en A tal que v_{xx} existe, es continua y se satisface

$$\begin{aligned} Kv_{xx} > v_t, &\quad \text{para } (x,t) \in \overset{\circ}{R} \cup C_1, \\ v(x,t) \leq M, &\quad \text{para } (x,t) \in C, \end{aligned}$$

y demostraremos que $v(x,t) \leq M$, para $(x,t) \in R$.

Consideremos el punto $p \in R$ en el que v alcanza el máximo, entonces ó bien $p \in C$, en cuyo caso el resultado se sigue, ó bien se tienen las siguientes posibilidades —que son contradictorias con la hipótesis—

$$\begin{aligned} p \in \overset{\circ}{R} \quad &\Rightarrow \quad v_t(p) = 0, \;\; v_{xx}(p) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad Kv_{xx}(p) \leq v_t(p), \\ p \in C_1 \quad &\Rightarrow \quad v_t(p) \geq 0, \;\; v_{xx}(p) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad Kv_{xx}(p) \leq v_t(p). \end{aligned}$$

En segundo lugar consideramos la función u del enunciado, un $\epsilon > 0$ y la función en R

$$v(x,t) = u(x,t) + \epsilon x^2,$$

por tanto

$$\begin{aligned} Kv_{xx} &> v_t, \quad \text{para } (x,t) \in \overset{\circ}{R} \cup C_1, \\ v(x,t) &\leq M + \epsilon L^2, \quad \text{para } (x,t) \in C, \end{aligned}$$

y se sigue de la demostración anterior que en R

$$u(x,t) \leq v(x,t) \leq M + \epsilon L^2,$$

y como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, el resultado se concluye. ∎

Como consecuencia se tiene el siguiente resultado.

Teorema de Unicidad 13.2 *Dadas las funciones continuas $h(t)$ y $g(t)$ en $[0,\infty)$ y $f(x)$ en $[0,L]$, a lo sumo existe una única solución u del problema de valor inicial–frontera para la ecuación del calor*

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x,t) &= u_t(x,t), \\ u(x,0) &= f(x), \\ u(0,t) = h(t), \qquad & u(L,t) = g(t), \end{aligned} \tag{13.2}$$

continua en $[0,L] \times [0,\infty)$, de clase 1 en $(0,L) \times (0,\infty)$ y para la que exista u_{xx}.

Demostración. Basta considerar la diferencia u de dos posibles soluciones, para la que se tiene por el resultado anterior que para cualquier t_0 y cualesquiera $(x,t) \in [0,L] \times [0,t_0]$, $u(x,t) = 0$. ∎

También se tiene el siguiente resultado.

Teorema de dependencia continua 13.3 *La solución u del problema de valor inicial–frontera para la ecuación del calor 13.2, si existe depende continuamente de los datos f, g y h, en el sentido de que si u_i es, para $i = 1,2$, la solución correspondiente a f_i, g_i y h_i y se tiene que para un $\epsilon > 0$ y un $t_0 > 0$*

$$\max_{0\leq x\leq L} |f_1(x) - f_2(x)| \leq \epsilon,$$

$$\max_{0\leq t\leq t_0} |h_1(t) - h_2(t)| \leq \epsilon, \quad \max_{0\leq t\leq t_0} |g_1(t) - g_2(t)| \leq \epsilon,$$

entonces

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \epsilon, \quad \textit{para } (x,t) \in [0,L] \times [0,t_0].$$

Demostración. Hágala el lector. ∎

Nota 13.4 Observemos que la ecuación del calor es, como la de ondas, invariante por traslaciones tanto en el tiempo como en el espacio, por lo tanto los resultados anteriores son válidos si en vez del intervalo temporal $[0,t_0]$, consideramos $[T,T+t_0]$, para cualquier $T \in \mathbb{R}$. Sin embargo no es invariante, como sí lo es la de ondas y en esto tenemos una diferencia fundamental entre ambas, por la transformación temporal $\bar{t} = -t$, pues esta transformación la convierte en la ecuación

$$Ku_{xx} = -u_{\bar{t}},$$

la cual difiere esencialmente de la ecuación del calor. Como consecuencia no podemos remitirnos a los resultados obtenidos hasta ahora —en particular el principio del máximo—, en los que siempre hemos hablado de la evolución de la varilla "*hacia el futuro*" ($t \geq 0$), para conocer el proceso de la varilla "*hacia el pasado*" ($t \leq 0$). Por tanto, en principio, tendríamos que elaborar nuevos resultados.

Sin embargo en general se tiene que aunque el conocimiento de la temperatura en los extremos de la varilla en todo instante y el de toda la varilla en un instante t_0 dado, determinan la temperatura de toda la varilla en los instantes posteriores a t_0, no la determinan en los instantes anteriores a t_0 (justificaremos esto en la nota (13.7), pág.953). En términos físicos esta propiedad se expresa diciendo que,

"la conducción del calor es un proceso irreversible".

13.1.2. Solución general.

Analicemos primero si existe alguna solución de 13.1 de la forma

$$u(x,t) = h(x)g(t),$$

en cuyo caso para cualquier (x,t) se debe satisfacer

$$Kh''(x)g(t) = h(x)g'(t),$$

y esto ocurre si existe una constante λ tal que

$$\frac{h''(x)}{h(x)} = \frac{g'(t)}{Kg(t)} = -\lambda,$$

es decir si se satisfacen las ecuaciones

$$h''(x) + \lambda h(x) = 0, \quad g'(t) + K\lambda g(t) = 0,$$

siendo la solución general de estas ecuaciones —para $\lambda = \alpha^2$—

$$h(x) = A\cos(\alpha x) + B\,\mathrm{sen}(\alpha x),$$
$$g(t) = C\,\mathrm{e}^{-K\alpha^2 t},$$

el caso $\lambda < 0$ no lo consideramos pues la correspondiente solución

$$u(x,t) = h(x)g(t) \to \infty, \qquad \text{cuando } t \to \infty,$$

por su parte el caso $\lambda = 0$ corresponde a la solución trivial

$$u(x,t) = Ax + B.$$

En definitiva vemos que las funciones de la forma

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-K\alpha^2 t}[A\cos(\alpha x) + B\,\mathrm{sen}(\alpha x)],$$

y sus sumas finitas son soluciones de la ecuación del calor.

13.1.3. Soluciones con condiciones inicial y frontera dadas.

Caso 1.- Condiciones en la frontera homogéneas. En primer lugar vamos a considerar el caso en que la varilla mantiene sus extremos a una temperatura constante igual a 0 y que en el instante inicial $t = 0$ la temperatura de toda la varilla está dada por una función $f(x)$. Es decir estudiaremos las soluciones $u(x,t)$, de 13.1 que satisfacen las condiciones frontera–iniciales

$$u(0,t) = u(L,t) = 0\ , \qquad u(x,0) = f(x).$$

Analicemos primero si existe alguna solución de 13.1 de la forma

$$u(x,t) = h(x)g(t),$$

satisfaciendo las condiciones

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad h(0) = h(L) = 0.$$

Ahora bien nosotros sabemos que las únicas soluciones h no triviales con esas condiciones corresponden a

$$\lambda = \alpha_n^2 \ , \qquad \alpha_n = \frac{n\pi}{L},$$

para cada $n = 1, 2, \ldots$ Y las soluciones son, para cada n, múltiplos de

$$h_n(x) = \operatorname{sen}(\alpha_n x),$$

y las soluciones g, que corresponden a estos valores de λ, son de la forma

$$g(t) = A\, \mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t}.$$

Se sigue que para cada $n \geq 1$,

$$u_n(x,t) = h_n(x)g_n(t) = \mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x),$$

y cualquier combinación finita de ellas son soluciones de

$$Ku_{xx} = u_t \ , \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

Ahora es de esperar que las combinaciones infinitas

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n(x) g_n(t),$$

también sean solución y que eligiendo adecuadamente las b_n se tenga la otra condición frontera

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n(x) g_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\alpha_n x) = f(x).$$

Como nuestra f está definida en $[0, L]$, podemos extenderla a $[-L, L]$ de forma impar, por $f(-x) = -f(x)$. Por tanto consideramos sus coeficientes de Fourier

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

y con ellos definimos, al menos formalmente, la "presumible solución"

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n(x) g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, \mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x). \tag{13.3}$$

Analicemos ahora si esta serie define realmente una función continua en $[0,L]\times[0,\infty)$, que sea solución de la ecuación del calor, satisfaciendo las condiciones dadas.

En primer lugar tenemos que

$$|b_n| \le c = \frac{2}{L}\int_0^L |f(x)|dx,$$

y por tanto si f es continua en $[0,L]$ —o con mas generalidad, si f es integrable—, sus coeficientes de Fourier b_n están uniformemente acotados. En tal caso se tiene el siguiente resultado.

Teorema 13.5 *Si $b_n \in \mathbb{R}$ están uniformemente acotados, $|b_n| \le c < \infty$, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \, \mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x),$$

converge puntualmente, en $\mathbb{R}\times(0,\infty)$, a una función

$$u \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty)),$$

que satisface la ecuación del calor con las condiciones frontera

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad \text{para } 0 < t < \infty.$$

Si además $f\colon [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, de clase 1, salvo en una colección finita de puntos en los que tiene derivadas laterales finitas, satisface $f(0) = f(L) = 0$ y b_n son los coeficientes de Fourier de su extensión impar, entonces la serie converge puntualmente, en $\mathbb{R}\times[0,\infty)$, a una función u continua, que en $t = 0$ vale $u(x,0) = f(x)$.

Demostración. En primer lugar los términos de la serie están acotados en módulo por

$$|b_n \, \mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x)| \le c \, \mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t} = c(\mathrm{e}^{\frac{-K\pi^2 t}{L^2}})^{n^2},$$

y como los términos de la derecha definen una serie que converge uniformemente en $\mathbb{R}\times[t_0,\infty)$, para cualquier $t_0 > 0$, nuestra serie también

converge uniformemente en ese conjunto a una función u, que es continua en $\mathbb{R} \times [t_0, \infty)$, para todo $t_0 > 0$ —pues las sumas parciales de nuestra serie son continuas—. Por tanto u es continua en todo $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ y satisface la condición frontera.

Del mismo modo los términos de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(b_n \, \mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x) \right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(b_n \, \mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x) \right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(b_n \, \mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x) \right),$$

están acotados en módulo, para cada $t_0 > 0$, por términos de series uniformemente convergentes[1] en $\mathbb{R} \times [t_0, \infty)$, por tanto ellas convergen uniformemente y definen funciones continuas que son respectivamente u_t, u_x y u_{xx}. Del mismo modo se demuestra que u tiene derivadas parciales continuas de todos los ordenes para todo x y todo $t > 0$ y por tanto es de clase infinito. Ahora se tiene que

$$K u_{xx} - u_t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, \mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x)(-K\alpha_n^2 + K\alpha_n^2) = 0,$$

y por tanto u satisface la ecuación del calor.

Para resolver completamente nuestro problema falta ver que en las hipótesis de regularidad de f, u se extiende con continuidad a $t = 0$ y $u(x, 0) = f(x)$, es decir

$$\lim_{t \to 0^+} u(x, t) = f(x).$$

Si consideramos las sumas parciales

$$s_N(x, t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \, \mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x),$$

tendremos por el **Teorema de Dirichlet** que

$$s_N(x, 0) = \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}(\alpha_n x) \;\to\; f(x),$$

[1] Es consecuencia de que $\sum_n n^m k^n < \infty$, para $m \in \mathbb{N}$ y $|k| < 1$ fijos.

y la convergencia es uniforme, por tanto para todo $\epsilon > 0$ existe un N, tal que para $m, n \geq N$ se tiene

$$|s_n(x,0) - s_m(x,0)| \leq \epsilon,$$

pero $v = s_n - s_m$ es solución de la ecuación del calor y satisface la condición frontera $v(0,t) = v(L,t) = 0$, para todo $t \geq 0$, por tanto se sigue del principio del máximo que

$$|s_n(x,t) - s_m(x,t)| \leq \epsilon,$$

para todo $(x,t) \in [0,L] \times [0,\infty)$, por tanto s_n converge uniformemente a u en $[0,L] \times [0,\infty)$ y u es continua en ese conjunto. ∎

En definitiva hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema de Existencia 13.6 *Si $f\colon [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, de clase 1, salvo en una colección finita de puntos en los que tiene derivadas laterales finitas y satisface $f(0) = f(L) = 0$, entonces existe una solución u de la ecuación del calor*

$$\begin{aligned} K u_{xx}(x,t) &= u_t(x,t), \\ u(x,0) &= f(x), \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \end{aligned}$$

que viene dada por convergencia uniforme de la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, \mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}(\alpha_n x),$$

en $[0,L] \times [0,\infty)$, con los b_n los coeficientes de Fourier de la extensión impar de f, y siendo u continua en $[0,L] \times [0,\infty)$ y de $\mathbb{C}^\infty((0,L) \times (0,\infty))$.

Nota 13.7 Podemos utilizar el hecho de que la solución u encontrada es de $\mathbb{C}^\infty((0,L) \times (0,\infty))$, aunque la condición inicial f sólo sea continua, para demostrar que en general las condiciones iniciales–frontera no determinan la solución en el pasado, es decir para $t \leq 0$. Para ello supongamos que existe un $t_0 < 0$ y una solución u del problema "*hacia el pasado*"

$$\begin{aligned} &K u_{xx} = u_t, \quad \text{en } (0,L) \times (t_0, 0] \\ &u(0,t) = u(L,t) = 0\ , \quad \text{para } t_0 \leq t \leq 0 \\ &u(x,0) = f(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

para f continua, tal que u sea continua en $[0, L] \times [t_0, 0]$.

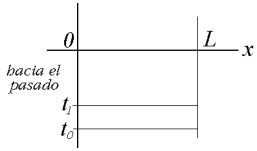


Figura 13.3. Dominio del problema (hacia el pasado)

Consideremos entonces la función

$$g(x) = u(x, t_1),$$

con un $t_0 < t_1 < 0$ arbitrario. Tal función es continua en $[0, L]$ y de clase 1 en $(0, L)$, pues u_{xx} existe, sin embargo no sabemos si tiene derivadas laterales finitas en 0 y L. En cualquier caso sabemos que si existe la solución continua en $[0, L] \times [t_1, 0]$, del problema "*hacia el futuro*"

$$\begin{aligned} &Ku_{xx} = u_t, \quad \text{en } (0, L) \times (t_1, 0] \\ &u(0, t) = u(L, t) = 0\ , \quad \text{para } t_1 \le t \le 0 \\ &u(x, t_1) = g(x), \quad \text{para } 0 \le x \le L, \end{aligned}$$

esta es única y además depende continuamente de g y como nuestra u lo satisface es la solución. Ahora bien si g tuviese derivadas laterales finitas en 0 y L, la solución de este problema sería

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, \mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 (t - t_1)} \operatorname{sen}(\alpha_n x).$$

para b_n los coeficientes de Fourier de la extensión impar de g, que por ser continua están acotados, y con esto bastaba realmente para demostrar que u es de $\mathbb{C}^\infty((0, L) \times (t_0, \infty))$, pero entonces esto implica que $u(x, 0) = f(x)$ es de $\mathbb{C}^\infty(0, L)$, lo cual no tiene por qué ser cierto. En el caso de que g no verificase las propiedades dichas, no importa, como partimos de que u es continua, también admite la representación

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, \mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 (t - t_1)} \operatorname{sen}(\alpha_n x).$$

y se concluye del mismo modo. La razón de poderla representar también mediante la serie es que al ser u continua depende continuamente de g, que podemos poner como límite uniforme de funciones g_m continuas, que se anulen en 0 y L y con derivadas laterales finitas en todo punto. Como las soluciones u_m, correspondientes a g_m, admiten la representación en serie y convergen uniformemente a u y se tiene la convergencia de coeficientes de Fourier

$$\frac{2}{L}\int_0^L g_m(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx \to \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx, \qquad m\to\infty,$$

tendremos el resultado como una aplicación del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Nota 13.8 La solución

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t}\operatorname{sen}(\alpha_n x),$$

para $\alpha_n = n\pi/L$ y los coeficientes de FOURIER

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}(\alpha_n x)dx,$$

de nuestro problema

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x,t)&=u_t(x,t),\\ u(x,0)&=f(x),\\ u(0,t)=0,\qquad & u(L,t)=0,\end{aligned}$$

admite la forma integral

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^L f(\xi)\operatorname{sen}(\alpha_n\xi)\,d\xi\,\mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t}\operatorname{sen}(\alpha_n x)\\ &=\int_0^L f(\xi)K(\xi,x,t)\,d\xi,\end{aligned}$$

para la función

$$K(\xi,x,t)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t}\operatorname{sen}(\alpha_n\xi)\operatorname{sen}(\alpha_n x).$$

Remitimos al lector interesado a la pág.115 del WEINBERGER, (ver también TIJONOV, A.N. AND SAMARSKI, A.A., p.234), en el que se demuestra, utilizando esta representación, que nuestra solución sigue siéndolo para una clase mas amplia de funciones f de la que los teoremas de convergencia de Fourier permiten, en particular si f es acotada y continua en $x = x_0$, entonces la solución

$$u(x,t) = \int_0^L f(\xi)K(\xi,x,t)d\xi,$$

satisface

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = f(x_0),$$

con esto tenemos otra forma de justificar los comentarios de la nota anterior aunque g no tuviera derivadas laterales finitas en 0 y L. Se puede demostrar (ver TIJONOV, A.N. AND SAMARSKI, A.A., p.236) que si f es continua salvo en un conjunto finito de puntos x_i, tal solución es la única acotada y continua en los puntos $(x,0)$, con $x \neq x_i$.

Ejercicio 13.1.1 Encontrar las soluciones de la ecuación

$$Ku_{xx} = u_t, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0,$$

correspondientes a las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad u(x,0) = \operatorname{sen}^3 \frac{\pi x}{L},\\
&(2) \quad u(x,0) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, L/2];\\ L-x, & \text{si } x \in [L/2, L] \end{cases}\\
&(3) \quad u(x,0) = x(L-x).
\end{aligned}$$

Caso 2.- Condiciones en la frontera no homogéneas. Hemos dado por tanto contestación a la existencia de solución del problema homogéneo en las condiciones frontera, entendiendo por esto que $h(t) = g(t) = 0$. En cuanto al problema general

$$\begin{aligned}
Ku_{xx}(x,t) &= u_t(x,t),\\
u(x,0) &= f(x),\\
u(0,t) = h(t), \qquad & u(L,t) = g(t),
\end{aligned} \tag{13.4}$$

podemos reducirlo al homogéneo, siempre que podamos encontrar al menos una solución u_1 del problema actual sin la condición inicial, es decir de

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x,t) &= u_t(x,t), \\ u(0,t) = h(t), \qquad & u(L,t) = g(t), \end{aligned}$$

pues en tal caso basta encontrar la solución u_2, del problema homogéneo

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x,t) &= u_t(x,t), \\ u(x,0) &= f(x) - u_1(x,0), \\ u(0,t) = 0, \qquad & u(L,t) = 0, \end{aligned}$$

para obtener la solución de 13.4, que es

$$u = u_1 + u_2.$$

Por ejemplo este proceso puede seguirse en el problema

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x,t) &= u_t(x,t), \\ u(x,0) &= f(x), \\ u(0,t) = a, \qquad & u(L,t) = b, \end{aligned}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, pues en tal caso una solución u_1 es

$$u_1(x,t) = a + x\frac{b-a}{L}.$$

Ejercicio 13.1.2 Encontrar las soluciones de la ecuación

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x,t) &= u_t(x,t), \\ u(x,0) &= f(x), \\ u(0,t) = a + ct, \qquad & u(L,t) = b + ct, \end{aligned}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Por otra parte para encontrar una solución de

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x,t) &= u_t(x,t), \\ u(0,t) = h(t), \qquad & u(L,t) = g(t), \end{aligned}$$

basta encontrar por separado una solución de

$$\begin{gathered} Ku_{xx}(x,t) = u_t(x,t), \\ u(0,t) = h(t), \qquad u(L,t) = 0, \end{gathered}$$

y sumársela a una de

$$\begin{gathered} Ku_{xx}(x,t) = u_t(x,t), \\ u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = g(t), \end{gathered}$$

y para encontrar una solución de la primera consideramos primero el caso más simple

$$\begin{gathered} Ku_{xx}(x,t) = u_t(x,t), \\ u(0,t) = A\cos\omega t, \qquad u(L,t) = 0, \end{gathered}$$

el cual podemos resolver en variables separadas considerando la parte real de una solución compleja

$$z(x,t) = y(x)\,\mathrm{e}^{-i\omega t},$$

a la que le pedimos que verifique

$$y'' + \frac{i\omega}{K}y = 0, \quad y(0) = A, \quad y(L) = 0,$$

lo cual implica que

$$y(x) = (A-\lambda)\,\mathrm{e}^{-\alpha x} + \lambda\,\mathrm{e}^{\alpha x} = y_1(x) + iy_2(x),$$

para

$$\alpha = \sqrt{\frac{-i\omega}{K}} = \sqrt{\frac{\omega}{2K}}(-1+i),$$

y donde la constante λ es tal que $y(L) = 0$. La solución por tanto es

$$y_1(x)\cos\omega t + y_2(x)\,\mathrm{sen}\,\omega t.$$

Si ahora la función $h(t)$ es combinación de armónicos de distintas frecuencias, la solución se obtiene como superposición de las soluciones correspondientes a cada armónico por separado.

Por último remitimos al lector a la pág.134 del WEINBERGER donde se estudia la solución del problema de la ecuación del calor no homogénea

$$\begin{aligned} Ku_{xx}(x,t) &= u_t(x,t) + F(x,t), \\ u(x,0) &= f(x), \\ u(0,t) = 0, &\qquad u(L,t) = 0, \end{aligned}$$

Caso 3.- Extremos de la varilla aislados. En este caso consideramos que la varilla mantiene sus extremos aislados, de modo que no hay flujo de calor que entre ni salga por ellos y que en el instante inicial $t = 0$ la temperatura de toda la varilla está dada por una función $f(x)$. Es decir estudiamos las soluciones de la ecuación del calor que satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0\ , &\qquad \text{para } t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x)\ , &\qquad \text{para } x \in [0,L]. \end{aligned}$$

Teorema 13.9 *Si u es una función continua en la franja rectangular $[0,L] \times [0,T)$, con $0 < T \leq \infty$, que en su interior es de clase 2, tiene derivadas u_x y u_t acotadas, satisface la ecuación del calor y en cada lado vertical de la franja satisface una de las dos condiciones frontera*

$$\begin{aligned} u(0,t) = 0 \quad \acute{o} \quad u_x(0,t) = 0, \quad t \in [0,T], \\ u(L,t) = 0 \quad \acute{o} \quad u_x(L,t) = 0, \quad t \in [0,T], \end{aligned}$$

entonces la función en $t \in [0,T)$

$$E(t) = \int_0^L u^2(x,t)dx,$$

es decreciente.

Demostración. Consideremos $0 \leq t_1 < t_2 < T$, el campo N unitario exterior y ortogonal al rectángulo $\mathcal{R} = [0,L] \times [t_1,t_2]$, que en los lados de rectángulo verticales (derecho e izquierdo) y horizontales (de arriba y abajo), vale respectivamente

$$\frac{\partial}{\partial x}, \qquad -\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial}{\partial t},$$

así mismo consideremos el campo

$$D = 2Kuu_x \frac{\partial}{\partial x} - u^2 \frac{\partial}{\partial t},$$

y la desigualdad

$$0 = 2u(Ku_{xx} - u_t) = K(2uu_x)_x - 2K(u_x)^2 - (u^2)_t \leq \operatorname{div} D,$$

en tales términos se sigue aplicando el **Teorema de Stokes**, (14.12), pág.988 que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathcal{R}} \operatorname{div} D \, dx \wedge dt \\ &= \int_{\partial\mathcal{R}} < D, N > i_N(dx \wedge dt) \\ &= \int_0^T (2Kuu_x)_{|x=L} dt - \int_0^T (2Kuu_x)_{|x=0} dt - \\ &\quad - \int_0^L u^2(x,t_2)dx + \int_0^L u^2(x,t_1)dx \\ &= \int_0^L u^2(x,t_1)dx - \int_0^L u^2(x,t_2)dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema de Unicidad 13.10 *Si existe una función en las condiciones del resultado anterior, que satisfaga la ecuación del calor, la condición inicial*

$$u(x,0) = f(x), \qquad \text{para } x \in [0,L],$$

y una de las cuatro condiciones frontera para $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} & u(0,t) = g(t), \quad u(L,t) = h(t), \\ \text{ó} \quad & u_x(0,t) = g(t), \quad u_x(L,t) = h(t) \\ \text{ó} \quad & u_x(0,t) = g(t), \quad u(L,t) = h(t) \\ \text{ó} \quad & u(0,t) = g(t), \quad u_x(L,t) = h(t) \end{aligned}$$

entonces es única.

Demostración. La diferencia de dos posibles soluciones satisface las mismas condiciones pero para $f = g = h = 0$, entonces se sigue del resultado anterior que $E(t) \leq E(0) = 0$ y por tanto tal función debe anularse en todo punto de la franja. ∎

Consideremos ahora la solución general de la ecuación del calor

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-K\alpha^2 t}[A\cos(\alpha x) + B\,\mathrm{sen}(\alpha x)],$$

e impongamos las condiciones frontera. De $u_x(0,t) = 0$ se sigue que $B = 0$ y de $u_x(L,t) = 0$ que

$$\alpha = \alpha_n = \frac{n\pi}{L},$$

y por tanto nuestra función es un múltiplo de

$$u_n(x,t) = \mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t}\cos(\alpha_n x),$$

ahora bien aun no hemos impuesto la condición inicial y es de esperar que las combinaciones infinitas de estas funciones

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t}\cos(\alpha_n x),$$

también sean solución y que eligiendo adecuadamente las a_n se tenga la condición inicial

$$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\alpha_n x) = f(x).$$

Como nuestra f está definida en $[0,L]$, podemos extenderla a $[-L,L]$ de forma par, por $f(-x) = f(x)$. Por tanto consideramos sus coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,$$

y con ellos definimos, al menos formalmente, la "presumible solución"

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\mathrm{e}^{-K\alpha_n^2 t}\cos(\alpha_n x),$$

de un modo similar al del caso analizado anteriormente se demuestra que la serie realmente converge a una solución, si f es continua y derivable salvo en un número finito de puntos en los que tenga límites y derivadas laterales finitos.

Ejercicio 13.1.3 Encontrar la solución de la ecuación

$$\begin{aligned} &Ku_{xx}(x,t) = u_t(x,t),\\ &u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,\\ &u(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \in [0, \frac{L-a}{2}),\\ 1, & \text{para } x \in [\frac{L-a}{2}, \frac{L+a}{2}],\\ 0, & \text{para } x \in (\frac{L+a}{2}, L]. \end{cases} \end{aligned}$$

13.1.4. El problema de valor inicial.

Consideremos ahora el problema de la ecuación del calor en una varilla infinita, que seguiremos suponiendo aislada. Es decir consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &Ku_{xx}(x,t) = u_t(x,t), \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,\\ &u(x,0) = f(x), \qquad\quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{13.5}$$

donde supondremos que f es continua. Este problema puede tener mas de una solución[2] u, pero tiene sólo una que sea acotada.

El siguiente resultado se basa en el principio del máximo para rectángulos finitos.

Teorema del valor extremo 13.11 *Si u es una solución de la ecuación del calor continua y acotada en $\mathbb{R} \times [0,\infty)$, entonces*

$$\begin{aligned} &M_1 \le u(x,0) \le M_2, \quad \textit{para } x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow\\ &M_1 \le u(x,t) \le M_2, \quad \textit{para } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty). \end{aligned}$$

Demostración. Como en el caso acotado basta hacer la demostración para M_2, y basta hacerla —restándole M_2 a u— para $M_2 = 0$. Veamos pues que si $u(x,0) \le 0$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$u(x,t) \le 0, \quad \text{para } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty),$$

[2] En la pág. 246 del Copson se da un ejemplo de *Tikhonov* en el que demuestra que la ecuación no tiene solución única a menos que esté acotada por

$$|u(x,t)| < M\,\mathrm{e}^{ax^2}.$$

En la pág. 344 del Zachmanoglou and Thoe se da también referencia de no unicidad para $f = 0$.

para ello consideremos $|u(x,t)| \leq M < \infty$, para $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ y consideremos la también solución de la ecuación del calor

$$v(x,t) = \frac{2M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + Kt\right),$$

para $L > 0$ arbitrario pero fijo. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} u(x,0) \leq 0 \leq v(x,0), &\quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \\ u(\pm L,t) \leq M \leq v(\pm L,t), &\quad \text{para } t \geq 0, \end{aligned}$$

y se sigue del principio del máximo en $[-L,L]$ que

$$u(x,t) \leq v(x,t) = \frac{2M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + Kt\right), \quad \text{para } (x,t) \in [-L,L] \times [0,\infty),$$

y fijado el punto (x,t) y haciendo $L \to \infty$ se sigue el resultado. ∎

Como consecuencia trivial de este resultado se tienen los **Teoremas** de **Unicidad** y de **Dependencia continua del dato inicial**.

Nota 13.12 A continuación vamos a dar la solución explícita de la ecuación del calor satisfaciendo la condición inicial 13.5, pero antes vamos a justificar la construcción de esta solución.

Nosotros sabemos que las soluciones (reales), en variables separadas, de la ecuación del calor, son las combinaciones de la parte real y la parte imaginaria de las soluciones complejas que son

$$\mathrm{e}^{-\alpha^2 Kt}\,\mathrm{e}^{i\alpha x},$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$. Ahora bien es de esperar que una superposición infinita de estas soluciones

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\alpha)\,\mathrm{e}^{-\alpha^2 Kt}\,\mathrm{e}^{i\alpha x}\,d\alpha,$$

también sea solución y si queremos que en $t = 0$ coincida con nuestra función $f(x)$, la función $\lambda(\alpha)$ debe verificar

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\alpha)\,\mathrm{e}^{i\alpha x}\,d\alpha,$$

pero en tal caso f es la *transformada de Fourier*[3] de λ y se sigue del **Teorema de inversión** que

$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{e}^{-i\alpha z}\,dz,$$

en tal caso la presumible solución será

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{e}^{-i\alpha z}\,\mathrm{e}^{-\alpha^2 Kt}\,\mathrm{e}^{i\alpha x}\,d\alpha\,dz,\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\alpha(x-z)-\alpha^2 Kt}\,d\alpha\right] f(z)dz,\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sqrt{\frac{\pi}{Kt}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}}\right] f(z)dz,\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{Kt}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}}\,f(z)dz, \end{aligned}$$

pues se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\alpha(x-z)-\alpha^2 Kt}\,d\alpha &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha^2 Kt}[\cos\alpha(x-z)+i\,\mathrm{sen}\,\alpha(x-z)]\,d\alpha\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha^2 Kt}\cos\alpha(x-z)\,d\alpha, \end{aligned}$$

y esto se sigue por ser $\exp\{-\alpha^2 Kt\}\,\mathrm{sen}\,\alpha(x-z)$ impar e integrable. Ahora si consideramos

$$I(r) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta^2}\cos\beta r\,d\beta,$$

tendremos que $I'(r) = -(r/2)I(r)$, para lo cual basta integrar en β

$$(\mathrm{e}^{-\beta^2}\,\mathrm{sen}\,\beta r)' = -2\beta\,\mathrm{e}^{-\beta^2}\,\mathrm{sen}\,\beta r + r\,\mathrm{e}^{-\beta^2}\cos\beta r,$$

de donde se sigue que

$$I(r) = I(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4}} = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4}},$$

y ahora basta considerar la nueva variable

$$\beta = \alpha\sqrt{Kt}, \qquad \text{y} \qquad r = \frac{x-z}{\sqrt{Kt}},$$

[3] Ver Rudin, pág. 192.

pues en tal caso tendremos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha^2 Kt} \cos\alpha(x-z)\, d\alpha &= \frac{1}{\sqrt{Kt}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta^2} \cos\beta r\, d\beta \\ &= \frac{1}{\sqrt{Kt}} \sqrt{\pi}\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{Kt}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}}.\end{aligned}$$

Teorema de existencia. Integral de Poisson 13.13 *Sea f acotada en $\mathbb{R}$, entonces la función*

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{Kt}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}}\, f(z)\, dz, & \text{para } t > 0 \\ f(x), & \text{para } t = 0. \end{cases}$$

es solución de la ecuación del calor, acotada en $\mathbb{R} \times [0,\infty)$, de clase infinito en $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ y continua en $(x,0)$ si f es continua en x.

Demostración. Por ser f acotada se sigue que para cada (x,t), con $t > 0$, la función

$$\frac{1}{\sqrt{Kt}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}}\, f(z), \tag{13.6}$$

y sus derivadas respecto de t y x son integrables en z, de hecho uniformemente integrables en un entorno acotado de (x,t), con $t > 0$. Esto se sigue de que $P(z)\exp\{-z^2\}$ es integrable[4] para cualquier polinomio P. Por lo tanto $u(x,t)$ define una función de clase infinito en $t > 0$. Del mismo modo se tiene que u es acotada, pues si $|f| \le M$, tendremos que para $t = 0$, $|u| \le M$ y para $t > 0$ y considerando el cambio de variable $\xi = (z-x)/2\sqrt{Kt}$

$$|u(x,t)| \le \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{Kt}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}}\, dz = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2}\, d\xi = M.$$

[4]Recordemos que,

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}\, \mathrm{e}^{-x}\, dx = 2\int_0^{\infty} \xi^{2p-1}\, \mathrm{e}^{-\xi^2}\, d\xi,$$

para $\xi^2 = x$ y que por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^k\, \mathrm{e}^{-\xi^2}\, d\xi = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 2n+1, \\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right), & \text{si } k = 2n. \end{cases}$$

Por otra parte se tiene que 13.6 satisface la ecuación del calor y por tanto también u en $t > 0$.

Tan sólo falta ver que u es continua en $(x_0, 0)$, si f lo es en x_0. Para ello consideremos un $\epsilon > 0$ y un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, para $|x - x_0| < \delta$, entonces haciendo el cambio de variable $\xi = z - x$, tendremos que

$$\begin{aligned}
|u(x,t) - u(x_0,0)| &= |u(x,t) - f(x_0)| \\
&\leq |u(x,t) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| \\
&< \epsilon + \frac{1}{2\sqrt{\pi K t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}} [f(z) - f(x)] dz = \\
&= \epsilon + \frac{1}{2\sqrt{\pi K t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4Kt}} [f(x+\xi) - f(x)] d\xi \\
&= \epsilon + \frac{1}{2\sqrt{\pi K t}} \int_{-\infty}^{-\delta} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4Kt}} [f(x+\xi) - f(x)] d\xi + \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi K t}} \int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4Kt}} [f(x+\xi) - f(x)] d\xi + \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi K t}} \int_{\delta}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4Kt}} [f(x+\xi) - f(x)] d\xi,
\end{aligned}$$

y para la segunda integral tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2\sqrt{\pi K t}} \int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4Kt}} [f(x+\xi) - f(x)] d\xi \right| \leq \\
&\qquad \leq \frac{\epsilon}{2\sqrt{\pi K t}} \int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4Kt}} \, d\xi < \epsilon,
\end{aligned}$$

en cuanto a las otras dos integrales son similares y acotaremos la última, para ello consideremos el cambio $\beta = \xi / 2\sqrt{Kt}$ y la cota $|f| \leq M$, entonces

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2\sqrt{\pi K t}} \int_{\delta}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4Kt}} [f(x+\xi) - f(x)] d\xi \right| \leq \\
&\qquad \leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{\delta/2\sqrt{Kt}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta^2} \, d\beta < \epsilon,
\end{aligned}$$

para t suficientemente pequeño, por lo tanto

$$|u(x,t) - u(x_0,0)| < 4\epsilon. \quad \blacksquare$$

Nota 13.14 Observen los que han estudiado estadística, que

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi K t}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}},$$

es la función de densidad de una distribución normal de media z y varianza $2Kt$.

Nota 13.15 De este resultado se sigue que si f es una función no negativa, con soporte en un pequeño intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$, es decir que la temperatura de nuestra varilla infinita es nula salvo en este pequeño trozo en el que es positiva, entonces la solución dada en el teorema

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi K t}} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathrm{e}^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}}\, f(z) dz,$$

es positiva en todo punto x de la varilla y todo instante $t > 0$ y por tanto no importa lo lejos que esté un punto del lugar de la varilla en el que la temperatura es positiva en el instante 0, para que esto le influya instantáneamente y su temperatura se eleve, por tanto *el calor se transmite con velocidad infinita*, al contrario de lo que ocurre para las ondas.

Por otra parte si f es continua hemos visto que la solución acotada es única, por tanto esta es la solución. Sin embargo si f es continua salvo en un conjunto finito de puntos x_i, esta es una solución y se puede demostrar siguiendo el caso de la barra finita (ver Tijonov, A.N. and Samarski, A.A., p.236) que es la única acotada y continua en los puntos $(x, 0)$ con $x \neq x_i$.

Ejercicio 13.1.4 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Encontrar la solución de

$$K u_{xx}(x,t) = u_t(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty),$$
$$u(x,0) = \begin{cases} a, & \text{si } x < 0; \\ b, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

13.2. La Ecuación del calor n–dimensional.

13.2.1. Caso bidimensional. Planteamiento.

Consideremos una placa caliente, de material homogéneo —por ejemplo hecha de hierro—, de densidad de masa ρ.

Consideremos que la placa es plana, que ocupa una región U del plano xy, limitada por una curva diferenciable a trozos $\partial U = C$. Así mismo consideremos que las dos caras de la placa equidistan, que están aisladas y que su espesor a es tan pequeño que los puntos de la placa de cada dirección perpendicular al plano de la placa, están a la misma temperatura. Por lo tanto la temperatura de la placa será una función $u(x, y, t)$, que depende del punto $(x, y) \in U$ y del tiempo t.

Consideremos un punto de la placa $(x, y) \in U$ y un $\epsilon > 0$. Por una parte tenemos que durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ la temperatura de la placa cambió de $u(x, y, t)$ a $u(x, y, t + \Delta t)$ y por tanto se sigue del segundo principio que la cantidad de calor necesario para cambiar la temperatura, en el trozo de placa $[x, x + \epsilon] \times [y, y + \epsilon]$, es

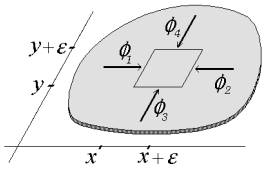


Figura 13.4. Difusión del calor en una placa

$$\int_x^{x+\epsilon} \int_y^{y+\epsilon} ca\rho[u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t)]dxdy,$$

ahora bien este calor sólo ha podido entrar en el trozo de placa por el lado $[x, x+\epsilon]\times\{y\}$ —hacia arriba (ver dibujo)—, por el lado $[x, x+\epsilon]\times\{y+\epsilon\}$ —hacia abajo—, por el lado $\{x\} \times [y, y + \epsilon]$ —hacia la derecha— y por el lado $\{x + \epsilon\} \times [y, y + \epsilon]$ —hacia la izquierda— y estas cantidades son por el primer principio,

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= -k\Delta ta\epsilon u_x(x, y, t) + o(\Delta t),\\
\phi_2 &= k\Delta ta\epsilon u_x(x + \epsilon, y, t) + o(\Delta t),\\
\phi_3 &= -k\Delta ta\epsilon u_y(x, y, t) + o(\Delta t),\\
\phi_4 &= k\Delta ta\epsilon u_y(x, y + \epsilon, t) + o(\Delta t).
\end{aligned}$$

Por tanto tenemos que ambas cantidades deben ser iguales y dividiendo por $c\rho a\epsilon^2 \Delta t$ y haciendo $\epsilon \to 0$ y $\Delta t \to 0$, tenemos la ecuación

$$K(u_{xx} + u_{yy}) = u_t, \qquad \textbf{(Ecuación del calor)} \tag{13.7}$$

donde $K = k/c\rho$ es la *difusibidad del material*.

De un modo similar se plantea la ecuación del calor tridimensional y en general la n–dimensional que es

$$K\Delta u = u_t, \qquad \text{para } x \in U \text{ y } t > 0,$$

donde Δ es el *operador de LaPlace* n–dimensional.

13.2.2. El método de separación de variables.

Consideremos un abierto acotado $U \subset \mathbb{R}^n$, en el que el **Teorema de Stokes**, (14.12), pág.988 sea válido, y consideremos las soluciones en variables separadas, $u(x,t) = \varphi(x)h(t)$, de la ecuación del calor n–dimensional

$$K\Delta u = u_t, \qquad \text{para } x \in U \text{ y } t > 0,$$

satisfaciendo la **condición frontera**

$$u(x,t) = 0, \quad \text{para } x \in \partial U \text{ y } t \geq 0.$$

En tal caso las funciones φ y h deben satisfacer

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0, \quad \text{para } x \in U, \quad \text{y} \quad \varphi = 0, \quad \text{para } x \in \partial U, \\ &h' + \lambda K h = 0, \quad \text{para } t > 0, \end{aligned}$$

ahora bien hemos dicho en el tema de la ecuación de ondas que este problema tiene solución $\varphi \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\overline{U})$, sólo para cierta cantidad numerable de valores de $\lambda = \lambda_n$, que son positivos y que llamamos *autovalores* del problema y a las correspondientes soluciones φ_n *autofunciones*. En tal caso

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x)\, \mathrm{e}^{-\lambda_n K t},$$

es la solución al problema satisfaciendo la condición inicial

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad x \in \overline{U},$$

donde se están considerando los coeficientes

$$A_n = \frac{\int_U \phi(x)\varphi_n(x)dx}{\int_U \varphi_n^2(x)dx}.$$

13.2.3. Caso bidimensional. Algunas soluciones.

Caso primero: Placa rectangular. Dadas las características de la placa parece natural considerar coordenadas rectangulares. Veamos cuales son las soluciones de 13.7 de la forma

$$u(x,y,t) = f(x)g(y)h(t),$$

en cuyo caso debe ser para cualquier (x,y,t)

$$K\left(\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)}\right) = \frac{h'(t)}{h(t)},$$

y esto ocurre si existe una constante λ tal que

$$\begin{aligned} \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} &= -\lambda, \\ h'(t) + \lambda K h(t) &= 0, \end{aligned}$$

ahora bien la segunda ecuación tiene solución los múltiplos de

$$h(t) = \mathrm{e}^{-\lambda K t},$$

y la primera ecuación se transforma para una constante μ en el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} f''(x) - \mu f(x) &= 0, \\ g''(y) + (\mu + \lambda)g(y) &= 0. \end{aligned}$$

Ahora consideremos que los vértices de la placa U son

$$(0,0), \quad (0,R), \quad (L,0), \quad (L,R),$$

y que en todo instante, la temperatura de la placa es nula en el borde ∂U, por tanto satisface las siguientes condiciones frontera

$$u(x,0,t) = u(x,R,t) = u(0,y,t) = u(L,y,t) = 0,$$

y se sigue de ellas que

$$\left.\begin{aligned} -\mu = \alpha^2, \quad \alpha = \frac{n\pi}{L} \\ \mu + \lambda = \beta^2, \quad \beta = \frac{m\pi}{R} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{R}\right)^2,$$

en cuyo caso las funciones de la forma

$$\mathrm{e}^{-\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{R}\right)^2\right]Kt} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi y}{R} = \mathrm{e}^{-\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{R}\right)^2\right]Kt} u_{nm},$$

y sus combinaciones lineales finitas, son soluciones del problema con esas condiciones frontera. Si ahora consideramos la condición inicial

$$u(x, y, 0) = \phi(x, y), \qquad (x, y) \in [0, L] \times [0, R],$$

tendremos que en general la solución es

$$u(x,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n}\, \mathrm{e}^{-\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{R}\right)^2\right]Kt} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi y}{R},$$

para

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= \frac{\int_U \phi u_{m,n}\, dxdy}{\int_U u_{m,n}^2\, dxdy} \\ &= \frac{1}{4LR}\int_0^R \int_0^L \phi(x,y) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi y}{R}\, dxdy. \end{aligned}$$

Caso segundo: La placa es un disco. Dadas las características de la placa parece natural considerar coordenadas polares, en las que la ecuación es

$$K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) = u_t.$$

Dejamos al lector la búsqueda de soluciones de la forma

$$u = f(\rho)g(\theta)h(t),$$

y el análisis del problema (ver el problema de la membrana circular, en la lección de la ecuación de ondas bidimensional).

13.2.4. Caso n-dimensional

Condición en la frontera no homogénea e independiente del tiempo. Consideremos ahora el siguiente problema de la ecuación del calor n–dimensional en el abierto acotado $U \subset \mathbb{R}^n$,

$$\Delta u = u_t, \qquad \text{para } x \in U \text{ y } t > 0,$$

satisfaciendo la **condición frontera no homogénea** (e independiente del tiempo)

$$u(x,t) = \psi(x), \quad \text{para } x \in \partial U \text{ y } t \geq 0,$$

y la condición inicial

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad x \in \overline{U}.$$

Podemos resolver este problema si somos capaces de encontrar la solución u_1 del *Problema de Dirichlet* (ver lección 10.5, pág.794 y siguientes)

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \qquad \text{para } x \in U, \\ u(x) &= \psi(x), \qquad \text{para } x \in \partial U, \end{aligned}$$

y la solución u_2 del problema homogéneo

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_t, \qquad \text{para } x \in U \text{ y } t > 0, \\ u(x,t) &= 0, \quad \text{para } x \in \partial U \text{ y } t \geq 0, \\ u(x,0) &= \phi(x) - u_1(x), \qquad x \in \overline{U}, \end{aligned}$$

pues en tal caso la solución de nuestro problema es

$$u(x,t) = u_1(x) + u_2(x,t).$$

13.3. Ejercicios resueltos

Ejercicio 13.1.1.- Encontrar las soluciones de la ecuación

$$Ku_{xx} = u_t, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0,$$

correspondientes a las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad u(x,0) = \operatorname{sen}^3 \frac{\pi x}{L},\\
&(2) \quad u(x,0) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, L/2];\\ L-x, & \text{si } x \in [L/2, L]. \end{cases},\\
&(3) \quad u(x,0) = x(L-x).
\end{aligned}$$

Indicación.- (1) Demostrar que

$$\operatorname{sen}^3 x = \frac{3}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 3x.$$

(2) Demostrar que

$$x \operatorname{sen} kx = \left(\frac{\operatorname{sen} kx}{k^2}\right)' - \left(\frac{x\cos kx}{k}\right)'.$$

(3) Demostrar que

$$x^2 \operatorname{sen} kx = \left[\left(\frac{2x\operatorname{sen} kx}{k^2}\right)' + \left(\frac{2\cos kx}{k^3}\right)' - \left(\frac{x^2\cos kx}{k}\right)'\right]. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 13.1.2.- Encontrar las soluciones de la ecuación

$$\begin{gathered}
Ku_{xx}(x,t) = u_t(x,t),\\
u(x,0) = f(x),\\
u(0,t) = a + ct, \qquad u(L,t) = b + ct,
\end{gathered}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Solución.- Basta considerar

$$u_1(x,t) = a + ct + x\frac{b-a}{L} + x(x-L)\frac{c}{2K}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 13.1.3.- Encontrar la solución de la ecuación

$$\begin{aligned}
&Ku_{xx}(x,t) = u_t(x,t),\\
&u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,\\
&u(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \in [0, \frac{L-a}{2}),\\ 1, & \text{para } x \in [\frac{L-a}{2}, \frac{L+a}{2}],\\ 0, & \text{para } x \in (\frac{L+a}{2}, L]. \end{cases}
\end{aligned}$$

Solución.-

$$u(x,t) = \frac{a}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(-1)^n \operatorname{sen} \frac{an\pi}{L} \cos \frac{2n\pi x}{L}\, \mathrm{e}^{-\frac{4n^2\pi^2}{L^2}Kt}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 13.1.4.- Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Encontrar la solución de

$$Ku_{xx}(x,t) = u_t(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty),$$
$$u(x,0) = \begin{cases} a, & \text{si } x < 0; \\ b, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Solución.- Observemos que si $A + B = 1$ entonces

$$aA + bB = \frac{a+b}{2} + (b-a)\frac{B-A}{2},$$

de esto y la fórmula general se sigue que la solución es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{a}{2\sqrt{K\pi t}} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}}\, dz + \frac{b}{2\sqrt{K\pi t}} \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-z)^2}{4Kt}}\, dz \\ &= \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{x}{2\sqrt{Kt}}} \mathrm{e}^{-\xi^2}\, d\xi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

13.4. Bibliografía y comentarios

Boyce, W. E. and DiPrima, R.C.: "*Elementary Differential Equations and Boundary value Problems*". J.Wiley, 1977.

Copson, E.T.: "Partial Differential Equations". Ed. Cambridge Univ. Press, 1975.

Courant,R. and Hilbert, D.: "*Methods of Mathematical Physics. Vol.II, Partial Differential Equations*". J.Wiley, 1962.

Derrick, W.R. and Grossman, S.J.: "*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*". Fondo Educativo Interamericano, 1984.

Edwards, C.H.Jr. and Penney,D.E.: "*Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*". Prentice–Hall Hispanoamericana, 1986.

Simmons, F.: "*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*". Ed. McGraw-Hill. 1977.

Spiegel, M.R.: "*Ecuaciones diferenciales aplicadas*". Ed. Prentice Hall internacional, 1983.

Tijonov, A.N. and Samarski, A.A.: "*Ecuaciones de la Física matemática*", Pueblo y Ciencia, 1978.

Weinberger, H.F.: "*Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*". Ed. Reverté, 1970.

Zachmanoglou, E.C. and Thoe, D.W.: "*Introduction to Partial Differential Equations with Applications*". Dover, 1986.

En *1822*, el Francés Joseph Fourier (*1768–1830*) publicó el célebre libro,

"*Théorie analytique de la chaleur*",

que mas tarde describiría Lord Kelvin como un "*gran poema matemático*" y en el que desarrollaba las ideas que 10 años antes le habían valido un premio de la *Académie des Sciences* francesa por un trabajo sobre la teoría matemática del calor. Su contribución matemática principal fue (ver los comentarios del tema anterior), la de que "*cualquier*" función puede representarse por una serie trigonométrica con unos coeficientes determinados por la función.

Por último remitimos al lector a la página 251 del Tijonov and Samarski para ver el estudio del problema del calor, en una barra semiinfinita, sin condiciones iniciales y con una condición frontera dada. Este problema fue analizado por Fourier y aplicado por él en el estudio de las oscilaciones térmicas del terreno. De la solución (ver la pág. 257 del libro) se siguen las clásicas tres leyes de Fourier.

Fin del Tema 13

Tema 14

Integración en variedades

14.1. Orientación sobre una variedad

En (3.17), pág.157, vimos que si $(U; u_i)$ era un abierto coordenado de una variedad $\mathcal{V}$ de dimensión n, entonces $\Lambda_n(U) = \{f\omega_n : f \in \mathcal{C}^\infty(U)\}$ siendo

$$\omega_n = du_1 \wedge \cdots \wedge du_n.$$

De aquí se sigue que si $\omega, \omega' \in \Lambda_n = \Lambda_n(\mathcal{V})$, son no nulas, entonces existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, tal que $\omega = f\omega'$. También se sigue que las posibles bases de $\Lambda_n(U)$ son de dos tipos: las que tienen la misma *orientación* que ω_n, es decir las de la forma $f\omega_n$ con $f > 0$, y las que tienen orientación contraria, a las cuales corresponde $f < 0$.

Definición. Diremos que una variedad $(\mathcal{V}, \mathcal{C}^\infty)$ es *orientable* si existe $\omega_n \in \Lambda_n$, tal que no se anula en ningún punto de $\mathcal{V}$.

Nota 14.1 Supongamos ahora que $\mathcal{V}$ es orientable (y como siempre conexa), entonces el conjunto

$$\Lambda^0 = \{\omega \in \Lambda_n : \omega_x \neq 0 \ \ \forall x \in \mathcal{V}\}$$

es no vacío y por la observación hecha anteriormente podemos establecer la siguiente relación de equivalencia en Λ^0. Para cada $\omega, \omega' \in \Lambda^0$

$$\omega \mathcal{R} \omega' \quad \Leftrightarrow \quad \exists f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}), \quad f > 0 : \quad \omega = f\omega'$$

Por ser $\mathcal{V}$ conexa tendremos que el conjunto cociente $\Lambda^0/\mathcal{R}$ tiene exclusivamente dos clases que denotaremos con Λ^+ y Λ^-, y que quedan caracterizadas, tomando un $\omega_n \in \Lambda^+$ arbitrario, como

$$\Lambda^+ = \{\omega \in \Lambda^0 : \ \omega = f\omega_n, f > 0\}, \quad \Lambda^- = \{\omega \in \Lambda^0 : \ \omega = f\omega_n, f < 0\}.$$

Definición. Diremos que dos n–formas $\omega, \omega' \in \Lambda$, *inducen la misma orientación* en $\mathcal{V}$ si están en la misma clase y *orientación contraria* si están en distinta. Una *orientación* en $\mathcal{V}$ consiste en elegir una de las dos clases Λ^+ ó Λ^-, ó equivalentemente elegir un representante ω_n de la misma. Por una *variedad orientada* entenderemos una variedad en la que hemos fijado una orientación, que en general denotaremos con Λ^+.

Veamos que una orientación en una variedad tiene estructura de haz: Si $(\mathcal{V}, \Lambda^+)$ es una variedad orientada y $\omega \in \Lambda^+$, entonces podemos definir en cada abierto conexo U de $\mathcal{V}$ una orientación

$$\Lambda^+(U) = \{f\omega_U \in \Lambda_n(U) : \ f \in \mathcal{C}^\infty(U), f > 0\},$$

la cual es independiente de la ω elegida, como se demuestra fácilmente.

Recíprocamente se tiene el siguiente resultado.

Proposición 14.2 *Sea $\{U_i : i \in I\}$ un recubrimiento por abiertos conexos de $\mathcal{V}$. Si cada U_i está orientado por Λ_i^+, de tal forma que para $i, j \in I$ y cada componente conexa C de $U_i \cap U_j$ es*

$$\Lambda_i^+(C) = \Lambda_j^+(C),$$

entonces existe una única orientación Λ^+ en $\mathcal{V}$ tal que $\Lambda^+(U_i) = \Lambda_i^+$.

Demostración. Sea $\{\varphi_j : j \in J\}$ una partición de la unidad subordinada a U_i y elijamos para cada φ_j un U_j tal que $\mathrm{sop}(\varphi_j) \subset U_j$. Entonces $\{U_j\}$ es un nuevo recubrimiento de $\mathcal{V}$ y φ_j una partición de la unidad subordinada a él.

Fijemos ahora para cada U_j, $\omega_j \in \Lambda_j^+$, y definamos la n–forma

$$\omega = \sum \varphi_j \omega_j \in \Lambda_n(\mathcal{V}).$$

Veamos que $\omega_x \neq 0$ para cada $x \in \mathcal{V}$. Sea k tal que $x \in U_k$. Como $\sum \varphi_j(x) = 1$, tendremos que para algún j, $\varphi_j(x) \neq 0$ y por otra parte todos los φ_j, salvo un número finito $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, se anulan en x. Por tanto

$$\omega_x = \varphi_1(x)\omega_{1x} + \cdots + \varphi_r(x)\omega_{rx},$$

con $\varphi_i(x) > 0$. Ahora bien por hipótesis tenemos que en la componente conexa U de x del abierto $U_1 \cap \cdots \cap U_r \cap U_k$,

$$\Lambda_1^+(U) = \cdots = \Lambda_r^+(U) = \Lambda_k^+(U),$$

y por tanto en U, para $i = 1, \ldots, r$, $\omega_i = f_i\omega_k$, con $f_i > 0$, de donde se sigue que

$$\omega_x = [\sum \varphi_i f_i](x)\omega_{kx},$$

y en particular $\omega_x \neq 0$. Esto prueba además que en U_k, $\omega = f\omega_k$ para $f > 0$. Por tanto si

$$\Lambda^+ = \{f\omega : f > 0,\, f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})\}$$

entonces $\Lambda^+(U_j) = \Lambda_j^+$. ∎

Ejemplo 14.1.1 Ejemplos de variedades orientables son:

a) $\mathbb{R}^n$ con $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

b) Una hipersuperficie cerrada de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{S} = \{f = 0\}$, con $d_x f \neq 0$ para cada $x \in \mathcal{S}$. Basta tomar

$$\omega = i_N(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n),$$

donde $N = \operatorname{grad}(f) \in \mathcal{D}(S)^\perp$ es no nulo.

c) Los espacios proyectivos reales de dimensión impar.

Ejemplo 14.1.2 Ejemplos de variedades no orientables son:

a) La banda de Möebius.

b) Los espacios proyectivos reales de dimensión par.

Proposición 14.3 *Los espacios proyectivos reales de dimensión par no son orientables.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ y consideremos la aplicación (proyección regular)

$$\pi : S_m \subset \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{P}_m, \quad \pi(x) =< x >,$$

entonces si existiese $\omega \in \Lambda_m(\mathbb{P}_m)$ con $\omega_p \neq 0$ en todo $p \in \mathbb{P}_m$, entonces como $\gamma = \pi^*\omega$ sería no nula en todo punto y tal que $\sigma^*\gamma = \gamma$, para $\sigma(x) = -x$, pues $\pi\sigma = \pi$, ahora esto no puede ser a menos que $m = 2n+1$, pues si $\gamma = f\omega_m$, para $\omega_m = i_N(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{m+1})$, con $f(x) \neq 0$, sería

$$f\omega_m = \gamma = \sigma^*\gamma = (\sigma^* f)\sigma^*(\omega_m) = (-1)^{m+1}(\sigma^* f)\omega_m,$$

pues $\sigma^*(\omega_m) = (-1)^{m+1}\omega_m$, ya que para $\sigma(x) = -x$ en $\mathbb{R}^{m+1}$, tenemos $\sigma_* N = N$ y por tanto

$$\begin{aligned}
\sigma^*(\omega_m)(D_1, \ldots, D_m) &= i_N(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{m+1})(\sigma_* D_1, \ldots, \sigma_* D_m) \\
&= dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{m+1}(N, \sigma_* D_1, \ldots, \sigma_* D_m) \\
&= dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{m+1}(\sigma_* N, \sigma_* D_1, \ldots, \sigma_* D_m) \\
&= \sigma^*\omega_{m+1}(N, D_1, \ldots, D_m) \\
&= (-1)^{m+1}\omega_m(D_1, \ldots, D_m),
\end{aligned}$$

y por tanto para todo $x \in S_m$

$$f(x) = (-1)^{m+1} f(-x). \quad \blacksquare$$

Esto nos justifica la no existencia de orientación en $\mathbb{P}_m$ para m par y nos sugiere la construcción de una si m es impar.

14.2. Integración en una variedad orientada

Definición. Sea $\mathcal{V}$ una variedad y $\omega \in \Lambda_n$. Llamaremos *soporte de* ω, al conjunto

$$\operatorname{sop}(\omega) = \overline{\{x \in \mathcal{V} : \omega_x \neq 0\}}.$$

Nota 14.4 Sea $(\mathcal{V}, \Lambda_n^+)$ una variedad orientada y sea U un abierto coordenado de $\mathcal{V}$, con coordenadas $(u_1, \ldots, u_n)$, para las que sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$du_1 \wedge \cdots \wedge du_n = \omega_n \in \Lambda_n^+(U),$$

—obsérvese que en caso contrario bastaría intercambiar dos coordenadas entre sí—. Para cada $\omega \in \Lambda_n(U)$, existe $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que $\omega = f\omega_n$ (observemos que $\operatorname{sop}(\omega) = \operatorname{sop}(f)$). Además en otro *sistema de coordenadas* (v_i), existe una $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$, tal que $\omega = g dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n$ y

$$dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n = \det(\partial v_i/\partial u_j)\omega_n \quad \Rightarrow \quad f = g \det(\partial v_i/\partial u_j),$$

y (v_i) está orientada como (u_i), es decir $dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n \in \Lambda_n^+(U)$ sii $\det(\partial v_i/\partial u_j) = h > 0$. De aquí se sigue, aunque ya lo sabíamos, que $\operatorname{sop}(f) = \operatorname{sop}(g)$.

A continuación y en una serie de pasos daremos la definición de integral de una n–forma con soporte compacto:

Definición. 1.- Sea U un abierto coordenado de $\mathcal{V}$ y sea $\omega \in \Lambda_n(U)$ de soporte compacto contenido en U. Definimos la *integral* de $\omega = f(u_1, \ldots, u_n)du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$ en U como

$$\int_U \omega = \int_{U_n} f dx_1 \cdots dx_n \tag{14.1}$$

donde $U_n = u(U)$ y $u = (u_1, \ldots, u_n)$.

Veamos que está bien definida, es decir que es independiente del sistema de coordenadas elegido. Tomemos entonces otro sistema de coordenadas $v = (v_i)$ orientado como $u = (u_i)$, entonces existe $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que

$$\omega = g(v)dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n,$$

y como antes tendremos que

$$f(u_1, \ldots, u_n) = g(v_1, \ldots, v_n)\, h,$$

con $h = \det(\partial v_i/\partial u_j)$, lo cual implica que si $V_n = v(U)$ y

$$F = v \circ u^{-1} : U_n \to V_n, \quad F_i = y_i \circ F,$$

entonces

$$f = (g \circ F) \det(\partial F_i/\partial x_j),$$

y por el teorema del cambio de variable se tiene

$$\int_{V_n} g dy_1 \cdots dy_n = \int_{U_n} (g \circ F)\, |\det(F_{ix_j})| dx_1 \cdots dx_n = \int_{U_n} f dx_1 \cdots dx_n,$$

de donde se sigue la independencia de las coordenadas elegidas para definir $\int_U \omega$, que también escribiremos $\int_U f du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$.

De la definición se sigue que si V es otro abierto coordenado tal que $\mathrm{sop}(\omega) \subset V \subset U$, entonces $\int_U \omega = \int_V \omega$.

Nota 14.5 Recordemos que en un abierto de $\mathbb{R}^n$ la integral de una función no varía si la cambiamos en un *conjunto de medida nula*[1] y que son integrables las funciones acotadas de soporte compacto continuas salvo en un conjunto de medida nula. Además el concepto de conjunto de medida nula es invariante por difeomorfismos pues se sigue del teorema del cambio de variable que si

$$F = (F_i)\colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n,$$

es un difeomorfismo y $F^{-1}(A) \subset U$ es de medida nula, entonces A es de medida nula, pues

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_V I_A dy_1 \cdots dy_n = \int_U (I_A \circ F)\,|\det(F_{ix_j})| dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{F^{-1}(A)} |\det(F_{ix_j})| dx_1 \cdots dx_n = 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto también podemos definir en una variedad los conjuntos de medida nula como los borelianos de ella que en cada entorno coordenado sean de medida nula.

De aquí se sigue que la definición (14.1) es valida en mas casos en los que $\omega \notin \Lambda_n(U)$, es decir no es diferenciable. Sea $\omega = f du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$, con $f : U \to \mathbb{R}$ acotada, tal que $f_{|U_1} \in \mathcal{C}^\infty(U_1)$ y $f_{|U_2} \in \mathcal{C}^\infty(U_2)$, para U_1 y $U_2 = U - \overline{U_1}$ abiertos de U tales que $\partial U_1 = S$ es unión finita ó numerable de subvariedades de U, entonces en este caso tendremos que f es diferenciable salvo en el conjunto de medida nula S, y por tanto integrable si ω es de soporte compacto en U. Para esta ω definimos su integral como en (14.1). Para ella se tiene trivialmente que

$$\int_U \omega = \int_{U_1} \omega_1 + \int_{U_2} \omega_2,$$

para $\omega_1 = \omega_{U_1} \in \Lambda_n(U_1)$ y $\omega_2 = \omega_{U_2} \in \Lambda_n(U_2)$.

[1] Por ejemplo: un hiperplano $\{h = 0\}$, un subespacio de dimensión $< n$, una subvariedad ó una unión numerable de subvariedades.

2.- Supongamos ahora que $\omega \in \Lambda_n(\mathcal{V}) = \Lambda_n$ y que $\text{sop}(\omega)$ es compacto y está en un abierto coordenado U de $\mathcal{V}$. En este caso definimos la *integral* de ω en $\mathcal{V}$ como

$$\int \omega = \int_U \omega.$$

Observemos que está bien definida pues si existiese otro abierto coordenado $V \subset \mathcal{V}$ tal que $\text{sop}(\omega) \subset V$, entonces $\text{sop}(\omega) \subset U \cap V$ y por tanto

$$\int_U \omega = \int_{U\cap V} \omega = \int_V \omega.$$

Como antes podemos definir la integral de una n–forma ω, con soporte compacto dentro de U, y tal que en U sea sólo diferenciable en dos abiertos disjuntos cuyo complementario sea unión finita de subvariedades.

Ejercicio 14.2.1 Demostrar que si $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda_n$ y $\text{sop}(\omega_1)$, $sop(\omega_2)$ son compactos de un abierto coordenado de $\mathcal{V}$, entonces para $r, s \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\int (r\omega_1 + s\omega_2) = r\int \omega_1 + s\int \omega_2.$$

3.- Sea ahora $\omega \in \Lambda_n$ con $\text{sop}(\omega)$ compacto. Consideremos un recubrimiento $\{U_i\}$ por abiertos coordenados de $\mathcal{V}$ y una partición de la unidad $\{\varphi_j\}$ subordinada a él entonces $\omega = \sum \varphi_j\omega$. Ahora bien, para cada $x \in \text{sop}(\omega)$ existe un entorno abierto U_x de x en $\mathcal{V}$ que corta sólo a un número finito de $\text{sop}(\varphi_j)$. Se sigue por tanto de la compacidad de $\text{sop}(\omega)$ que este conjunto corta sólo a un número finito de $\text{sop}(\varphi_j)$, es decir que existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ de la partición tales que $\omega = \varphi_1\omega + \cdots + \varphi_k\omega$. Definimos entonces la integral de ω en $\mathcal{V}$ como

$$\int \omega = \int \varphi_1\omega + \cdots + \int \varphi_k\omega.$$

Veamos que no depende ni del recubrimiento ni de la partición elegidos. Sea $\{V_j\}$ otro recubrimiento por abiertos coordenados de $\mathcal{V}$ y $\{\phi_i\}$ una partición de la unidad subordinada a él. Por lo mismo de antes existirán $\phi_1, \ldots, \phi_s$, de la partición, tales que $\omega = \phi_1\omega + \cdots + \phi_s\omega$. Del ejercicio (14.2.1) se sigue que

$$\sum_{i=1}^{k} \int \varphi_i\omega = \sum_{i=1}^{k}[\sum_{j=1}^{s} \int \phi_j\varphi_i\omega] = \sum_{j=1}^{s}[\sum_{i=1}^{k} \int \phi_j\varphi_i\omega] = \sum_{j=1}^{s} \int \phi_j\omega,$$

por tanto está bien definida.

Por último y como en las dos ocasiones anteriores también podemos definir la integral de una n–forma ω de soporte compacto que sea diferenciable en dos abiertos disjuntos cuyo complementario sea una subvariedad diferenciable.

Ejercicio 14.2.2 Demostrar el ejercicio (14.2.1), para ω_1, ω_2 n–formas acotadas, de soporte compacto en $\mathcal{V}$ diferenciables en dos abiertos disjuntos con complementario una unión finita ó numerable de subvariedades de $\mathcal{V}$.

Ejercicio 14.2.3 Sea $F : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ un difeomorfismo entre dos variedades orientadas $(\mathcal{V}_1, \Lambda_n^{+1})$ y $(\mathcal{V}_2, \Lambda_n^{+2})$, que conserve la orientación, es decir tal que para cada $\omega \in \Lambda_n^{+2}$, $F^*\omega \in \Lambda_n^{+1}$. Demostrar que para cada $\omega \in \Lambda_n^+(\mathcal{V}_2)$ con soporte compacto se tiene que

$$\int_{\mathcal{V}_1} F^*\omega = \int_{\mathcal{V}_2} \omega.$$

14.3. Variedades con borde

Definición. Recordemos que en un espacio topológico X la frontera de un conjunto A, ∂A, es el conjunto de puntos cuyos entornos cortan tanto al conjunto A como a su complementario $A^c = X - A$. Por lo que obviamente $\partial A = \partial A^c$. Por otra parte también se tiene que $\partial A = \overline{A} - A^0$.

Definición. Sea $\mathcal{V}$ una variedad de dimensión n y U un abierto conexo suyo tal que:

a) $\partial U = \partial \overline{U}$ y

b) $S = \partial U$ es una subvariedad cerrada de dimensión $n-1$.

A $C = \overline{U}$ la llamaremos *variedad con borde* y a S lo llamaremos el *borde de la variedad*.

Nota 14.6 Observemos que de la definición se sigue que S es el borde tanto de la variedad con borde $C = \overline{U}$, pues $S = \partial\overline{U}$, como de la también variedad con borde $\mathcal{V} - U$, pues $S = \partial(\mathcal{V} - U) = \partial U$. En definitiva S separa a dos variedades con borde en cierto modo complementarias.

Nota 14.7 Observemos que si tomamos U como $\mathbb{R}^n$ sin un hiperplano, el apartado (a) no se satisface. Y sin embargo para U igual a un semiespacio si se satisface. De hecho veremos a continuación que localmente todas las variedades con borde son semiespacios.

Proposición 14.8 *Sea C una variedad con borde S de $\mathcal{V}$ y sea $x \in S$. Entonces existe un entorno abierto V de x en $\mathcal{V}$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, tales que*

$$S \cap V = \{p \in V : f(p) = 0\}, \quad C \cap V = \{p \in V : f(p) \leq 0\}.$$

Además si W es otro entorno de x y $g \in \mathcal{C}^\infty(W)$ verificando las condiciones anteriores, entonces para cada $D_x \in T_x(\mathcal{V})$ se tiene que $D_x f > 0$ sii $D_x g > 0$.

Demostración. Por ser S subvariedad $n-1$–dimensional, existe un abierto V, que podemos tomar coordenado por $v = (v_i)$, tal que $v(V) = \mathbb{R}^n$, $v(x) = 0$ y

$$S \cap V = \{p \in V : v_1(p) = 0\}.$$

Entonces si $C = \overline{U}$, tendremos que $U \cap V = C \cap [U_1 \cup U_2]$, para

$$U_1 = \{p \in V : v_1 > 0\}, \quad U_2 = \{p \in V : v_1 < 0\}.$$

Es decir que tenemos un conjunto $A = U \cap V$, que es abierto y cerrado en $U_1 \cup U_2$. Ahora bien los U_i son abiertos conexos, por tanto se tiene una de las tres posibilidades:

$$A = U_1, \quad A = U_2 \quad \text{ó} \quad A = U_1 \cup U_2.$$

siendo válidas sólo las dos primeras, pues en el tercer caso $\overline{A} = \overline{U_1 \cup U_2} = \overline{V}$, por lo que

$$V \subset \overline{A} = \overline{U \cap V} \subset \overline{U} \quad \Rightarrow \quad V \subset \overline{U}^0,$$

de donde que $S \cap V = (\partial U) \cap V = (\partial \overline{U}) \cap V = \varnothing$, lo cual es absurdo.

Veamos la segunda parte. Si $g \in \mathcal{C}^\infty(W)$ está en las condiciones del enunciado, tendremos (ver la solución del ejercicio (6.2.2) en la pág.435), que existe $h \in \mathcal{C}^\infty_x$ tal que $f = gh$. Es decir que

$$0 < D_x f = h(x) D_x g + g(x) D_x h = h(x) D_x g,$$

y basta demostrar que $h(x) > 0$:

a) Si $h(x) = 0$, entonces $D_x f = 0$. Absurdo.

b) Si $h(x) < 0$, entonces en un entorno U_x de x, $h < 0$. Ahora bien como todo entorno de $x \in S = \partial U$ corta a U, tendremos que el entorno de x, $U_x \cap V \cap W$ corta a U en puntos en los que, $h < 0$, $f < 0$ y $g < 0$, lo cual es absurdo. ∎

Definición. En las condiciones anteriores diremos que un $D_x \in T_x(\mathcal{V})$ *apunta hacia fuera de* C si $D_x f > 0$. El resultado anterior nos asegura que este concepto no depende de los representantes f y V elegidos. Observemos que si V es un abierto coordenado tal que

$$V \cap C = \{v_1 \leq 0\}, \quad V \cap S = \{v_1 = 0\},$$

entonces en cualquier sistema de coordenadas v_i el campo $\partial v_1 \in \mathcal{D}(V)$, apunta hacia fuera de C en todo $S \cap V$.

Veamos cómo una orientación en $\mathcal{V}$ induce una orientación natural en el borde de cada variedad con borde $C \subset \mathcal{V}$. Para ello veamos antes el siguiente resultado donde C es una variedad con borde de $\mathcal{V}$ y S su borde.

Lema 14.9 *Sea $(\mathcal{V}, \Lambda^+)$ una variedad orientada, $x \in S$ y V un abierto entorno coordenado de x en $\mathcal{V}$. Entonces si $D, D' \in \mathcal{D}(V)$ son no nulos y apuntan hacia fuera de C y $\omega, \omega' \in \Lambda^+(V)$, se tiene que las $n-1$–formas de $S \cap V$, $i^*(i_D\omega)$ e $i^*(i_{D'}\omega')$ son no nulas y tienen la misma orientación.*

Demostración. Que son no nulas se sigue de que si V es un abierto como en (14.8), con coordenadas (v_i) tales que $\omega_n = dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n \in \Lambda^+$, y $D = \sum f_i \partial_i$, entonces $f_1 > 0$ y si $\omega = h\omega_n$

$$i^*(i_D\omega)(\partial_2, \ldots, \partial_n) = \omega(D, \partial_2, \ldots, \partial_n) = f_1 h > 0.$$

También se tiene que $i^*(i_D\omega) = h[i^*(i_D\omega_n)]$, de donde se sigue que $i^*(i_D\omega)$ e $i^*(i_D\omega')$ tienen la misma orientación que $i^*(i_D\omega_n)$. Ahora bien si $D' = \sum g_i \partial_i$, entonces $Dv_1 = f_1$, $D'v_1 = g_1 > 0$. Y si

$$dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n = \omega_n \in \Lambda^+(V),$$

(en el caso contrario $-\omega_n \in \Lambda^+(V)$, la demostración es idéntica), ten-

dremos para $\omega' = g\omega_n$ que

$$\begin{aligned} i^*(i_D\omega) &= h[i^*(i_D\omega_n)] \\ &= h(i^*[(Dv_1)dv_2 \wedge \cdots \wedge dv_n + (-1)(Dv_2)dv_1 \wedge dv_3 \wedge \cdots \wedge dv_n + \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-1}(Dv_n)dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_{n-1}]) \\ &= h[i^*(f_1 dv_2 \wedge \cdots \wedge dv_n)] \\ i^*(i_{D'}\omega') &= g[i^*(g_1 dv_2 \wedge \cdots \wedge dv_n)], \end{aligned}$$

pues $i^*(dv_1) = 0$. Por tanto $i^*(i_D\omega)$ e $i^*(i_{D'}\omega')$ tienen la misma orientación que $i^*(dv_2 \wedge \cdots \wedge dv_n)$. ∎

Corolario 14.10 *Sea V un abierto en las mismas condiciones del resultado anterior. Entonces la orientación $\Lambda^+(V)$ induce una orientación natural en $S \cap V$ definida por $i^*(dv_2 \wedge \cdots \wedge dv_n)$, si $dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n \in \Lambda^+(V)$ (y por $-i^*(dv_2 \wedge \cdots \wedge dv_n)$ en caso contrario). Y que viene determinada por*

$$i^*(i_D\omega),$$

para cualquier $D \in \mathcal{D}(V)$ no nulo apuntando hacia fuera de C, y cualquier $\omega \in \Lambda^+(V)$.

Proposición 14.11 *Sea $(\mathcal{V}, \Lambda^+)$ una variedad orientada y C una variedad con borde S, en $\mathcal{V}$. Entonces Λ^+ induce una orientación natural en S.*

Demostración. Para cada $x \in S$ tomemos un abierto coordenado U_x de x en $\mathcal{V}$, como en (14.8). Y consideremos el recubrimiento por abiertos de S, $V_x = U_x \cap S$. Entonces de (14.10) se sigue que en cada V_x tenemos una orientación Λ_x^+ de tal forma que en las intersecciones de dos abiertos las dos orientaciones correspondientes coinciden, pues vienen genéricamente determinadas por un campo cualquiera que apunte hacia fuera de C y por un representante de Λ^+ en la intersección. De (14.2) se sigue que existe una orientación en todo S que en cada V_x coincide con Λ_x^+. ∎

14.4. El Teorema de Stokes

Definición. Sea S el borde de una variedad con borde C de $\mathcal{V}$ y sea $\omega \in \Lambda_n$ cualquiera si C es compacto y con soporte compacto si C es arbitrario. Definimos la integral de ω en C como

$$\int_C \omega = \int \omega', \tag{14.2}$$

donde $\omega' = \omega$ en C y $\omega' = 0$ en $\mathcal{V} - C$.

Del mismo modo si C es un compacto tal que $\partial C = \partial(\mathcal{V} - C) = S$ es una unión finita o numerable de subvariedades definimos para cada $\omega \in \Lambda_n$ su integral en C como en (14.2). Por comodidad escribiremos $\int_S \omega$ para $\omega \in \Lambda_{n-1}(\mathcal{V})$, entendiendo que es

$$\int_S i^*\omega.$$

Ejercicio 14.4.1 Demostrar que para cada $\omega \in \Lambda$, $\operatorname{sop}(d\omega) \subset \operatorname{sop}(\omega)$.

Teorema de Stokes 14.12 *Sea $(\mathcal{V}, \Lambda^+)$ una variedad orientada de dimensión n y sea S el borde de una variedad con borde C de $\mathcal{V}$. Entonces para cualquier $\omega_{n-1} \in \Lambda_{n-1}(\mathcal{V})$, si C es compacto, ó cualquier $\omega_{n-1} \in \Lambda_{n-1}(\mathcal{V})$ de soporte compacto, si C no es compacto, se tiene*

$$\int_C d\omega_{n-1} = \int_S \omega_{n-1}.$$

Demostración. Probaremos este resultado en dos etapas. En la primera veremos que todo punto $p \in \mathcal{V}$ tiene un entorno en el que el resultado es cierto para toda $n-1$–forma de $\mathcal{V}$ con soporte contenido en dicho entorno.

a) Supongamos que $p \in \mathcal{V} - C$. Entonces $\mathcal{V} - C$ es un entorno abierto de p en $\mathcal{V}$ y dada cualquier $\omega \in \Lambda_{n-1}$, con $\operatorname{sop}(\omega) \subset \mathcal{V} - C$, tendremos que la igualdad es cierta pues ambas partes valen 0.

b) Supongamos que $p \in S$ y consideremos un abierto coordenado V_p tal que

$$C \cap V_p = \{u_1 \leq 0\} \quad \text{y} \quad S \cap V_p = \{u_1 = 0\}.$$

Cojamos ahora dentro de V_p otro abierto V, entorno de p y difeomorfo a un cubo $\prod(a_i, b_i)$, con $a_1 < 0 < b_1$, y tal que $V \subset V_p$. Veamos que en V es cierto el resultado. Dada $\omega \in \Lambda_{n-1}$, con $\text{sop}(\omega) \subset V$, tendremos que existen $f_i \in \mathcal{C}^\infty(V_p)$ tales que en V_p

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i du_1 \wedge \cdots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \cdots \wedge du_n,$$

por tanto

$$i^*(\omega) = f_1 i^*(du_2 \wedge \cdots \wedge du_n),$$

pues $i^*(du_1) = 0$. Entonces si $f_i = f_i(u_1, \ldots, u_n)$, tendremos que $\text{sop}(f_i) \subset \prod(a_i, b_i)$ y

$$\int_S \omega = \int_{S \cap V} \omega = \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f_1(0, x_2, \ldots, x_n) dx_2 \cdots dx_n.$$

Por otra parte

$$d\omega = \sum (-1)^{i-1} df_i \wedge du_1 \wedge \cdots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \cdots \wedge du_n,$$

y como $df_i = \sum (\partial f_i / \partial u_j) du_j$, será

$$d\omega = \sum (\partial f_i / \partial u_i) du_1 \wedge \cdots \wedge du_n,$$

y por tanto si $u = (u_i)$ y

$$C_1 = u(C \cap V) = (a_1, 0] \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n),$$

tendremos que

$$\int_C d\omega = \int_{C_1} \sum (\partial f_i / \partial x_i) dx_1 \cdots dx_n,$$

y por el teorema de Fubini, dado que el $\text{sop}(f_i) \subset V$, es decir dado que

$$0 = f_i(x_1, \ldots, a_i, \ldots, x_n) = f_i(x_1, \ldots, b_i, \ldots, x_n)$$

tendremos que

$$\int_C d\omega = \int_S \omega.$$

c) Supongamos por último que p está en el abierto U que define la variedad cerrada C, es decir el abierto U tal que $\overline{U} = C$. Tomemos un abierto

coordenado V_p, entorno de p en $\mathcal{V}$, tal que $V_p \subset U$, y tomemos como antes otro abierto V, entorno de p, dentro de V_p y difeomorfo a un cubo de $\mathbb{R}^n$. Entonces para cada $\omega \in \Lambda_n$ con $\operatorname{sop}(\omega) \subset V$, se tiene que $\int_S \omega = 0$, pues en S, $i^*\omega = 0$. Pero por el mismo cálculo de antes basado en el teorema de Fubini tendremos que $\int_C d\omega = 0$, pues $\operatorname{sop}(f_i) \subset V$ y por tanto en $V_p - V$, $f_i = 0$. Ahora en la segunda parte tomamos un recubrimiento por abiertos U_i de $\mathcal{V}$, tal que para cada $\omega \in \Lambda_{n-1}$ con soporte incluido en algún U_i se verifica el resultado. Que tal recubrimiento existe lo hemos demostrado en la primera parte del teorema. Tomemos una partición de la unidad φ_j subordinada a U_i. Sea $\omega \in \Lambda_{n-1}$ con soporte compacto (en el caso de que C sea compacto podemos tomar una $n-1$–forma cualquiera y la demostración es similar). Entonces $\omega = \sum \varphi_j \omega$ y, como en la definición de la integral, tendremos que $\operatorname{sop}(\omega)$ corta a un número finito de $\operatorname{sop}(\varphi_j)$, por lo que existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ de la partición tales que $\omega = \varphi_1\omega + \cdots + \varphi_k\omega$. Como además cada $\varphi_i\omega$ es una $n-1$–forma con soporte en U_i, el teorema será cierto para ella y por tanto

$$\int_S \omega = \int_S \varphi_1\omega + \cdots + \int_S \varphi_k\omega = \int_C d(\varphi_1\omega) + \cdots + \int_C d(\varphi_k\omega) = \int_C d\omega. \quad \blacksquare$$

Formula de Gauss-Green 14.13 *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ con $\partial U = \partial\overline{U} = S$ una subvariedad 1–dimensional de $\mathbb{R}^2$. Entonces para $P, Q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ se tiene, siendo $C = \overline{U}$ compacto o P y Q de soporte compacto,*

$$\int_S P dx + Q dy = \int_C (Q_x - P_y) dx \wedge dy.$$

Demostración. $Pdx + Qdy \in \Lambda_1(\mathbb{R}^2)$ y

$$d(Pdx + Qdy) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = (Q_x - P_y) dx \wedge dy,$$

y basta aplicar el Teorema de Stokes, (14.12), pág.988. $\blacksquare$

Corolario 14.14 *En una variedad orientable $\mathcal{V}$, n–dimensional, toda n–forma exacta tiene integral 0 en cualquiera de los casos: (i) la variedad es compacta ó (ii) la n–forma es de soporte compacto.*

Demostración. Tomando $U = \mathcal{V}$, se tiene que $C = \mathcal{V}$ y $S = \varnothing$. Si $\omega = d\omega_{n-1}$ se tiene que

$$\int \omega = \int d\omega_{n-1} = \int_S \omega_{n-1} = 0. \quad \blacksquare$$

Criterio De Bendixson 14.15 *Sea $D = f\partial_x + g\partial_y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Si $f_x + g_y > 0$ (< 0), entonces D no tiene órbitas cíclicas en U.*

Demostración. Supongamos que S es una órbita cíclica de D y sea C el compacto conexo con frontera S del teorema de Jordan —(5.33), pág.320—. Entonces $\omega D = 0$ para $\omega = gdx - fdy$ y por Stokes

$$0 = \int_S \omega = \int_C (f_x + g_y) dxdy,$$

lo cual es absurdo pues C tiene interior no vacío. ∎

El Teorema de Stokes, (14.12), pág.988 se puede generalizar a variedades con borde con "*esquinas*". Vamos a finalizar la lección indicando como debe hacerse en el caso bidimensional.

Definición. Sea $(\mathcal{V}, \Lambda_2)$ bidimensional orientada y C un compacto conexo de $\mathcal{V}$ tal que $\partial C = \partial(\mathcal{V} - C) = S$. Diremos que S es un *polígono* de k lados si existen subvariedades 1–dimensionales $S_1, \ldots, S_k$ y puntos $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{V}$, tales que

$$S = S_1 \cup \cdots \cup S_k \cup \{x_1, \ldots, x_k\},$$

siendo $\{x_i\} = \overline{S_i} \cap \overline{S_{i+1}}$, para $S_{k+1} = S_1$ y $\overline{S_i} \cap \overline{S_j} = \varnothing$, en el resto de los casos. De tal forma que para cada $i = 1, \ldots, k$ existe un abierto coordenado V_i de x_i, con coordenadas (v_1, v_2) tales que $\omega_2 = dv_1 \wedge dv_2$, $S_j \cap V_i = \varnothing$, para $j \neq i, i+1$ y

$$\begin{aligned} C \cap V_i &= \{x \in V_i : v_1(x) \leq 0, v_2(x) \leq 0\}, \\ S_i \cap V_i &= \{x \in V_i : v_1(x) = 0, v_2(x) \leq 0\}, \\ S_{i+1} \cap V_i &= \{x \in V_i : v_1(x) \leq 0, v_2(x) = 0\}. \end{aligned}$$

A los puntos x_i los llamaremos *vértices del polígono* y a las S_i *aristas*.

Como en el caso de una variedad con borde se demuestra que ω_2 induce una orientación en cada S_i de la forma $i^*(i_D\omega_2)$, para D un campo apuntando hacia fuera de C. En estos términos se tiene el siguiente resultado.

Teorema 14.16 *Sea C un compacto de $\mathcal{V}$, con $\partial C = S = \cup S_i \cup \{x_1, \ldots, x_k\}$ un polígono de k lados y $\omega \in \Lambda_1(\mathcal{V})$, entonces*

$$\int_C d\omega = \sum \int_{S_i} \omega.$$

Demostración. Se hace como en (14.12), viendo que todo punto tiene un entorno coordenado en el que la igualdad es cierta y se finaliza argumentando con las particiones de la unidad. Falta ver la igualdad para los puntos x_i. Consideremos el abierto coordenado V_i con coordenadas $v = (v_1, v_2)$ de la definición, y consideremos $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset v(V_i)$ y el abierto

$$I = \{x \in V_i : v(x) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)\}.$$

Y veamos que el resultado es cierto para cualquier $\omega \in \Lambda_1(\mathcal{V})$ tal que $\operatorname{sop}(\omega) \subset I$. Si en V_i es $\omega = f_1 dv_2 - f_2 dv_1$, entonces

$$d\omega = [\partial f_1/\partial v_1 + \partial f_2/\partial v_2] dv_1 \wedge dv_2,$$

Ahora en $V_i \cap S_i$, $i^*\omega = f_1(0, v_2)dv_2$ siendo por (14.10) dv_2 la orientación en S_i y en $V_i \cap S_{i+1}$, $i^*\omega = -f_2(v_1, 0)dv_1$, siendo por (14.10) $-dv_1$ la orientación en S_{i+1}. Se sigue que

$$\begin{aligned}\int_C d\omega &= \int_{C\cap V_i} d\omega = \int_{a_1}^0 \int_{a_2}^0 [\partial_x f_1 + \partial_y f_2] dx dy \\ &= \int_{a_2}^0 f_1(0, y) dy + \int_{a_1}^0 f_2(x, 0) dx \\ \sum \int_{S_i} \omega &= \int_{S_i} \omega + \int_{S_{i+1}} \omega = \int_{a_2}^0 f_1(0, y) dy + \int_{a_1}^0 f_2(x, 0) dx. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

14.5. Integración en var. Riemannianas

Definición. Sea $(\mathcal{V}, \Lambda^+)$ una variedad Riemanniana orientada. Para cada $x \in \mathcal{V}$ diremos que una base

$$D_1, \ldots, D_n \in T_x(\mathcal{V}),$$

está *orientada positivamente (negativamente)* si para cualquier $\omega \in \Lambda^+$

$$\omega_x(D_1, \ldots, D_n) > 0 \quad (< 0).$$

Geométricamente hablando podemos decir que de una base ortonormal orientada positivamente a otra orientada también positivamente, se pasa mediante un giro en el espacio tangente, y a una orientada negativamente, mediante un giro y una simetría respecto de un hiperplano. Recordemos que dada una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y $E_i = \sum a_{ij} D_j \in T_x(\mathcal{V})$, entonces

$$\omega_x(E_1, \ldots, E_n) = \det(\mathbf{A})\omega_x(D_1, \ldots, D_n)$$

por lo que si $\det \mathbf{A} \neq 0$, el signo del $\det(\mathbf{A})$ es el que nos indica la orientación de la base E_i si conocemos la de D_i.

Teorema 14.17 *Sea $(\mathcal{V}, \Lambda^+)$ una variedad Riemanniana orientada. Entonces existe una única n–forma $\omega_v \in \Lambda^+$ —a la que llamaremos forma de volumen—, tal que para cada $x \in \mathcal{V}$ y cada base ortonormal positivamente orientada $D_i \in T_x(\mathcal{V})$, se tiene*

$$\omega_{vx}(D_1, \ldots, D_n) = 1.$$

Demostración. La unicidad es obvia, pues si ω_1 y ω_2 satisfacen el enunciado, entonces existe $f > 0$ tal que $\omega_1 = f\omega_2$, siendo $f = 1$ por la última condición. Veamos pues que existe. Consideremos en $\mathcal{V}$ un abierto coordenado $(U; u_i)$, y definamos ω_v en él. Sea $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{D}(U)$ una base ortonormal positivamente orientada. Entonces si en U la métrica es $g = \sum g_{ij} du_i \otimes du_j$ y $\partial_i = \sum a_{ij} E_j$, tendremos que

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \sum a_{ik} a_{jk},$$

es decir que $(g_{ij}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^t$, donde $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Y por tanto $g = \det(g_{ij}) = (\det \mathbf{A})^2$. Basta entonces definir

$$\omega_v = \sqrt{g} du_1 \wedge \cdots \wedge du_n. \tag{14.3}$$

Su unicidad en cada abierto coordenado prueba que $\omega_v \in \Lambda_n(\mathcal{V})$, y por supuesto $\omega_v \in \Lambda^+$. ∎

Definición. Sea $(\mathcal{V}, \Lambda^+)$ una variedad Riemanniana orientada y sea $\omega_v (= dx)$ su forma de volumen. Definimos la integral de una función diferenciable con soporte compacto $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{V})$, como

$$\int_{\mathcal{V}} f(x)dx = \int f\omega_v.$$

Definición. Si la variedad $\mathcal{V}$ es compacta podemos tomar la función $f = 1$ y definimos el *volumen* de $\mathcal{V}$ como

$$\mathrm{vol}(\mathcal{V}) = \int \omega_v.$$

Nota 14.18 Si $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, $g = \sum (dx_i)^2$ y $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Lambda^+$, entonces obviamente

$$\omega_v = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

y para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto se tiene que

$$\int f(x)\, dx = \int f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Nota 14.19 Veamos en términos de coordenadas la forma de volumen (de área) de una superficie que sea la gráfica de una función: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Definimos la superficie de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{S} = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\},$$

entonces si definimos

$$h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x, y, f(x, y)) \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3,$$

tendremos que

$$E_1 = h_* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{D}(\mathcal{S}),$$
$$E_2 = h_* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} + f_y \frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{D}(\mathcal{S}),$$

forman base en cada punto de $\mathcal{S}$. Ahora si en $\mathbb{R}^3$ consideramos la métrica habitual y la restringimos a $\mathcal{S}$, tendremos que vale $g = g_{11} dx \otimes dx + g_{12} dx \otimes dy + g_{21} dy \otimes dx + g_{22} dy \otimes dy$, para

$$g_{11} = E_1 \cdot E_1 = 1 + f_x,$$
$$g_{12} = E_1 \cdot E_2 = f_x f_y = g_{21},$$
$$g_{22} = 1 + f_y,$$

por tanto de la ecuación (14.3) se sigue que

$$\omega_v = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx \wedge dy.$$

Ejercicio 14.5.1 a) Calcular el área de la esfera de radio 1.
b) Calcular el área del toro de radio interior 1 y radio exterior 2.

14.6. Aplicaciones a la Física

Veamos ahora algunos conceptos y resultados de Física clásica relacionados con el Teorema de Stokes, (14.12), pág.988.

Definición. Llamamos *divergencia de un campo* $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ a la función $\operatorname{div}(D) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, tal que

$$D^L\omega = \operatorname{div}(D)\omega = d(i_D\omega),$$

pues $D^L\omega \in \Lambda_n$.

Definición. Sea $(\mathcal{V}, \Lambda^+)$ una variedad Riemanniana orientada y $\omega \in \Lambda^+$ su forma de volumen. Dada una hipersuperficie S de $\mathcal{V}$ (borde de una variedad con borde C), con vector normal unitario exterior ∂_n, llamaremos *flujo de un campo* $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ a través de S, a

$$\int_S D \cdot \partial_n \; \omega_S = \int_S i_D\omega, \tag{14.4}$$

para ω_S la forma de volumen de S.

Si interpretamos D como la velocidad de un fluido en $\mathcal{V}$ que no cambia con el tiempo, es decir que la trayectoria que sigue una partícula, que en un instante está en un lugar, no depende del instante; entonces el flujo (en dimensión 2 y 3) representa, respectivamente el área y el volumen de fluido que atraviesa $\mathcal{S}$ por segundo (contando positivo el que sale y negativo el que entra).

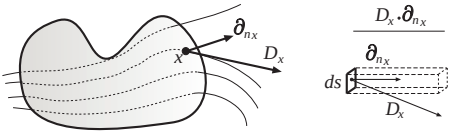


Figura 14.1. flujo de D a través de S.

Veamos la igualdad (14.4): Sea $\partial_n \in \mathcal{D}_S(\mathcal{V})$ el campo normal unitario a $\mathcal{S}$ apuntando hacia fuera de C. Sea $x \in \mathcal{S}$ y $D_{2x}, \ldots, D_{nx} \in T_x(\mathcal{S})$ una

base ortonormal bien orientada en $\mathcal{S}$. Por tanto $D_{1x} = \partial_{nx}, D_{2x}, \ldots, D_{nx} \in T_x(\mathcal{V})$ es una base ortonormal bien orientada en $\mathcal{V}$. Si en $\mathcal{S}$ es $D = \sum f_i D_i$, tendremos que en $\mathcal{S}$,

$$D \cdot \partial_n = f_1 = \omega(D, D_2, \ldots, D_n) = i_D\omega(D_2, \ldots, D_n),$$

y por tanto como ω_S es la forma de volumen en $\mathcal{S}$

$$i_D\omega = (D \cdot \partial_n)\omega_S,$$

y el flujo es por el **Teorema de Stokes**, (14.12), pág.988

$$\int_S (D \cdot \partial_n)\omega_S = \int_S i_D\omega = \int_C d(i_D\omega) = \int_C \operatorname{div}(D)\, dx,$$

lo que prueba el siguiente resultado.

Teorema de la divergencia 14.20 *El flujo de un campo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ a través de una hipersuperficie, frontera de una variedad con borde C de $\mathcal{V}$, es igual a la integral de la divergencia del campo D en C.*

Ejercicio 14.6.1 Demostrar que si $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ y $D = \sum f_i\partial_i$, entonces $\operatorname{div}(D) = \sum(\partial_i f_i)$.

Teorema de Liouville 14.21 *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ con grupo uniparamétrico τ_t y U un abierto de $\mathcal{V}$. Si denotamos con $U(t) = \tau_t(U)$ y con $V(t) = Vol[U(t)]$, entonces*

$$V'(t) = \int_{U(t)} \operatorname{div}(D)\, dx.$$

Demostración. Por ser $D^L\omega = \operatorname{div}(D)\omega$, y la definición de la derivada de Lie. ∎

Corolario 14.22 *Si $\operatorname{div}(D) = 0$, entonces el flujo de D conserva los volúmenes.*

Corolario 14.23 *El flujo de las ecuaciones de Hamilton en $\mathbb{R}^{2n}$, con coordenadas (p_k, q_k)*

$$p_i' = -\frac{\partial h}{\partial q_i}, \quad q_i' = \frac{\partial h}{\partial p_i},$$

conserva los volúmenes.

Demostración. Consideremos el campo Hamiltoniano correspondiente a h

$$D = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial p_i}\partial q_i,$$

Entonces el resultado se sigue del ejercicio (14.6.1), pues

$$\operatorname{div}(D) = -\sum \frac{\partial^2 h}{\partial q_i \partial p_i} + \sum \frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial q_i} = 0. \quad \blacksquare$$

Definición. Llamamos *circulación* de un campo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ sobre una curva L de la variedad Riemanniana $(\mathcal{V}, g)$ a

$$\int_L i_D g$$

Si nuestra variedad $\mathcal{V}$ es tridimensional, llamamos *rotacional* de D, $R = \operatorname{rot} D$, al único campo tangente que verifica

$$i_R \omega_v = d(i_D g),$$

cuya existencia puede probarse fácilmente en cada abierto coordenado (ver pág.174), y su unicidad es obvia, siendo en el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$,

$$R = (h_y - g_z)\partial_x + (f_z - h_x)\partial_y + (g_x - f_y)\partial_z.$$

En el caso bidimensional $D = f\partial_x + g\partial_y$, podemos entender el campo en $\mathbb{R}^3$, en cuyo caso su rotacional $R = (g_x - f_y)\partial_z$ es vertical. A menudo se llama *función rotacional de* D a la función $g_x - f_y$, cuya interpretación vimos en la pág.174, que era el doble del valor medio de las velocidades angulares de las rectas pasando por cada punto.

Si S es una superficie del espacio, con borde la curva L, entonces el **Teorema de Stokes**, (14.12), pág.988 implica que

$$\int_L i_D g = \int_S d(i_D g) = \int_S i_{\operatorname{rot} D}\omega,$$

En el caso del plano si $D = f\partial_x + g\partial_y$, $d(i_D g) = d(f\,dx + g\,dy) = (g_x - f_y)\omega_2$. Esto prueba el siguiente resultado.

Teorema del rotacional 14.24 *En el espacio, la circulación a lo largo de una curva cerrada, frontera de una superficie S es igual al flujo del rotacional a través de S.*

En el plano, la circulación a lo largo de una curva cerrada L, borde de una región S del plano, es la integral de la función rotacional de D en C.

14.6.1. Interpretación física de la integral compleja

A continuación vemos la interpretación física de la $\int f(z)dz$, para una función $f = u + iv \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U)$ (ver la lección 8.4.3, pág.631)

Definición. Llamaremos *campo tangente asociado* a una función compleja $f = u+iv \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U)$, al campo que define su conjugada, $\overline{f} = u-iv$,

$$D = u\partial_x - v\partial_y \in \mathcal{D}(U).$$

Veremos que en general la integral es el número complejo

$$\int_S f(z)dz = x+iy, \qquad x = \text{Circulación de } D \text{ en } S, \quad y = \text{Flujo de } D \text{ en } S.$$

Proposición 14.25 *Dada $f = u + iv \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U)$, D su campo asociado y una curva S, borde de una variedad con borde $C \subset \mathbb{R}^2$, su integral es*

$$\int_S f(z)dz = \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt = \int_S i_D g + i\int_S i_D\omega = \int_S D\cdot T + i\int_S D\cdot N.$$

para cualquier parametrización $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, de $S = \sigma[a,b]$, con $\sigma(a) = \sigma(b)$; y siendo T, N los campos unitarios tangente y normal a la curva[2]

Demostración. Para g la métrica del plano y para $\omega = dx \wedge dy$, se tiene que

$$i_D g = udx - vdy = (D\cdot T)\omega_1, \quad i_D\omega = vdx + udy = (D\cdot N)\omega_1,$$

[2]La parte real es la circulación de D a lo largo de S y la parte imaginaria el flujo de D a través de S. Ver la pág.995.

pues $\omega_1(T) = 1$, por tanto

$$\begin{aligned}\int_S f(z)dz &= \int_S (u+iv)(dx+idy) = \int_S (udx - vdy) + i\int_S (vdx + udy)\\ &= \int_S i_D g + i\int_S i_D\omega = \int_S D\cdot T + i\int_S D\cdot N\\ &= \int_a^b (ux'dt - vy'dt) + i\int_a^b (vx'dt + uy'dt)\\ &= \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt.\end{aligned}$$

En (9.11), pág.699, vimos que la condición necesaria y suficiente para que f sea holomorfa en U es que u y v sean de clase 1 en U y se satisfagan las ECUACIONES DE CAUCHY–RIEMANN (a la izquierda)

$$\begin{cases} u_x = v_y,\\ u_y = -v_x,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div} D = u_x - v_y = 0,\\ \operatorname{rot} D = u_y + v_x = 0,\end{cases}$$

en cuyo caso se tiene el **Teorema de Cauchy** (8.24), pág.634, $\int_S f(z)dz = 0$ en cualquier curva cerrada S borde de una variedad con borde $C \subset U$.

14.7. La definición de Gauss de la curvatura

Definición. Sea S una superficie cerrada de $\mathbb{R}^3$ y sea $\partial_n \in \mathcal{D}(S)^\perp$ su campo unitario ortogonal. Si $\partial_n = \sum n_i\partial_i$, definimos la *aplicación imagen esférica* de S como

$$\eta : S \to S_2, \quad \eta(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$$

Observemos que para cada $x \in S$ y cada $D_x \in T_x(S)$ los vectores

$$\eta_*(D_x), \quad -\phi_x D_x = (D^\nabla \partial_n)_x,$$

tienen las mismas componentes $D_x n_i$, por tanto las aplicaciones lineales η_* y $-\phi_x$ coinciden (naturalmente haciendo las identificaciones pertinentes) en cada punto $x \in S$. Ahora bien nosotros sabemos que ϕ_x es un

isomorfismo sii $\det \phi_x = k(x) \neq 0$, por tanto también tendremos que η_* es un isomorfismo en un punto $x \in S$ sii $k(x) \neq 0$, y por tanto η es un difeomorfismo local en x sii $k(x) \neq 0$.

Sea $x \in S$ tal que $k(x) \neq 0$ y consideremos abiertos U y V de S y S_2, entornos de x y $z = \eta(x)$ respectivamente tales que $\eta : U \to V$ es un difeomorfismo.

Denotemos con ω_S la 2–forma de volumen en S y con ω_2 la de S_2 y consideremos un compacto $C \subset U$, con $x \in C$, entonces si η conserva la orientación tendremos que

$$\text{Area}[\eta(C)] = \int_{\eta(C)} \omega_2 = \int_C \eta^* \omega_2.$$

Pero $\eta^*\omega_2 = f\omega_S$, y si elegimos una base ortonormal $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(U)$, tal que D_1, D_2, ∂_n esté orientada positivamente, entonces

$$\begin{aligned} f &= f\omega_S(D_1, D_2) = \eta^*\omega_2(D_1, D_2) = \omega_2(\eta_* D_1, \eta_* D_2) \\ &= \omega_2(-\phi D_1, -\phi D_2) = \omega_2(\phi D_1, \phi D_2) = \det(a_{ij}) = k, \end{aligned}$$

donde $\phi D_1 = a_{11} D_1 + a_{12} D_2$ y $\phi D_2 = a_{21} D_1 + a_{22} D_2$.

Por tanto si $k > 0$ en U, η conserva la orientación y tendremos que

$$\text{Area}[\eta(C)] = \int_C k\omega_S.$$

Teorema 14.26 *En las condiciones anteriores*

$$k(x) = \lim_{C \to x} \frac{\text{Area}[\eta(C)]}{\text{Area}[C]}.$$

Demostración. Sea $k_-(C) = \min\{k(p) : p \in C\}$ y $k_+(C) = \max\{k(p) : p \in C\}$. Entonces para cada compacto $C \subset U$, con $x \in C$, tendremos que

$$\begin{aligned} k_-(C)\text{Area}[C] = \int_C k_-(C)\omega_S &\leq \int_C k\omega_S = \text{Area}[\eta(C)] \\ &\leq \int_C k_+(C)\omega_S = k_+(C)\text{Area}[C], \end{aligned}$$

y como $k_-(C), k_+(C) \to k(x)$, cuando $C \to x$, se sigue el resultado. ∎

14.8. El operador de Laplace–Beltrami

14.8.1. El operador $*$ de Hodge.

Definición. En una variedad Riemanniana orientada $(\mathcal{V}, g, \Omega)$ de dimensión n, definimos el operador $*$ de Hodge de la forma

$$*: \beta \in \Lambda_k \to *\beta \in \Lambda_n - k,$$
$$*\beta(X_{k+1}, \ldots, X_n)\Omega = \beta \wedge \gamma(X_{k+1}) \wedge \cdots \wedge \gamma(X_n),$$

para $X_i \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ y $\gamma(D) = i_D g$.

Lema 14.27 *Si $D_1, \ldots, D_n$ es una base ortonormal orientada, entonces*

$$*\beta(D_{k+1}, \ldots, D_n) = \beta(D_1, \ldots, D_k).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
*\beta(D_{k+1}, \ldots, D_n) &= *\beta(D_{k+1}, \ldots, D_n)\Omega(D_1, \ldots, D_n) \\
&= \beta \wedge \gamma(D_{k+1}) \wedge \cdots \wedge \gamma(D_n)[D_1, \ldots, D_n] \\
&= (1/k!) \sum_{\sigma} \operatorname{sig}(\sigma)[\beta \otimes \gamma(D_{k+1}) \otimes \cdots \otimes \gamma(D_n)] \\
&\qquad [D_{\sigma(1)}, \ldots, D_{\sigma(n)}] \\
&= (1/k!) \sum_{\sigma(i)=i, i>k} \operatorname{sig}(\sigma)\beta[D_{\sigma(1)}, \ldots, D_{\sigma(k)}] \\
&= (1/k!)\mathcal{H}(\beta)[D_1, \ldots, D_k] = \beta(D_1, \ldots, D_k). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejercicio 14.8.1 Demostrar que en $\mathbb{R}^n$ con $\Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$,

$$*dx_i = (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Proposición 14.28 *El operador $*$ tiene las siguientes propiedades:*

a) $** = (-1)^{k(n-k)}\beta = (-1)^{k(n-1)}\beta$.

b) $*: \Lambda_k \to \Lambda_{n-k}$ *es un isomorfismo con inversa* $(-1)^{k(n-k)}*$.

c) $\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha$.

d) $*[\alpha \wedge \gamma(D)] = i_D[*\alpha]$.

e) $*[i_D\alpha] = (-1)^{n-1}[*\alpha] \wedge \gamma(D)$.

f) $*[D^\nabla \alpha] = D^\nabla[*\alpha]$.

g) $\alpha \wedge *\alpha = f\Omega$, *con* $f(x) = 0$ *si* $\alpha_x = 0$ *y* $f(x) > 0$ *en caso contrario.*

Demostración. Sea $D_1, \ldots, D_n$ una base ortonormal y orientada de $\mathcal{D}(U)$ en un abierto U.

a)

$$\begin{aligned} *[*\beta](D_1, \ldots, D_k) &= (-1)^{k(n-k)} * \beta[D_{k+1}, \ldots, D_n] \\ &= (-1)^{k(n-k)} \beta(D_1, \ldots, D_n). \end{aligned}$$

La otra igualdad se sigue de que $(-1)^{k^2} = (-1)^k$.

b) Se sigue de (a).

c) Como $1 = sig(\sigma)\Omega(D_{\sigma(1)}, \ldots, D_{\sigma(n)}]$,

$$\begin{aligned} \alpha \wedge *\beta(D_1, \ldots, D_n) &= (1/k!(n-k)!) \sum \operatorname{sig}(\sigma)\alpha[D_{\sigma(1)}, \ldots, D_{\sigma(k)}] \\ &\quad * \beta[D_{\sigma(k+1)}, \ldots, D_{\sigma(n)}] = \\ &= (1/k!(n-k)!) \sum \operatorname{sig}(\sigma) \operatorname{sig}(\sigma) * \alpha[D_{\sigma(k+1)}, \ldots, D_{\sigma(n)}] \\ &\quad \operatorname{sig}(\sigma)\beta[D_{\sigma(1)}, \ldots, D_{\sigma(k)}] = \\ &= \beta \wedge *\alpha(D_1, \ldots, D_n). \end{aligned}$$

d) Basta ver que para $D_{k+2}, \ldots, D_n$ ortonormales

$$*[\alpha \wedge \gamma(D)](D_{k+2}, \ldots, D_n) = i_D[*\alpha](D_{k+2}, \ldots, D_n).$$

Si D es combinación de esos D_i ambos lados se anulan, en caso contrario consideremos una base $D_1, \ldots, D_k, D_{k+1} = D, D_{k+2}, \ldots, D_n$ ortonormal y bien orientada, entonces

$$\begin{aligned} *[\alpha \wedge \gamma(D)](D_{k+2}, \ldots, D_n) &= [\alpha \wedge \gamma(D)](D_1, \ldots, D_{k+1}) \\ &= (1/k!) \sum \operatorname{sig}(\sigma)\alpha[D_{\sigma(1)}, \ldots, D_{\sigma(k)}] < D_{k+1}, D_{\sigma(k+1)} > \\ &= \alpha(D_1, \ldots, D_k) = *\alpha(D_{k+1}, \ldots, D_n) \\ &= i_D[*\alpha](D_{k+2}, \ldots, D_n). \end{aligned}$$

e) Por (a) tenemos que $\alpha = *[(-1)^{k(n-1)} * \alpha]$ y por (d)

$$i_D\alpha = (-1)^{k(n-1)} i_D * (*\alpha) = (-1)^{k(n-1)} * [*\alpha \wedge \gamma(D)],$$

por tanto por (a)

$$*[i_D\alpha] = (-1)^{k(n-1)} **[*\alpha \wedge \gamma(D)] = (-1)^{k(n-1)}(-1)^{(n-k+1)(n-1)} *\alpha \wedge \gamma(D).$$

f) Lo haremos por inducción en k, pero antes veamos que $D^\nabla\Omega = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= D[\Omega(D_1,\dots,D_n)] \\ &= D^\nabla\Omega(D_1,\dots,D_n) + \Omega[D^\nabla D_1,\dots,D_n) + \cdots + \Omega(D_1,\dots,D^\nabla D_n) \\ &= D^\nabla\Omega(D_1,\dots,D_n) \end{aligned}$$

pues $< D^\nabla D_i, D_i >= 0$ y por tanto $D^\nabla D_i$ sólo tiene componentes en los D_j con $j \neq i$. Ahora $D^\nabla\Omega = [D^\nabla\Omega(D_1,\dots,D_n)]\Omega = 0$. Por otra parte $*(f\Omega) = f$ y $*f = f\Omega$, por tanto se sigue que para $\alpha = \Omega$ $(k = n)$

$$*[D^\nabla\alpha] = 0 = D^\nabla[*\alpha],$$

y para $\alpha = f\Omega$

$$*[D^\nabla f\Omega] = *[(Df)\Omega] = Df = D^\nabla[*(f\Omega)].$$

Sin dificultad se demuestran las fórmulas

$$\begin{aligned} i_E(D^\nabla\beta) &= D^\nabla(i_E\beta) - i_{D^\nabla E}\beta, \\ D^\nabla\gamma(E) &= \gamma(D^\nabla E), \\ D^\nabla(\alpha\wedge\beta) &= (D^\nabla\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(D^\nabla\beta), \end{aligned}$$

entonces por inducción, por (d) y por ellas se tiene

$$\begin{aligned} i_E(D^\nabla * \alpha) &= D^\nabla(i_E * \alpha) - i_{D^\nabla E} * \alpha \\ &= D^\nabla[*(\alpha\wedge\gamma(E))] - *[\alpha\wedge\gamma(D^\nabla E)] \\ &= *[D^\nabla(\alpha\wedge\gamma(E))] - *[\alpha\wedge\gamma(D^\nabla E)] \\ &= *(D^\nabla\alpha\wedge\gamma(E))] = i_E[*D^\nabla\alpha]. \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} f &= \alpha\wedge *\alpha(D_1,\dots,D_n) \\ &= \frac{1}{k!(n-k)!}\sum \operatorname{sig}(\sigma)\alpha[D_{\sigma(1)},\dots,D_{\sigma(k)}] * \alpha[D_{\sigma(k+1)},\dots,D_{\sigma(n)}] \\ &= \frac{1}{k!(n-k)!}\sum \operatorname{sig}(\sigma)\alpha[D_{\sigma(1)},\dots,D_{\sigma(k)}]\operatorname{sig}(\sigma)\alpha[D_{\sigma(1)},\dots,D_{\sigma(k)}]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 14.29 *Si $\mathcal{V}$ es compacta,*

$$< \alpha, \beta >= \int \alpha\wedge *\beta,$$

es bilineal, simétrica y definida positiva en $\Lambda_k(\mathcal{V})$. *Además verifica*

$$< *\alpha, *\beta >=< \alpha, \beta > .$$

Demostración. Lo primero se sigue de la definición y de (14.28). Veamos la igualdad

$$\begin{aligned} < *\alpha, *\beta > &= \int *\alpha \wedge * * \beta = (-1)^{k(n-k)} \int *\alpha \wedge \beta \\ &= \int \beta \wedge *\alpha = \int \alpha \wedge *\beta =< \alpha, \beta > . \end{aligned}$$

∎

Definición. Llamaremos *codiferencial exterior* a

$$\delta = (-1)^{k+n+1} *^{-1} \circ d \circ *\colon \Lambda_k \to \Lambda_{k-1}.$$

Ejercicio 14.8.2 Demostrar que $\delta^2 = 0$ y que $*\delta = (-1)^{n+k+1} d*$.

14.8.2. El operador de Laplace–Beltrami

Definición. Llamaremos *operador de Laplace–Beltrami* a

$$\Delta = -(d\delta + \delta d)\colon \Lambda_k \to \Lambda_k.$$

Ejercicio 14.8.3 Demostrar las siguientes propiedades:
a) $\Delta = -(d + \delta)^2$.
b) $d\Delta = \Delta d$.
c) $\delta\Delta = \Delta\delta$.

Proposición 14.30 *Sobre las funciones, es decir para* $k = 0$, *el operador de LaPlace–Beltrami se expresa de las formas:*

$$\Delta = -\delta d = \sum_{i=1}^{n} (D_i^2 - D_i^{\nabla} D_i) = \operatorname{div} \operatorname{grad},$$

para D_i *una base orientada de campos ortonormales.*

Demostración. Veamos que $-\delta(du) = \sum_{i=1}^n (D_i^2 u - D_i^\nabla D_i u)$, para ello observemos que para una 1–forma ω

$$d\omega(D_1, D_2) = D_1(\omega D_2) - D_2(\omega D_1) - \omega(D_1^L D_2),$$

y por inducción para una $n-1$–forma ω

$$\begin{aligned} d\omega(D_1, \ldots, D_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} D_i[\omega(D_1, \ldots, \widehat{D_i}, \ldots, D_n) + \\ + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{i<j} \omega(D_1, \ldots, \widehat{D_i}, \ldots, D_i^L D_j \ldots, D_n), \end{aligned}$$

donde la expresión $\widehat{D_i}$, significa que ese término no está. Ahora consideremos una función u, entonces para la $n-1$–forma $*(du) = \omega$, tendremos que para una base orientada ortonormal D_i y su base dual $\omega_i = i_{D_i} g$

$$\begin{aligned} \omega(D_1, \ldots, \widehat{D_i}, \ldots, D_n) = \\ = du \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_n(D_1, \ldots, D_n) = \\ = (-1)^{i+1} \omega_1 \wedge \cdots \wedge du \wedge \cdots \wedge \omega_n(D_1, \ldots, D_n) = (-1)^{i+1} D_i u, \end{aligned}$$

y como para la n–forma de volumen Ω, $*\Omega = 1$, tendremos que $d\omega = f\Omega$ y $*d\omega = f$, por tanto

$$\begin{aligned} -\delta(du) = [* \circ d \circ * \circ d](u) = f = d\omega(D_1, \ldots, D_n) \\ = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} D_i[\omega(D_1, \ldots, \widehat{D_i}, \ldots, D_n) + \\ + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{i<j} \omega(D_1, \ldots, \widehat{D_i}, \ldots, D_i^L D_j \ldots, D_n) \\ = \sum_{i=1}^n D_i^2 u + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{i<j} \omega(D_1, \ldots, \widehat{D_i}, \ldots, D_i^\nabla D_j - D_j^\nabla D_i, \ldots, D_n) \\ = \sum_{i=1}^n D_i^2 u + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{i<j} \omega(D_1, \ldots, \widehat{D_i}, \ldots, D_i^\nabla D_j, \ldots, D_n) \\ - \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{i<j} \omega(D_1, \ldots, \widehat{D_i}, \ldots, D_j^\nabla D_i, \ldots, D_n) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n D_i^2 u + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{i<j} (-1)^{2j-i+2} (D_i^\nabla D_j \cdot D_i) D_j u \\
&\quad - \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{i<j} (-1)^{i+1} (D_j^\nabla D_i \cdot D_j) D_i u \\
&= \sum_{i=1}^n D_i^2 u - \sum_{i=1}^n \sum_{i<j} (D_i^\nabla D_i \cdot D_j) D_j u - \sum_{i=1}^n \sum_{i<j} (D_j^\nabla D_j \cdot D_i) D_i u \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{i\geq j} (D_i^\nabla D_i \cdot D_j) D_j u + \sum_{i=1}^n \sum_{i\geq j} (D_i^\nabla D_i \cdot D_j) D_j u \\
&= \sum_{i=1}^n D_i^2 u - \sum_{i=1}^n (D_i^\nabla D_i) u,
\end{aligned}
$$

pues $0 = D_i(D_j D_k) = D_i^\nabla D_j \cdot D_k + D_j \cdot D_i^\nabla D_k$ y se tiene que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{i<j} (D_j^\nabla D_j \cdot D_i) D_i = \sum_{i=1}^n \sum_{i\geq j} (D_i^\nabla D_i \cdot D_j) D_j,$$

como se comprueba multiplicando ambos campos por la base D_i (o reordenando las sumas), teniendo en cuenta que $D_i^\nabla D_i \cdot D_i = 0$.

Veamos ahora la última igualdad. Sea $D = \operatorname{grad} u$, entonces como $D^\nabla D_i \cdot D_i = 0$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \operatorname{div} D &= D^L \Omega(D_1, \dots, D_n) \\
&= -\Omega(D^L D_1, \dots, D_n) - \cdots - \Omega(D_1, \dots, D^L D_n) \\
&= -\sum D^L D_i \cdot D_i = -\sum D^\nabla D_i \cdot D_i + \sum D_i^\nabla D \cdot D_i \\
&= \sum D_i^\nabla D \cdot D_i = \sum D_i(D \cdot D_i) - D \cdot (\sum D_i^\nabla D_i) \\
&= \sum D_i(D_i u) - \sum D_i^\nabla D_i(u). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Nota 14.31 En el caso particular de $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, con su métrica y n–forma de volumen canónicas,

$$g = \sum_{i=1}^n dx_i \otimes dx_i, \qquad \Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

se tiene que para $D_i = \partial_{x_i}$, $D_i^\nabla D_i = 0$ y por lo tanto sobre las funciones

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

que es conocido como el *operador de Laplace* en $\mathbb{R}^n$, del que hablamos en 10.1, pág.753.

Para una variedad Riemanniana arbitraria y para $k = 0$ tenemos que

$$\Delta = -\delta \circ d\colon \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}),$$

es un ODL de orden 2, $\Delta \in \mathcal{O}_2(\mathcal{V})$, definido, en términos de unas coordenadas x_i, por

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \tag{14.5}$$

donde g_{ij} son los coeficientes de la métrica g en esas coordenadas, g^{ij} son los términos de su matriz inversa y $g = \det(g_{ij})$.

Consideremos una variedad Riemanniana y una hipersuperficie con vector normal unitario ∂_n y una base ortonormal de campos tangentes a la hipersuperficie, $D_2, \dots, D_n$. Consideremos el único campo ∂_n en la variedad que es geodésico, $\partial_n^\nabla \partial_n = 0$, y que extiende al normal a la subvariedad y extendamos los D_i a la variedad por las geodésicas definidas por ∂_n, de modo paralelo, es decir $\partial_n^\nabla D_i = 0$, de este modo los campos $\partial_n = D_1, \dots, D_n$ siguen siendo base ortonormal, pues $D_i \cdot D_j$ y $\partial_n \cdot D_j$ son constantes a lo largo de las curvas integrales de ∂_n, ya que

$$\partial_n(D_i \cdot D_j) = \partial_n^\nabla D_i \cdot D_j + D_i \cdot \partial_n^\nabla D_j = 0 = \partial_n^\nabla \partial_n \cdot D_j + \partial_n \cdot \partial_n^\nabla D_j = \partial_n(\partial_n \cdot D_j).$$

En estos términos se tiene el siguiente resultado.

Proposición 14.32 *Dada una variedad Riemanniana con operador de Laplace Δ y una hipersuperficie con operador de Laplace $\overline{\Delta}$, respecto de la métrica restringida, con operador de Weingarten ϕ (ver la pág.181) y con vector normal unitario ∂_n, se tiene que en la subvariedad, para toda función u de la variedad*

$$\Delta u = \partial_n^2 u + \overline{\Delta} u - (\operatorname{traz} \phi) \partial_n u.$$

Demostración. Se sigue del resultado anterior y de la igualdad

$$D_i^\nabla D_i = D_i^{\bar\nabla} D_i + \phi_2(D_i, D_i)\partial_n = D_i^{\bar\nabla} D_i + (\phi(D_i) D_i)\partial_n,$$

pues

$$\begin{aligned} \Delta u &= \partial_n^2 u + \sum_{i=2}^{n} D_i^2 u - \partial_n^\nabla \partial_n u - \sum_{i=2}^{n} D_i^\nabla D_i u \\ &= \partial_n^2 u + \overline{\Delta} u - (\operatorname{traz} \phi) \partial_n u. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 14.33 *La gráfica de una función f de un abierto del plano define una superficie mínima sii la función z es armónica en la superficie.*

Demostración. Por el resultado anterior, por el ejercicio (8.8.7), pág.668 y porque $\Delta z = 0$ y $\partial_n(\partial_n z)) = 0$, pues $\partial_n^\nabla \partial_n = 0$, por tanto $\partial_n(\partial_n x) = \partial_n(\partial_n y) = \partial_n(\partial_n z) = 0$. ∎

Corolario 14.34 *Una superficie del espacio $\mathbb{R}^3$ es mínima sii las funciones x, y, z son armónicas en la superficie*[3].

Proposición 14.35 *Si $\mathcal{V}$ es compacta sin borde, entonces para $\alpha \in \Lambda_k$ y $\beta \in \Lambda_{k+1}$, se tiene*

$$< d\alpha, \beta >=< \alpha, \delta\beta > .$$

Demostración.

$$d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge *\beta - (-1)^{k+1}\alpha \wedge d * \beta = d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge *\delta\beta,$$

y por Stokes (14.12), pág.988

$$< d\alpha, \beta >= \int d\alpha \wedge *\beta = \int \alpha \wedge *\delta\beta =< \alpha, \delta\beta > . \quad ∎$$

Corolario 14.36 *Si $\mathcal{V}$ es compacta sin borde y $\alpha, \beta \in \Lambda_k$, entonces*

$$< \Delta\alpha, \beta >=< \alpha, \Delta\beta > .$$

Demostración.

$$\begin{aligned} < \Delta\alpha, \beta > &=< d\delta\alpha, \beta > + < \delta d\alpha, \beta >=< \delta\alpha, \delta\beta > + < d\alpha, d\beta > \\ &=< \alpha, d\delta\beta > + < \alpha, \delta d\beta >=< \alpha, \Delta\beta > . \quad ∎ \end{aligned}$$

Definición. Diremos que $\alpha \in \Lambda_k$ es una *forma armónica* si $\Delta\alpha = 0$.

Teorema 14.37 *$\Delta\alpha = 0$ sii $d\alpha = \delta\alpha = 0$.*

Demostración.

$$0 =< \Delta\alpha, \alpha >=< d\delta\alpha, \alpha > + < \delta d\alpha, \alpha >=< \delta\alpha, \delta\alpha > + < d\alpha, d\alpha >,$$

y $\delta\alpha = d\alpha = 0$, pues $<,>$ es definido positivo. ∎

[3] Ver los ejercicios (8.6.2), pág.658 y (8.6.3), pág.659

Proposición 14.38 *Si $\Delta\beta = 0$ y β es exacta, entonces $\beta = 0$.*

Demostración. Sea $\beta = d\alpha$, entonces como $d\beta = \delta\beta = 0$

$$0 =< \delta\beta, \alpha >=< \delta d\alpha, \alpha >=< d\alpha, d\alpha >,$$

lo cual implica $d\alpha = 0$. ∎

En general se tiene el siguiente resultado cuya prueba no incluimos, pues requiere teoría de operadores elípticos.

Teorema de descomposicion de Hodge–De Rham 14.39 *Para cada $\lambda \in \Lambda_k$ existe una única descomposición ortogonal*

$$\lambda = d\alpha + \delta\beta + \gamma,$$

con $\Delta\gamma = 0$.

Bibliografía y comentarios.

Los libros consultados para la confección de este tema han sido

Abraham, Ralph and Mardsen, Jerrold E.: "*Foundations of Mechanics*". Ed. Addison–Wesley, 1978.

Arnold, V.I.: "*Equations differentielles ordinaires*". Ed. Mir, Moscou, 1974.

Bishop, R.L. and Goldberg,S.J.: "*Tensor Analysis on Manifolds*". Dover, 1980.

Boothby, W,M.: "*An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*". Ac Press, 1975.

Crampin,M. and Pirani,F.A.E.: "*Applicable Differential Geometry*". Cambridge University Press, 1988.

Choquet–Bruhat, Y.: "*Géométrie differentielle et systemes exterieurs*". Ed. Dunod, 1968.

Godbillon, C.: "*Elements de Topologie Algebrique*". Hermann, Paris, 1971.

Una interesante aplicación práctica de la **ecuación de Gauss–Green** la encontramos en el aparato de medición de áreas conocido como *planímetro*:

Este aparato se coloca sobre el papel en el que tengamos dibujada la figura D, cuya área queremos medir. Está formado por dos brazos $0A$ y AB de igual longitud y con una articulación en su unión A. El extremo 0 permanece fijo con un pincho como el de un compás y en A hay una rueda perpendicular al papel, con eje AB —ambos brazos están a altura constante sobre el papel—. Una pantalla en el punto A nos va dando el área de la figura plana D, cuando con el extremo B recorremos la curva C que la limita.

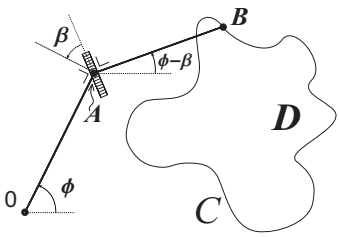


Figura 14.2. Planímetro

Tomemos 0 como origen de un sistema de coordenadas cartesiano y la longitud del brazo como unidad de distancia. Ahora cada $B = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ determina los ángulos $\varphi \in (0, 2\pi)$, que forma $0A$ con el eje x, es decir $A = (\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$, y $\beta \in (0, \pi)$ que forma la rueda con la perpendicular a $0A$ por A, estos ángulos forman un sistema de coordenadas para los puntos de la bola abierta de radio 2 (que es donde debe estar la figura

D) quitando un radio y se tiene

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\varphi + \cos(\varphi-\beta)\\ y &= \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}(\varphi-\beta)\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} x_\beta &= \operatorname{sen}(\varphi-\beta),\\ x_\varphi &= -\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}(\varphi-\beta),\\ y_\beta &= -\cos(\varphi-\beta),\\ y_\varphi &= \cos\varphi + \cos(\varphi-\beta),\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} dx\wedge dy &= (x_\beta y_\varphi - x_\varphi y_\beta)\, d\beta\wedge d\varphi = -\operatorname{sen}\beta\; d\beta\wedge d\varphi\\ &= d(\cos\beta\, d\varphi).\end{aligned}$$

por lo tanto se sigue del teorema de Gauss–Green que

$$\text{área}(D) = \int_D dx\wedge dy = \int_C \cos\beta\, d\varphi.$$

Ahora bien $\int_C \cos\beta d\varphi$ no es otra cosa que el ángulo total que gira la rueda que está en A —si la rueda tiene radio 1, en general es proporcional a ese ángulo—. Veámoslo:

Parametricemos la curva C que describimos con B, con $\sigma\colon [0,L]\to\mathbb{R}^2$, tal que $\sigma[0,L]=C$ y $\sigma(0)=\sigma(L)$ y consideremos las correspondientes funciones $\varphi(t)$ y $\beta(t)$. Ahora pintemos de blanco el punto $R(0)$ de la rueda que está en el plano en el instante inicial $t=0$ y denotemos con $\alpha(t)$ el ángulo en la rueda que forma nuestro punto blanco $R(0)$ (que eventualmente no tocará el plano) con el que ahora lo toca. Observemos que en el movimiento de B por el perímetro C, la rueda (que está en $A(t)=(\cos\varphi(t),\operatorname{sen}\varphi(t))$), se mueve sobre la circunferencia de radio 1 con velocidad $\varphi'(t)(-\operatorname{sen}\varphi(t),\cos\varphi(t))$ y el rozamiento hace que la rueda ruede, a menos que su desplazamiento tenga la dirección de su eje. Ahora bien como cualquier velocidad en el plano, que actúe sobre la rueda, se descompone en una componente con la dirección de la rueda y otra en la dirección de su eje y sólo la de la dirección de la rueda tiene efecto sobre ella, tendremos la siguiente relación

$$\alpha'(t) = \cos\beta(t)\varphi'(t) \quad\Rightarrow\quad \text{área}(D) = \int_C \cos\beta\, d\varphi = \alpha(L).$$

Remitimos al lector al trabajo

Gatterdam, R.W.: "*The planimeter as an example of Green's theorem*". Amer. Math. Monthly, 1981, 701-704.

El italiano Joseph Louis Lagrange (1736-û1813) da en un trabajo sobre gravitación, de 1762, la primera versión del Teorema de Stokes, (14.12), pág.988 (en una forma básica del Teorema de la divergencia).

En 1813 Carl Friedrich Gauss (1777–1855) demostró para $n = 3$ la igualdad

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\partial C} f < \partial_n, \partial x_i > d\sigma$$

para $d\sigma$ el elemento de unidad de superficie, redescubriendo el resultado de Lagrange. A partir de entonces se conoce como Ley de Gauss.

El francés André-Marie Ampère (1775–1836) que fue el primero en explicar la Teoría electrodinámica, publica en 1825 sus resultados sobre electricidad y magnetismo, en los que aparecen versiones tempranas del Teorema de la divergencia. Maxwell describe este trabajo como

One of the most brilliant achievements in science. The whole, theory and experiment, seems as if it had leaped, full-grown and full-armed, from the brain of the 'Newton of electricity'. It is perfect in form and unassailable in accuracy; and it is summed up in a formula from which all the phenomena may be deduced, and which must always remain the cardinal formula of electrodynamics.

En 1828 George Green (1793–1841) publica de forma privada

An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetis.

en el que aparece un teorema equivalente al (14.13) dado por nosotros en la página 990. Pero su trabajo pasó desapercibido hasta que cinco años después de su muerte, en 1846, William Thompson (Lord Kelvin) encontró una copia de su trabajo y lo reimprimió.

En 1828 M.V.Ostrogradsky (1801–1862) demostró la siguiente fórmula para $n = 3$ (publicada en 1831)

$$\int_C (P_x + Q_y + R_z)\, dxdydz = \int_{\partial C} P\, dydz + Q\, dxdz + R\, dxdy,$$

que también es un caso particular de la fórmula de Stokes y básicamente el Teorema de la divergencia. En 1834 (publicado en 1838) la extendió para n arbitrario.

A G. Gabriel Stokes (1819–1903) se le atribuye la extensión de estos resultados con la única y elegante fórmula que lleva su nombre. Aunque la historia parece ser la siguiente:

Tras la muerte en 1768 de Robert Smith, profesor de Astronomía de la Universidad de Cambridge, se creó un premio legado por él y conocido como Smith's Prize, para licenciados matemáticos de la Universidad de

Cambridge. Desde entonces todos los años se ha entregado este premio, salvo en 1917 que no hubo candidatos. Algunos de los ganadores fueron: en 1841 G. G. Stokes, en 1842 Arthur Cayley, en 1845 William Thomson (Lord Kelvin), en 1854 J. Clerk Maxwell, en 1901 G. H. Hardy ó en 1908 J. E. Littlewood.

Stokes ocupó, desde 1849 hasta su muerte en 1903, la cátedra Lucasian de Matemáticas de la Universidad de Cambridge (la misma que ocupó I. Newton) y desde 1850 hasta 1882 es él quién propone los problemas[4] para el premio. En 1854 (año en el que gana Maxwell), el problema 8 que plantea es:

8.- If X, Y, Z be functions of the rectangular co–ordinates x, y, z, dS an element of any limited surface, l, m, n the cosines of the inclinations of the normal at dS to the axes, ds an element of the bounding line, shew that

$$\int\int \left\{ l\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) + m\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + n\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right)\right\} dS = \int \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right) ds,$$

de differential coefficients of X, Y, Z being partial, and the single integral being taken all round the perimeter of the surface.

La fórmula anterior no es otra cosa que la conocida

$$\int_C (R_y - Q_z)\, dydz + (R_x - P_z)\, dxdz + (Q_x - P_y)\, dxdy = \int_{\partial C} Pdx + Qdy + Rdz,$$

y entre la correspondencia que se conserva de Stokes aparece en la postdata de una carta del 2 de Julio de 1850, de Lord Kelvin (William Thomson) a Stokes.

Posiblemente Maxwell, que era candidato para el premio (que ganó) es el que extiende el nombre de Teorema de Stokes, (14.12), pág.988 que ha llegado hasta nuestros días.

No obstante todos los resultados citados hasta ahora son casos particulares del Teorema y es probable que el padre real de él sea E.Cartan, que fue el primero en analizar y dar la definición del concepto que se escondía detrás de estas fórmulas, nos referimos a la diferencial de una forma diferencial. Remitimos al lector a su libro

[4]Una lista de todos los problemas propuestos por él se encuentra en internet en la página de la Universidad de Michigan

http://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/AAT0146.0005.001

page 296.

Cartan, E.: "*Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications geométriques*". Hermann Paris, 1971 (Primera Ed. de 1945).

Fin del Tema 14

Tema 15

Variedades complejas

15.1. Estructuras casi–complejas

Todo $\mathbb{C}$–espacio vectorial $\mathcal{E}$, de dimensión n es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial del dimensión $2n$. Si $e_1, \ldots, e_n$ es una base del $\mathbb{C}$–espacio, entonces

$$e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n,$$

es una base del $\mathbb{R}$–espacio vectorial. Además tenemos un endomorfismo natural, multiplicar por i

$$J\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \qquad J(e) = ie,$$

para el que $J^2 = -\operatorname{Id}$. Recíprocamente, si $\mathcal{E}$ es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial con un endomorfismo $J\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, tal que $J^2 = -\operatorname{Id}$, entonces tiene una estructura natural de $\mathbb{C}$–espacio vectorial, definiendo para cada $e \in \mathcal{E}$ y $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a + ib)e = ae + bJ(e).$$

Definición. Llamaremos *variedad casi compleja* $(\mathcal{X}, J)$, a una variedad diferenciable $\mathcal{X}$ con un $\mathcal{C}^\infty$ endomorfismo

$$J\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D},$$

para el que $J^2 = -\operatorname{Id}$.

Este endomorfismo J define el tensor

$$T_1^1 \colon \mathcal{D} \times \Omega \to \mathcal{C}^\infty, \quad T_1^1(D, \omega) = \omega(JD),$$

y por tanto en cada punto $x \in \mathcal{X}$ tenemos un endomorfismo

$$J \colon T_x(\mathcal{X}) \to T_x(\mathcal{X}),$$

tal que $J^2 = -\operatorname{Id}$, por lo tanto cada espacio tangente tiene estructura de $\mathbb{C}$–espacio vectorial y

$$\dim \mathcal{X} = \dim T_x(\mathcal{X}) = 2n.$$

Definición. Llamaremos *aplicación casi compleja* entre variedades casi complejas a toda aplicación diferenciable

$$\phi \colon (\mathcal{X}, J) \to (\mathcal{X}', J'),$$

tal que para todo $x \in \mathcal{X}$ es conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_x(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\phi_*} & T_{\phi(x)}(\mathcal{X}') \\ {\scriptstyle J}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J'} \\ T_x(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\phi_*} & T_{\phi(x)}(\mathcal{X}') \end{array}$$

por tanto es $\mathbb{C}$–lineal la aplicación

$$T_x(\mathcal{X}) \xrightarrow{\phi_*} T_{\phi(x)}(\mathcal{X}').$$

Ejemplo 15.1.1 Sea $\mathcal{E}$ un $\mathbb{C}$–espacio vectorial y consideremos el isomorfismo de $\mathbb{R}$–espacio vectorial

$$\mathcal{E} \to T_x(\mathcal{E}),$$

que hace corresponder a cada vector la derivada direccional relativa a ese vector, ahora llevemos el endomorfismo de $\mathcal{E}$, $J(e) = ie$ a cada espacio tangente mediante el isomorfismo anterior. Esto dota a $\mathcal{E}$ de una estructura casi compleja.

Ejemplo 15.1.2 Sea $\mathcal{E} = \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ y consideremos la estructura casi compleja del ejemplo anterior, en tal caso

$$\begin{array}{l} J(1,0) = (0,1) \\ J(0,1) = -(1,0) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} J\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}, \\ J\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial x} \end{array}$$

Ejemplo 15.1.3 Sea $\mathcal{E} = \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ y consideremos la estructura casi compleja del primer ejemplo, en tal caso

$$J(e) = ie \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} J\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y_i}, \\ J\left(\dfrac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial x_i} \end{array}$$

Ejemplo 15.1.4 Sea $(\mathcal{X}, g)$ una superficie Riemanniana orientada, con 2–forma de área ω y sea J el endomorfismo asociado a (g, ω), es decir para cualesquiera campos D_1, D_2

$$\omega(D_1, D_2) = g(JD_1, D_2),$$

por tanto si consideramos D_1, D_2 una base local de campos ortonormal $(g(D_i, D_j) = \delta_{ij})$ y orientados positivamente $(\omega(D_1, D_2) = 1)$, tendremos que

$$\begin{aligned} J(D_1) &= (J(D_1) \cdot D_1)D_1 + (J(D_1) \cdot D_2)D_2 = D_2, \\ J(D_2) &= (J(D_2) \cdot D_1)D_1 + (J(D_2) \cdot D_2)D_2 = -D_1, \end{aligned}$$

por tanto $J^2 = -\operatorname{Id}$ y $\mathcal{X}$ es una variedad casi compleja.

Proposición 15.1 *$F\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es casi–compleja si y sólo si F es holomorfa.*

Demostración. Consideremos la función correspondiente

$$F\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)),$$

entonces como

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_* = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix},$$

tendremos que F es casi–compleja si y sólo si $JF_* = F_*J$ lo cual equivale a las ecuaciones de Cauchy–Riemann, $g_x = -f_y$ y $g_y = f_x$, lo cual equivale a que F sea holomorfa. ∎

Del mismo modo se tiene el resultado en $\mathbb{C}^n$ teniendo en cuenta que $F = (F_1, \ldots, F_m)\colon U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ es *holomorfa* si y sólo si lo son las F_i y que $F\colon U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ lo es si y sólo si para

$$\begin{aligned} F(z_1, \ldots, z_n) &= F((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)) \\ &= f((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)) + ig((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)), \\ \text{se tiene} \qquad & f_{x_i} = -g_{y_i}, \quad f_{y_i} = g_{x_i}. \end{aligned}$$

Proposición 15.2 *$F = (F_1, \ldots, F_m)\colon U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ es casi–compleja si y sólo si las F_i son holomorfas.*

Definición. Diremos que una variedad casi–compleja $(\mathcal{X}, J)$ es *analítica compleja* si todo punto $p \in \mathcal{X}$ tiene un entorno coordenado casi–complejo U_p, es decir con un isomorfismo casi–complejo

$$\varphi = (z_1, \ldots, z_n)\colon U_p \to U' \subset \mathbb{C}^n,$$

por tanto para $z_i = x_i + iy_i$, las (x_i, y_i) son un sistema de coordenadas (reales) en las que $J(\partial x_i) = \partial y_i$, $J(\partial y_i) = -\partial x_i$.

Definición. Sea $(\mathcal{X}, J)$ una variedad compleja, diremos que

$$F = f + ig\colon U \subset \mathcal{X} \to \mathbb{C},$$

es *holomorfa* si es casi–compleja, por tanto en un entorno coordenado casi–complejo U_p, con coordenadas (x_i, y_i), se tiene $F_*J = J'F_*$, es decir

$$\begin{pmatrix} f_{x_1} & f_{y_1} & \cdots & f_{x_n} & f_{y_n} \\ g_{x_1} & g_{y_1} & \cdots & g_{x_n} & g_{y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{x_1} & f_{y_1} & \cdots f_{x_n} & f_{y_n} \\ g_{x_1} & g_{y_1} & \cdots g_{x_n} & g_{y_n} \end{pmatrix}$$

lo cual equivale a las ecuaciones de Cauchy–Riemann para f y g y esto a que la función $F' = F(\varphi^{-1})\colon U' \to \mathbb{C}$ sea holomorfa.

15.1.1. Campos y 1–formas complejas

Definición. Sea $\mathcal{X}$ una variedad diferenciable, llamamos *función diferenciable compleja* a cada función $f = f_1 + if_2 \colon U \subset \mathcal{X} \to \mathbb{C}$, con $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y al anillo que forman lo denotaremos con $\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{C}) = \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U)$. Llamamos *campos complejos* a las derivaciones sobre $\mathbb{C}$

$$D \colon \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{C}),$$

y al $\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{C})$–módulo que forman lo denotamos $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U) = \mathcal{D}(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ y a su dual

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathbb{C}}(U) &= \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U)^* = Hom_{\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{C})}(\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U), \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U)) \\ &= \Omega(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Del mismo modo consideraremos la complejización del espacio tangente en un punto x

$$T^{\mathbb{C}}_x(\mathcal{X}) = Der_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{X},\mathbb{C})_x, \mathbb{C}) = T_x(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

y la *diferencial* compleja

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{d} & \Omega_{\mathbb{C}} \\ f = f_1 + if_2 & \longrightarrow & df = df_1 + idf_2 \end{array}$$

para la que también se tiene $df(D) = Df$.

Proposición 15.3 *Todo campo tangente real $D \in \mathcal{D}(U)$ define de forma natural uno complejo, $D(f_1 + if_2) = Df_1 + iDf_2$ y todo campo complejo E define de modo único campos reales E_1, E_2 tales que $E = E_1 + iE_2$. Toda 1–forma real define de forma natural una compleja, $\omega(D_1 + iD_2) = \omega D_1 + i\omega D_2$ y toda 1–forma compleja ω define de modo único 1–formas reales ω_1, ω_2 tales que $\omega = \omega_1 + i\omega_2$.*

Demostración. Obsérvese que E está determinado sobre las funciones reales pues $E(f_1 + if_2) = Ef_1 + iEf_2$ y que para f real

$$Ef = \mathrm{Re}(Ef) + i\,\mathrm{Im}(Ef) = E_1 f + iE_2 f. \quad \blacksquare$$

Definición. Definimos las *conjugaciones* en $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ y $\Omega_{\mathbb{C}}$ respectivamente,

$$D = D_1 + iD_2 \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{D} = D_1 - iD_2 \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$$
$$\omega = \omega_1 + i\omega_2 \in \Omega_{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\omega} = \omega_1 - i\omega_2 \in \Omega_{\mathbb{C}}$$

.

En un abierto coordenado $(U; x_i)$, las parciales

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n},$$

son base de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U)$, pues todo campo complejo D en U

$$D = D_1 + iD_2 = \sum_{i=1}^{n} f_{1i} \frac{\partial}{\partial x_i} + i \sum_{i=1}^{n} f_{2i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

para $F_i = f_{1i} + if_{2i}$. Del mismo modo las diferenciales $dx_1, \ldots, dx_n$ son base de $\Omega_{\mathbb{C}}(U)$.

Definición. Sea $(\mathcal{X}, J)$ una variedad casi compleja. Extendemos J a $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ de modo que sea $\mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{C}}$–lineal y siga verificando $J^2 = -\operatorname{Id}$

$$\begin{aligned} J\colon \mathcal{D}_{\mathbb{C}} &\to \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \\ D &\to J(D) = J(D_1 + iD_2) = J(D_1) + iJ(D_2), \end{aligned}$$

y por tanto conmuta con la conjugación

$$J(\overline{D}) = \overline{J(D)}.$$

Sobre las 1–formas definimos

$$\begin{aligned} J\colon \Omega_{\mathbb{C}} &\to \Omega_{\mathbb{C}} \\ \omega &\to J(\omega), \quad \text{para} \quad J\omega(D) = \omega(JD). \end{aligned}$$

Ahora bien como $J^2 = -\operatorname{Id}$, para $J\colon \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, tendremos que $J^2 + \operatorname{Id} = 0$ y como $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$, siendo $x - i$ y $x + i$ primos entre sí, tendremos por el primer teorema de descomposición[1] que

$$\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \ker(J - i\operatorname{Id}) \oplus \ker(J + i\operatorname{Id}) = \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(1,0)} \oplus \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(0,1)},$$

[1]Para $p_1 = x - i$, $p_2 = x + i$, existen polinomios q_1, q_2 tales que $1 = q_1p_1 + q_2p_2$, por tanto $\operatorname{Id} = q_1(J) \circ p_1(J) + q_2(J) \circ p_2(J)$ y para todo D, $D = D_1 + D_2$, para $D_1 = q_2(J)[p_2(J)(D)]$ y $D_2 = q_1(J)[p_1(J)(D)]$, siendo $p_i(J)(D_i) = 0$.

siendo

$$\begin{aligned} D \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(1,0)} &\quad \Leftrightarrow \quad JD = iD, \\ D \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(0,1)} &\quad \Leftrightarrow \quad JD = -iD, \end{aligned}$$

y la descomposición es conjugada en el siguiente sentido

$$\begin{aligned} D \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(1,0)} &\quad \Leftrightarrow \quad JD = iD \quad \Leftrightarrow \\ &\quad \Leftrightarrow \quad J\overline{D} = \overline{JD} = -i\overline{D} \quad \Leftrightarrow \\ &\quad \Leftrightarrow \quad \overline{D} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(0,1)}. \end{aligned}$$

Del mismo modo tenemos que

$$\Omega_{\mathbb{C}} = \Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)} \oplus \Omega_{\mathbb{C}}^{(0,1)},$$

siendo

$$\begin{aligned} \omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)} &\quad \Leftrightarrow \quad J\omega = i\omega, \\ \omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^{(0,1)} &\quad \Leftrightarrow \quad J\omega = -i\omega, \end{aligned}$$

y la descomposición también es conjugada, pues $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)}$ equivale a que $\overline{\omega} \in \Omega_{\mathbb{C}}^{(0,1)}$. Además se tiene que las parejas $(\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(0,1)}, \Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)})$ y $(\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(1,0)}, \Omega_{\mathbb{C}}^{(0,1)})$ son incidentes, pues por ejemplo si $D \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(0,1)}$ y $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)}$, entonces

$$\omega D = \omega(iJD) = i[J\omega](D) = -\omega D \quad \Rightarrow \quad \omega D = 0.$$

Consideremos $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, con las funciones $z_i = x_i + iy_i$, entonces $\Omega_{\mathbb{C}}$ tiene base $dx_1, dy_1, \ldots, dx_n, dy_n$ y también es base

$$\begin{aligned} dz_k &= dx_k + i dy_k, \\ d\overline{z_k} &= dx_k - i dy_k, \end{aligned}$$

y denotamos la base dual

$$\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z_n}} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}},$$

para la que se verifica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right), \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z_k}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right), \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{array}{l} J\dfrac{\partial}{\partial z_k} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial y_k} + i\dfrac{\partial}{\partial x_k}\right) = i\dfrac{\partial}{\partial z_k}, \\ J\dfrac{\partial}{\partial \overline{z_k}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial y_k} - i\dfrac{\partial}{\partial x_k}\right) = -i\dfrac{\partial}{\partial \overline{z_k}}, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial z_k} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(1,0)}, \\ \dfrac{\partial}{\partial \overline{z_k}} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(0,1)}, \end{array}$$

y por tanto

$$\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(1,0)} =< \frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n} >, \quad \Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)} =< dz_1, \ldots, dz_n > .$$
$$\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(0,1)} =< \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z_n}} >, \quad \Omega_{\mathbb{C}}^{(0,1)} =< d\overline{z_1}, \ldots, d\overline{z_n} > .$$

Definición. Sea $(\mathcal{X}, J)$ una variedad compleja. Diremos que un campo $D \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ es *holomorfo* si:

i) $D \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{(1,0)}$,

ii) Df es holomorfa para cada f holomorfa.

En coordenadas un campo D es holomorfo sii existen funciones $f_i = Dz_i$ holomorfas tales que

$$D = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

15.1.2. Integrabilidad de una estructura casi–compleja

Sea $(\mathcal{X}, J)$ una variedad casi–compleja de dimensión real $2n$, diremos que $\Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)}$ es un sistema de Pfaff totalmente integrable si todo punto tiene un entorno U y funciones $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\infty}$, tales que

$$\Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)}(U) =< df_1, \ldots, df_n > .$$

Proposición 15.4 *Sea $(\mathcal{X}, J)$ una variedad casi–compleja de dimensión real $2n$, entonces $(\mathcal{X}, J)$ es una variedad compleja sii $\Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)}$ es un sistema de Pfaff totalmente integrable y sii lo es $\Omega_{\mathbb{C}}^{(0,1)}$.*

Demostración. Lo último se sigue por conjugación. $\Rightarrow$ Todo punto tiene un entorno isomorfo a un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$, para el que

$$\Omega_{\mathbb{C}}^{(1,0)}(U) =< dz_1, \ldots, dz_n >, \qquad \Omega_{\mathbb{C}}^{(0,1)}(U) =< d\overline{z_1}, \ldots, d\overline{z_n} > .$$

$\Leftarrow$ Por la definición todo punto tiene un entorno U y $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}$, tales que

$$\Omega^{(1,0)}_{\mathbb{C}}(U) =< df_1, \ldots, df_n >,$$

por tanto $\Omega^{(0,1)}_{\mathbb{C}}(U) =< d\overline{f_1}, \ldots, d\overline{f_n} >$, y si $f_k = x_k + iy_k$, $df_k = dx_k + idy_k$, $d\overline{f_k} = dx_k - idy_k$ y

$$\Omega_{\mathbb{C}}(U) =< dx_1, \ldots, dx_n, dy_1, \ldots, dy_n >,$$

y como son reales y tienen diferenciales $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}$ independientes, también son $\mathcal{C}^\infty$ independientes, por tanto es un sistema de coordenadas reales. Ahora bien como

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(U) &= \mathcal{D}^{(1,0)}_{\mathbb{C}}(U) \oplus \mathcal{D}^{(0,1)}_{\mathbb{C}}(U)\\ &=< \frac{\partial}{\partial f_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial f_n} > \oplus < \frac{\partial}{\partial \overline{f_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{f_n}} >,\end{aligned}$$

y se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial f_k} + \frac{\partial}{\partial \overline{f_k}}, \quad \frac{\partial}{\partial y_k} = i\left(\frac{\partial}{\partial f_k} - \frac{\partial}{\partial \overline{f_k}}\right),$$

tendremos que

$$\begin{aligned}J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) &= J\left(\frac{\partial}{\partial f_k}\right) + J\left(\frac{\partial}{\partial \overline{f_k}}\right)\\ &= i\frac{\partial}{\partial f_k} - i\frac{\partial}{\partial \overline{f_k}} = \frac{\partial}{\partial y_k},\\ J\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) &= iJ\left(\frac{\partial}{\partial f_k}\right) - iJ\left(\frac{\partial}{\partial \overline{f_k}}\right)\\ &= -\frac{\partial}{\partial f_k} - \frac{\partial}{\partial \overline{f_k}} = -\frac{\partial}{\partial x_k},\end{aligned}$$

por tanto $(U; x_k, y_k)$ es un entorno coordenado casi complejo y por tanto $(\mathcal{X}, J)$ es una variedad compleja. ∎

Definición. Llamamos *tensor de Nijenhuis* ó de *torsión de* J a

$$N(D_1, D_2) = [JD_1, JD_2] - J[D_1, JD_2] - J[JD_1, D_2] - [D_1, D_2],$$

para cada par de campos $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$.

Proposición 15.5 *Las condiciones siguientes son equivalentes*[2]*:*
(a) *N=0.* (b) $\mathcal{D}^{(1,0)}$ *es involutiva.* (c) $\mathcal{D}^{(0,1)}$ *es involutiva.*

Demostración. Las dos últimas son equivalentes por conjugación. Ahora como $(J+i\,\mathrm{Id})\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \mathcal{D}^{(1,0)}$ y $(J-i\,\mathrm{Id})\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \mathcal{D}^{(0,1)}$, basta demostrar que para $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$,

$$\begin{aligned}(J-i\,\mathrm{Id})[(J+i\,\mathrm{Id})D_1, (J+i\,\mathrm{Id})D_2] = 0,\\ (J+i\,\mathrm{Id})[(J-i\,\mathrm{Id})D_1, (J-i\,\mathrm{Id})D_2] = 0,\end{aligned}$$

equivale a que $N(D_1, D_2) = 0$. Por linealidad basta verlo para $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned}(J-i\,\mathrm{Id})([JD_1, JD_2] + i[D_1, JD_2] + i[JD_1, D_2] - [D_1, D_2]) =\\ = J[JD_1, JD_2] + iJ[D_1, JD_2] + iJ[JD_1, D_2] - J[D_1, D_2] -\\ -i[JD_1, JD_2] + [D_1, JD_2] + [JD_1, D_2] + i[D_1, D_2] =\\ = J(N(D_1, D_2)) - iN(D_1, D_2),\end{aligned}$$

lo cual es cero si $N(D_1, D_2) = 0$ y recíprocamente si ambas expresiones son cero, $N(D_1, D_2) = 0$. ∎

Si el teorema de Frobenius fuese cierto para distribuciones complejas, tendríamos de forma inmediata las equivalencias

$$\begin{aligned}N = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{D}^{(1,0)} \text{ es involutiva}\\ &\overset{\text{T.Frob.}}{\Leftrightarrow} \ \Omega^{(0,1)} \text{ tot.int.} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{X}, J) \text{ es compleja,}\end{aligned}$$

pero el teorema de Frobenius no es válido en general, aunque la equivalencia anterior sí y no es un resultado fácil.

Teorema de Newlander–Niremberg 15.6 $(\mathcal{X}, J)$ *casi compleja es compleja sii N=0.*

Fin del Tema en construcción 15

[2] Entendiendo que $\Delta \subset \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ es *involutiva* si $D_1, D_2 \in \Delta$ entonces $[D_1, D_2] \in \Delta$.

Índice alfabético

CO_2, 42
C^{12}, 42
C^{14}, 42
D^F, 22
D_p, 12
F', 2
F^*, 3, 25, 152
F_*, 16
F'_x, 2
$J^1_p(f)$, 397
$L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, 2
$T(U)$, 17
$\Delta(V)$, 343
Δ_x, 342
ω_x, 25
$\partial/\partial t$, 38
$\partial/\partial v_i$, 33
$\partial f/\partial x_i$, 4
sig(σ), 153
sop(φ), 7
$\Box u$, 924
d_x, 25
dv_i, 33
$q(C)$, carga de C, 778
$\mathcal{C}(\mathcal{E})$, 1
$\mathcal{C}^k(U)$, 3
$\mathcal{D}(U) = \mathcal{D}_\infty(U)$, 19
$\mathcal{D}^F$, 349
$\mathcal{D}_0(U)$, 19
$\mathcal{D}_L(U)$, 19
$\mathcal{D}_k(U)$, 19
$\mathcal{E}^*$, 1
$\mathcal{J}^1(\mathcal{U})$, 397
$\mathcal{J}^1_p$, 397
$\mathcal{P}(\mathcal{E})$, 1
$\mathcal{P}(\mathcal{V})$, 341
$\mathcal{P}_x$, 341
$\mathcal{S}(T)$, $\mathcal{H}(T)$, 154
$\mathcal{W}_D$, 84
Δ, 753

año–luz, 923
acción, 607
adjunto de un sistema, 218
álgebra
    de funciones continuas, 1
    de Grassman, 156
    de Lie, 103
    de polinomios, 1
    exterior, 156
    tensorial, 155
anillo conmutativo, 143
aplicación
    analítica, 696
    casi compleja, 1016
    contractiva, 78
    de Poincaré, 314
    diferenciable, 2, 423
    imagen esférica, 999
    lineal
        cotangente, 25
        tangente, 16, 424
    lipchiciana, 78
        uniformemente, 80
    localmente lipchiciana, 78
aproximación
    a una órbita, 316
    en espiral, 320
aristas, 991
armónico n–ésimo, 885
armónicos esféricos, 827
Arnold, V.I., 140
Arquímedes,(*287* AC—*212* AC), 443
Arzela, C. (*1847–1912*), 139
autovalores de un campo tangente lineal, 206

barrera, 854
base de campos orientada, 992
baterías, 263
Bendixson, I. (*1861–1936*), 139
Bernoulli, D. (*1700–1782*), 274
Bessel, F.W. (*1784–1846*), 274
Birkhoff, 333
Bluman,G.W. and Kumei,S., 141
borde, de una variedad, 984
Brahe, Tycho (*1546–1601*), 275
braquistocrona, 513

cálculo de variaciones, 508, 509, 607
cáustica, 572
cónica, 407
caída de tensión, 263
calor, 943
  1–forma, 375
  ganancia o pérdida en un instante, 376
  intercambiado, 376
  realizado, 376
campo
  asociado a $u + iv$, 998
  característico, 452, 461
  de las homotecias, 367
    en fibrado tangente, 525
  de vectores, 17
    cotangentes, 29
    de clase k, 17
    tangentes, 18
  diferenciable
    de tensores, 148
  eléctrico, 928
  electromagnético, 928
  irrotacional, 173
  magnético, 928
  que apunta hacia fuera, 986
  solenoidal, 173
  tangente de las homotecias
    en fibrado tangente, 553
  tensorial, 147
    covariante, 152
campo tangente, 18, 423
  a soporte, 22
    universal, 24
  característico, 463
  complejización, 631
  complejo, 1019
  completo, 84
  conservativo, 295
  continuo, 19
  de las homotecias, 110, 297
    en fibrado tangente, 554
  de las traslaciones, 96
  de los giros, 110
  geodésico, 557
  gradiente, 31
  hamiltoniano, 393
  holomorfo, 1022
  invariante
    por un grupo, 108
  lagrangiano, 526
  lineal, 205
    relativo, 207
  localmente Hamiltoniano, 393
  localmente lipchiciano, 80
    uniformemente, 81
  paralelo, 373
  polinómico, 304
  vertical por F, 349
campos característicos, 628, 646
campos lineales
  equivalentes, 229
    diferenciablemente, 230
    linealmente, 230
    topológicamente, 230, 297
campos paralelos, 373
campos tangentes
  módulo dual, 28
cantidad
  de movimiento, 930
Caratheodory, C. (*1873–1950*), 443
Cartan, Elie (*1869–1951*), 204
catenaria, 54, 57, 59, 66, 188, 520, 573, 599, 603
catenoide, 599
Cauchy, A.L. (*1789–1857*), 138, 605
cerrada, p–forma, 163
ciclo, 374
cicloide, 516, 574
circuito eléctrico, 263
circulación de un campo, 997
clase de ω, 382
clasificación
  de campos no singulares, 96
  de ODL, 627
codiferencial, 925
  exterior, 638, 1004
coeficientes

de Fourier, 876
de Fourier–Legendre, 812
complejización
del espacio tangente, 1019
Condensadores, 263
conductividad térmica, 944
conexión lineal, 177, 370, 556
de Levi–Civitta, 179, 498, 558
plana, 373
conjugación de campos y 1–formas, 1020
conjugada armónica, 757
conjunto
de medida nula, 982
invariante, 309
negativamente , 309
positivamente, 309
límite
negativo (Ω_q), 309
positivo (α_q), 309
cono de Monge, 451
constante
g, 46
de la gravitación universal, 773
de Planck, 915, 917
gravitacional G, 46, 295
contracción
de un tensor, 146
interior, 144, 147
coordenadas
características, 646
cilíndricas, 64
esféricas, 766
inerciales, 922
polares, 34, 111
referencia afin, 920
simpléticas, 391, 491
coordenadas hiperesféricas, 820
corchete
de Lagrange, 607
de Lie, 103
de dos operadores, 613
de Poisson, 608
Coriolis, G.G. de,(*1792–1843*), 138
corriente eléctrica, 262
coseno hiperbólico, 56, 798
Criterio De Bendixson, 324
cuenca de un punto singular, 308
curva
característica, 479, 606, 628
integral, 36
máxima, 84
parametrizada, 36
de p–formas, 163
en un espacio de Banach, 209
curvatura, 114, 133, 572, 678, 856, 999
de Gauss, 180, 674
geodésica, 181
media, 601, 668, 676, 678
normal, 181
seccional, 180

D'Alembertiano, 892
$\Box u$, 925
D'ancona, M., 332
datación por el carbono, 43
definición intrínseca de EDP
con z, 491
sin z, 490
densidad
de carga, 931
derivación, 12, 18
derivada, 3
covariante, $D^{\nabla}E$, 101
de Lie, 105
de un campo tensorial, 149
de un ODL, 623
direccional, 4, 12
Descartes, René (*1596–1650*)
óvalo, 567
Desintegración, 41
difeomorfismo, 4
de clase k, 4
que conserva la orientación, 984
diferencia
de potencial, 295
diferencial, 28
compleja, 1019
covariante, 927
de funciones complejas, 632
de una p–forma compleja, 632
en un punto x, 25
exterior, 159
difusibidad del material, 945, 969
dipolo, 262
directriz, 407
Dirichlet, 333
distancia media, 409
distribución, 342
en Analisis Funcional, 831
involutiva, 343

rango de una, 343
totalmente integrable, 357
divergencia, 172, 227, 924, 995
de un tensor, 927

ecuación
de Gauss, 778
ecuación diferencial
adjunta, 242
de Bernoulli, 113
de Bessel, 248
de Euler, 239
de la catenaria, 56
de Riccati, 242
de segundo orden, 39
exacta, 241
homogénea, 110
invariante
por giros, 110
por homotecias, 110
por un grupo, 108
lineal, 112, 208
matricial asociada, 215
que admite factor integrante, 241
ecuación integral, 83
Ecuaciones
de Cauchy–Riemann, 634, 699, 700, 999
de Maxwell, 933
EDL, 208
EDO, 36
de Bessel, 248, 274, 890
de Euler, 756, 809
de Hamilton, 394
de Laguerre, 916, 917
de las geodésicas, 557
de Legendre, 809
EDP, 448
de Beltrami, 636
de Euler–Lagrange, 509, 511, 512
de Hamilton–Jacobi, 496, 563
para las geodésicas, 500
problema de dos cuerpos, 497
de LaPlace, 753
de las superficies mínimas, 673
de las superficies mínimas, 512, 658, 676
de ondas, 629, 669
n–dimensional, 892
aplicaciones a la música, 884
bidimensional, 888
solución de D'Alembert, 880
unidimensional, 874
de orden k, 609
de Poisson, 778, 787
de primer orden, 448
cuasilineal, 453
de Clairaut, 473, 489
de Hamilton–Jacobi, 563
de Schrödinger, 524, 914
de estado estacionario, 915
del calor, 945
bidimensional, 969
solución general $n = 1$, 948
Einstein, Albert (*1879–1955*), 204
ejemplo de Tikhonov, 962
elipsoide de inercia, 185
endomorfismo
J, 1015
asociado a un campo lineal, 206
curvatura, 371
de Weingarten, **181**
energía, 405, 497, 526
cinética, 50, 400, 499, 514, 536, 603
cinética y potencial, 523
de ω, 937
de una cuerda vibrante, 882
interna del sistema, 376
potencial, 50, 514, 535, 536, 603, 773
total, 296
entorno coordenado, 422
entropía, 381
envolvente
de un haz de planos, 450
de un haz de superficies, 479
espacio
afín, 919
cotangente, 25
complejización, 631
de Minkowski, 922
Euclideo, 920
euclideo, 2
tangente, 13, 423
complejización, 631
topológico
simplemente conexo, **860**
especies en competencia, 294
espiral, 127, 195, 312

estados de un sistema termodinámico, 375
estructura
diferenciable, 12, 422
casi–compleja, 1015
simplética, 391
fibrado cotangente, 396
fibrado tangente, 399, 527
Euler, L. (*1707–1783*), 274, 509, 607
evolvente, 518
exacta
1–forma, 28
p–forma, 163
excentricidad, 407
existencia de solución, 75
de una EDP de primer orden, 470
de una EDP de tipo hiperbólico, 714
exponencial de matrices, 223
exponentes característicos, 279

factor de integración, 167
familia localmente finita, 425
fenómeno
de la pulsación, 258
de la resonancia, 260
Fermat, P. (*1601–1665*), 565, 606
fibrado
cotangente, 27
tangente, 17, 369, 398
flujo, 71
de calor, 943
de un campo a través de S, 995
foco, 407
forma
armónica, 1008
de carga, 931
de Liouville, 30, 396
de volumen, 924, 993
exacta, cerrada, 163
forma fundamental, 181
Fórmula
de Gauss–Green, 990
de Kirchhoff, 905
de Rodrigues, 810
de Stirling, 825
de Taylor, 13
integral de Cauchy, 701
integral de Gauss, 778
integral de Poisson, 803, 835
fotosíntesis, 43
franjas de una distribucion, 357
frecuencia fundamental, 885
fuerza
centrífuga, 416
conservativa, 772
de Coriolis, 188, 416
electromotriz, 262
gravitacional, 773
función
afín, 205
analítica
compleja, 698
real, 692
armónica, 753
en el plano, 755
badén, 7
de Bessel, 250, 275, 890
de clase k, 2
de clase 1, 2
de clase infinita, 2
de Green, 833
en el plano, 858
de Liapunov, 288
de Liapunov estricta, 288
de Riemann–Green, 738
diferenciable compleja, 1019
diferenciable en una variedad, 422
energía, 520, 526, 936
Factorial, 250
Gamma, 250
generatriz, 456
holomorfa, 698, 1017
homogénea, 367
lineal
relativa, 207
potencial, 772
de un dipolo eléctrico, 782
subarmonica, 846
reemplazo, 850
superarmónica, 851

Gaudí, Antonio (*1852–1926*), 57
geodésicas, 181, 402, 498, **499**, 501, 524, 529, 530, 535, 537, 543, 557, 561, 562, 603, 1007
de la esfera, 501
de un elipsoide, 500
del cono, 505

del toro, 506
germen de función, 423
giros, 72, 763
campo tangente de los, 110
gradiente, 32, 172
Grasmann, H.G. (*1809–1877*), 204
Green
primera identidad, 814
segunda identidad, 815, 833
Grobman, 307
grupo
conmutativo, 143
de Cohomología de De Rham, 163
uniparamétrico, 71
local, 73

Halley, Edmond (*1656–1742*), 332
Hamilton, 410
Hamilton, W.R. (*1805–1865*), 204, 607
hamiltoniano (función), 393
Hartman, 307
haz
de $\mathbb{R}$–álgebras de funciones, 6
de módulos
de 1–formas, 28
de campos tangentes, 19
de campos tensoriales, 147
de un sistema de Pfaff, 341
de una distribución, 343
Heaviside, O., 275
helicoide, 437
hemisimetrización, 154
hipersuperficie característica, 893
hodógrafa, 410
homotecias, 72, 763
campo de las, 553
campo tangente de las, 110
Huygens (1629–1695), 516, 910

identidad de Jacobi, 103
igualdad de Parseval, 877
impulso
aparente, 930
incidente de un submódulo, 343
índice de estabilidad, 301
inducir la misma orientación, 978
Inductancias, 263
inmersión, 427
local, 427
integral
completa, 475
de 1–formas, 375
de Dirichlet, 829
de una n–forma, 981
de una curva, 210
primera, 19
intensidad de corriente, 263
inversión respecto de una esfera, 765
inversiones, 765
isótopos, 42
isotermas, 375

jet 1
de aplicaciones, 544
de funciones, 397
de funciones en p, 397
Joule, J. (*1818–1889*), 375

Kepler, J. (*1571–1630*), 275
Kolchin, 140

Lagrange, J.L. (*1736–1813*), 203, 332, 509, 605, 607, 677
Lagrange–Charpit, 605
lagrangiana, 509, 525
Lambert, Johann Heinrich (*1728–1777*), 44
Laplace, P.S. (*1749–1827*), 275, 678
LaPlace–Runge–Lenz, 405
LaPlaciano
Δ, 753
latus rectum, 407
Leibnitz, G.W. (*1646–1716*), 69, 138, 509
Lema de Poincaré, 165, 167, 195, 200, 389, 399, 400, 490, 493, 494, 867
Levi–Civita, T. (*1873–1941*), 204
Ley
de conservación
de la carga, 262, 931
de la energía, 50
momento angular, 183
momento lineal, 182
de fuerza de Lorentz, 928
de Galileo, 45
de Gauss, 935
de Hooke, 254
de inducción de Faraday, 935
de Kepler

primera, 267, 407
segunda, 266, 402, 541
tercera, 268, 409
de Kirchhoff
primera, 264
segunda, 264
de la refracción de la luz, 606
de Newton
de acción–reacción, 182, 183
de atracción universal, 46, 266, 295
de enfriamiento, 131
de transferencia del calor, 943
segunda, 46, 49, 182, 196, 254, 265, 296
de Pareto, 44, 66
de Snell, 565, 606
L'Hopital, 69
Liapunov, 333
Lie, Sophus, (*1842–1899*), 140
Lindelof, E.L. (*1870–1946*), 139
linealización de un campo tangente, 53, 278
Liouville, J. (*1809–1882*), 140
Lipschitz, R.O.S. (*1832–1903*), 138
logaritmo, 758

método
de Frobenius, 246
de Jacobi, 492
de la envolvente, 478, 485
de la Proyección, 474
de Lagrange–Charpit, 477
de las características de Cauchy, 472
de las imágenes, 837, 840, 843
de las potencias, 245
de Lie, 109
de Natani, 366
de Riemann, 736
de separación de variables
EDP Calor, 969
EDP Ondas, 899
del descenso, 907
Transformada de Laplace, 247
métrica
de Minkowski, 673
masa
aparente, 930
matriz fundamental, 214
Maupertuis, P. (*1698–1759*), 606
Meusnier, 677
módulo, 143
de campos tangentes, 19
dual, 144
Moigno, 138
momento, 59, 182
angular, 182, 404
conservación del, 183
de inercia, 185
de un dipolo, 782
externo total, 58, 182
Monge, G. (*1746–1815*), 606
multiplicadores característicos, 315
de una órbita cíclica, 315

n–forma
de Poincare–Cartan, 548
Navarro González, J.A., 444
Newton, I. (*1642–1727*), 69, 138, 268, 509

ODL
adjunto , 733
autoadjunto, 734
de una solucion z, 644
elíptico, 627
hiperbólico, 627
invariante por un difeomorfismo, 622
parabólico, 627
operador
$*$ de Hodge, 638, 1001
de LaPlace, 753
Caracterización, 621
de Laplace–Beltrami, 638, 1004
de Weingarten, **181**, 674, 676, 1007
diferencial lineal (ODL), 614
lineal, 613
órbita
asintóticamente estable, 316
cíclica, 312
estable, 324
de un planeta, 267
Molniya, 441
periódica, 312
orientación, 977, 978
contraria, 978
sistema de coordenadas, 981

ovalo
de Descartes, 567

péndulo, 48
parámetro longitud de arco, 55
Pareto, Vilfredo (*1848–1923*), 44
Peano, G. (*1858–1932*), 139
período, 312
Pfaff, J.F. (*1765–1825*), 444, 606
Picard, E. (*1856–1941*), 139
Plateau, 678
Poincaré, H., 306, 333
Poincare–Cartan
n–forma de, 548
Poisson, S.D. (*1781–1840*), 333, 608
corchete, 395
paréntesis, 395
polígono, 991
polinomios
de Legendre, 810
de Tchebycheff, 805
potencial, 295, 871
diferencia de, 295
electrico, 772
electromagnético, 933
electrostático, 774, 776, 916
electrostático, diferencia, 264
escalar, 933
gravitacional, 772
Newtoniano, de una densidad de masa, 776
retardado, 913
superficial simple, 780
vector, 933
primera forma fundamental, 181
Principio
cuarto de Termodinámica, 380
de conservación
de la energía, 268, 405
momento angular, 183, 404, 541
momento lineal, 182
de Dirichlet, 829
de Hamilton, 523
de Huygens, 910
de mínima acción, 508, 523, 606, 607
de Hamilton, 607
de mínimo tiempo de Fermat, 565, 606
de Maupertuis, 534
del máximo
EDP calor, 946
EDP LaPlace, 795
funciones holomorfas, 703
primero de Termodinámica, 376
segundo de Termodinámica, 378, 443
tercero de Termodinámica, 379
principio
de Duhamel, 911
problema
de Cauchy
para EDP de orden 1, 469
de Dirichlet, 794
en la esfera, 808
en un disco, 800
en un rectángulo, 797
de Goursat, 723
de los dos cuerpos, 404, 497, 540
de los tres cuerpos, 274
de Neumann, 794
de valor inicial característico, 724
mixto, 794
problemas
de circuitos eléctricos, 262
de mezclas, 253
de muelles, 254
proceso
de nacimiento y muerte, 458
de Poisson, 457
producto
exterior, 156
tensorial, 144
de campos, 147
vectorial, 173
proyección
canónica
en el fibrado cotangente, 396
en el fibrado de jets, 397, 545
en el fibrado tangente, 17
regular, 349, 369
pulsación, 258
punto
crítico, 278
de equilibrio, 278
estable, 280
asintóticamente, 280
hiperbólico, 279, 303
inestable, 280
límite

negativo, 309
positivo, 309
regular, 854
singular, 96, 278
puntos
triangulares de Lagrange, 413

radio
de convergencia, 688
espectral, 281
rango, 424
de un sistema de Pfaff, 341
de una distribución, 343
referencia
afín, 920
euclidea, 920
inercial, 922
regla
de la cadena, 16
de Leibnitz, 18, 423
en un punto, 13, 423
de Stokes, 903
Resistencias, 263
resonancia
de $\lambda_i \in \mathbb{C}$, 305
fenómeno de la, 260
restricción
de un campo, 20
de un ODL, 615
revestimiento, 860
conexo, 860
Ricci, G. (*1853–1925*), 203
Riemann, F.B. (*1826–1866*), 203, 736, 752
Ritt, 140
rotacional de un campo, 172, 364, 997
interpretación geométrica, 174
Runge–Lenz, 541

símbolo de un ODL, 626
símbolos de Christoffel, 557
sólido rígido, 183
Sancho de Salas, J., 444, 942
Sancho Guimerá, J., 444
satélites
troyanos, 421
sección local, 312
segunda forma fundamental, 181
seminorma, 8
seno hiperbólico, 56, 798
serie
de Fourier, 876
de Fourier–Legendre, 811
series multiples, 689
Siegel, 307
signo de una permutación, 153
simetrización, 154
sistema
característico, 345
de ω, 382
de una EDP, 652
de una EDP cuasi–lineal, 647
de coordenadas
de clase k, 4
inercial, 182
inerciales, 922
lineales, 2
de Pfaff, 341
complejo totalmente integrable, 1022
de la temperatura, 375
proyectable, 350
rango, 341
totalmente integrable, 357
de Ricci, 204
fundamental, 214
termodinámico, 375
sistemas
depredador–presa, 291
hiperbólicos, 725
Snellius, Willebrord (Snell) (*1580–1626*), 606
solución
de una EDO, 36
no autónoma, 38
de una EDP
general, 487
singular, 486
soporte
de una n-forma, 980
de una función, 7
St. Germain, 678
Sternberg, S., 139, 307, 333
subespacios entrantes y salientes, 301
subida de un campo, 89
al jet 1, 545
en una variedad con conexión, 370, 556
primera, 554
segunda, 556

subvariedad, 427
inmersa, 427
regular, 427
solución de una EDP, 463
sumidero, 308
superficies mínimas, 512, 513, 598, 601, 645, 658, 659, 668, 672, 673, 676, 677, 1008
EDP, 512, 676
representación de Weierstrass, 659

temperatura, 375, 943
tensor, 144, 204
covariante
hemisimétrico, 153
simétrico, 153
de curvatura, 178
de deformación, 191
de energía–impulso, 937
de esfuerzos, 189
de inercia, 181, 185
de Nijenhuis de J, 1023
de Riemann–Christoffel, 179
de torsión, 178
de J, 1023
de volumen, 170
elástico, 204
eliptico, hiperbolico, parabolico, 627
métrico, 170, 178
Teoría de Hamilton–Jacobi, 491
Teorema
aplicaciones contractivas, 79
conservación energía (Ec.Ondas), 897, 898
curva de Jordan, 320
de Abel, 689
de Ascoli–Arzela, 139
de Caratheodory, 174, 200
de Cauchy, 634
de Cauchy–Kowalewsky, 682, 708
de Clairaut, 530
de comparación de Sturm, 241
de continuidad de solución
de una EDP de tipo hiperbólico, 721
de Darboux, 387, 396, 398, 462
de dependencia cont.
Ec. Calor unid., 947
grupo uniparamétrico, 87
problema de Dirichlet, 797
de dependencia dif.
grupo uniparamétrico, 93
sol. EDP tipo hiperbólico, 723
de Dirichlet, 877
de existencia de solución
de Cauchy–Peano, 77
de una EDP, 467
de una EDP de tipo hiperbólico, 718
Ec. Calor unid., 953
integral de Poisson, 965
de expansión de autofunciones, 901
de Fourier–Bessel, 891
de Frobenius, 358, 360, 362, 374, 433, 558, 1024
de Gauss, 816
de Hartman–Grobman, 333
de Helmholtz I, 796, 867
de Helmholtz II, 796, 867
de Jacobi, 401
de Jordan, 281
de la función
implícita, 6
inversa, 5, 16
de la proyección, 351, 353
de Lagrange, 297
de Liapunov
órbitas cíclicas, 318
de Liouville, 227, 270, 394, 804
de Newlander–Niremberg, 1024
de Noether, 539
de Picard, 775, 825
de Poincare–Bendixson, 322
de resonancia de Poincare, 306
de Stokes, 324, 403, 511, 633, 634, 702, 711, 758, 813, 814, 893, 898, 899, 960, 969, 988
de unicidad de solución
de una EDO, 83
de una EDP, 468
de una EDP de tipo hiperbólico, 719
EDP LaPlace, 796
EDP Ondas, 896
EDP Poisson, 796
del flujo, 96
del valor extremo
EDP calor, 962

del valor medio, 801
(I), 818, 907
(II), 818
desigualdad dominio dependencia, 894
Fórmula de Kirchhoff, 905
generador infinitesimal, 73
valor medio
funciones analíticas, 703
Termodinámica, 443
torque, 58, 182
trabajo, 294, 772
1–forma, 375
a lo largo de una curva, 294
intercambiado, 376
realizado, 376
tractriz, 41, 64, 116, 520, 603
transferencia de calor, 943
transformación
conforme, 759
lineal y funciones armónicas, 764
que conserva funciones armónicas, 763
simplética, 391
termodinámica, 375
transformada de Legendre, 525, 665
en $\mathbb{R}$, 665
en $\mathbb{R}^2$, 666
traslaciones, 72, 763
trayectoria
de un móvil, 923
espacial, 922
lumínica, 922
rayo de luz, 923
temporal, 922

1–forma, 28
complejización, 631
de calor, 375
de Liouville, 30, 396
del trabajo, 294, 375
en un espacio vectorial, 25
en una variedad, 424
exacta, 28
homogénea, 367
incidente, 28
regular, 382

vértices del polígono, 991
Vallee–Pousin, Charles de la, (*1866–1962*), 139
valor extremal del problema variacional, 547
variedad
$\mathcal{C}^k$–diferenciable, 12
con borde, 984
diferenciable, 422
analítica compleja, 1018
casi compleja, 1015
integral, 360
máxima, 360
orientable, 977
orientada, 978
Riemanniana, 178
simplética, 391
tangente, 360
vector, 204
cotangente, 25
de carga–corriente, 932
de corriente, 932
de energía–impulso, 936, 937
de impulso, 930
de LaPlace–Runge–Lenz, 405
de Runge–Lenz, 541
tangente, 12
velocidad
angular, 184
aparente, 922, 930
de escape, 407
Vinograd, 333
ejemplo de, 309
Volterra, Vito (*1860–1940*), 139, 332
volumen, 994

Watson, 252
Wronskiano, 238

Young, T., 678